

Міністерство транспорту та зв'язку України
Державний департамент з питань зв'язку та інформатизації
ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ім. О. С. ПОПОВА

Теорія поля. Теорія функцій комплексної змінної

Навчально-методичний посібник
для студентів II-го курсу технічних спеціальностей

Укладачі: доц. А. Г. Буслаєв, доц. Л. І. Соколов, доц. О. А. Василенко.

Теорія поля. Теорія функцій комплексної змінної: Навчально-методичний посібник для студентів II-го курсу технічних спеціальностей.

У методичному посібнику в стислій формі викладено основні відомості та методичні розробки теоретичних та практичних занять з модуля „Теорія поля. Теорія функцій комплексної змінної”. З кожної теми представлено розв’язки типових завдань і прикладів, задачі для самостійного розв’язування.

Навчально-методичний посібник розглянуто і схвалено методичною радою факультету ТКС.

Протокол № 9 від 22 квітня 2008 р.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри вищої математики.

Протокол № 8 від 6 березня 2008 р.

ЗМІСТ

Розподіл навчального часу з модуля № 5: „Теорія поля. Теорія функцій комплексної змінної”	4
1 Теорія поля	
1.1 Скалярне поле.....	7
1.1.1 Похідна за напрямом.....	7
1.1.2 Градієнт функції.....	9
1.2 Оператор Гамільтона.....	9
1.3 Векторне поле.....	10
1.3.1 Інтеграл по області (другого роду).....	11
1.3.2 Криволінійний інтеграл другого роду.....	12
1.3.3 Обчислення криволінійного інтеграла другого роду.....	13
1.3.4 Обчислення площ плоских фігур за допомогою криволінійного інтеграла другого роду.....	14
1.3.5 Зв’язок криволінійного інтеграла другого роду з подвійним інтегралом (формула Гріна).....	15
1.3.6 Поверхневий інтеграл другого роду. Потік векторного поля.....	16
1.3.7 Дивергенція векторного поля.....	22
1.3.8 Формула Остроградського-Гауса.....	22
1.3.9 Ротор (вихор) векторного поля.....	24
1.3.10 Формула Стокса.....	24
1.3.11 Властивості векторних полів.....	25
1.3.12 Робота в потенціальному полі.....	26
1.3.13 Теорема Гельмгольца.....	27
1.4 Завдання для самостійної роботи.....	27
2 Теорія функцій комплексної змінної	
2.1 Комплексні числа та дії над ними.....	31
2.2 Поняття про функцію комплексної змінної.....	32
2.3 Основні елементарні функції комплексної змінної.....	33
2.4 Диференційованість і аналітичність функції комплексної змінної....	35
2.5 Інтеграл від функції комплексної змінної. Теорема Коші.....	37
2.6 Інтеграл Коші. Інтегральна формула Коші.....	41
2.7 Похідні вищих порядків від аналітичної функції.....	43
2.8 Ряди аналітичних функцій.....	44
2.8.1 Ряд Тейлора.....	44
2.8.2 Ряд Лорана.....	46
2.9 Ізольовані особливі точки.....	47
2.10 Лишки. Основна теорема про лишки.....	49
2.11 Обчислення невластних інтегралів.....	51
2.12 Завдання для самостійної роботи.....	53
Література.....	59

**Розподіл навчального часу з модуля:
„Теорія поля. Теорія функцій комплексної змінної”**

Структура залікового модуля

Змістовні модулі	Лекції (год.)	Заняття		Самостійна та індивідуальна робота
		практичні	лабораторні	
1 Скалярні та векторні поля	18	18	-	40
2 Теорія функцій комплексної змінної	14	14	-	31
Разом	32	32	-	71

Зміст залікового модуля

1 Скалярні та векторні поля.

- 1.1 Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.
- 1.2 Криволінійний інтеграл другого роду. Формула Гріна.
- 1.3 Поверхневий інтеграл другого роду. Формула Остроградського–Гауса. Формула Стокса.
- 1.4 Векторне поле. Векторні лінії. Потік векторного поля. Дивергенція векторного поля. Циркуляція. Ротор поля. Оператор Гамільтона.
- 1.5 Спеціальні векторні поля. Теорема Гельмгольца.

2 Теорія функцій комплексної змінної.

- 2.1 Границя і неперервність функції комплексної змінної (ФКЗ).
- 2.2 Похідна від функції комплексної змінної. Умови Коші – Рімана. Аналітичні функції.
- 2.3 Інтеграл від функції комплексної змінної, його зв'язок з криволінійним інтегралом другого роду. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші. Інтеграл типу Коші.
- 2.4 Ряди в комплексній області. Ряд Тейлора.
- 2.5 Ряд Лорана. Класифікація ізольованих особливих точок.
- 2.6 Лишки. Основна теорема про лишки.

Перелік лекційних занять залікового модуля

№ пп.	Номер, теми лекцій	Год.
1 Скалярні та векторні поля		
1	Л.1 Скалярне поле. Похідна за напрямком. Градієнт функції. Оператор Гамільтона.	2
2	Л.2 Векторне поле. Криволінійний інтеграл другого роду та його обчислення.	2

	CP1 Застосування криволінійного інтеграла другого роду.	
3	Л.3 Формула Гріна та її застосування.	2
4	Л.4 Поверхневий інтеграл другого роду. CP2 Обчислення поверхневого інтеграла другого роду.	2
5	Л.5 Дивергенція векторного поля. Формула Остроградського-Гауса.	2
6	Л.6 Ротор векторного поля. Формула Стокса. CP3 Обчислення циркуляції векторного поля.	2
7	Л.7 Властивості векторних полів.	2
8	Л.8 Робота в потенціальному полі. Теорема Гельмгольца. CP4 Знаходження потенціалу потенціального поля.	2
2 Теорія функцій комплексної змінної		
9	Л.9 Комплексні числа, дії над ними. Формули Ейлера.	2
10	Л.10 Функції комплексної змінної (ФКЗ). Основні означення. CP5 Застосування формул Ейлера.	2
11	Л.11 Похідна від функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана. CP6 Дослідження на аналітичність функції комплексної змінної.	2
12	Л.12 Інтеграл від функції комплексної змінної та його властивості.	2
13	Л.13 Інтегральна теорема Коші для однозв'язної і багатозв'язної областей.	2
14	Л.14 Інтегральна формула Коші. Похідні вищих порядків від аналітичної функції комплексної змінної.	2
15	Л.15 Ряди Тейлора і Лорана.	2
16	Л.16 Класифікація ізольованих особливих точок. Лишки та їх застосування. CP7 Обчислення невластивих інтегралів від функції дійсної змінної за допомогою лишків.	2

Перелік практичних занять залікового модуля

№ пп.	Номер, теми занять	Год.
1 Скалярні та векторні поля		
1	Скалярні поля.	2
2	Характеристики скалярних полів. Похідна за напрямом. Градієнт.	2
3	Характеристики векторних полів.	2
4	Обчислення криволінійних інтегралів другого роду.	2
5	Обчислення поверхневих інтегралів другого роду.	2
6	Потік векторного поля.	2
7	Дивергенція.	2
8	Циркуляція. Ротор поля.	2
9	Спеціальні векторні поля.	2

2 Теорія функцій комплексної змінної		
10	Функція комплексної змінної. Основні елементарні функції комплексної змінної.	2
11	Похідна від функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана.	2
12	Інтеграл від функції комплексної змінної. Теорема Коші.	2
13	Інтегральна формула Коші. Інтеграл типу Коші.	2
14	Ряд Тейлора.	2
15	Ряд Лорана.	2
16	Лишки. Застосування лишків до обчислення інтегралів.	2

Перелік знань та вмінь

Студент повинен знати:

- 1 Поняття скалярного і векторного полів, їх характеристики.
- 2 Властивості векторних полів (соленоїдальність, потенціальність, безвихорність).
- 3 Поняття функції комплексної змінної. Поняття границі, похідної, інтеграла від функції комплексної змінної.
- 4 Означення похідної від функції комплексної змінної та умови диференційованості ФКЗ.
- 5 Поняття аналітичності функції комплексної змінної. Теорему Коші. Інтегральну формулу Коші.
- 6 Розклад функцій комплексної змінної в ряди Тейлора і Лорана.
- 7 Лишки. Основну теорему про лишки.

Студент повинен вміти:

- 1 Знаходити основні характеристики скалярного поля (поверхні (лінії) рівня, похідну за напрямом, градієнт).
- 2 Характеристики векторного поля (рівняння векторних ліній, потік, дивергенцію, циркуляцію, ротор, потенціал).
- 3 Виконувати дії над комплексними числами.
- 4 Знаходити дійсну та уявну частини функції комплексної змінної.
- 5 Перевіряти умови Коші-Рімана і знаходити похідну від функції комплексної змінної.
- 6 Застосовувати інтегральну формулу Коші для обчислення інтегралів і криволінійного інтеграла від аналітичної функції комплексної змінної.
- 7 Розкласти функції комплексної змінної в ряди Тейлора і Лорана, застосовувати їх на практиці.
- 8 Знаходити лишки і обчислювати інтеграли за допомогою лишків.

1 ТЕОРІЯ ПОЛЯ

1.1 Скалярне поле

Нехай G – деяка область на площині чи у просторі.

Означення. Якщо з кожною точкою M області G пов'язана скалярна величина u , то говорять, що задано скалярне поле цієї величини.

Приклад. Поле температур, поле тисків.

Скалярне поле задається скалярною функцією $u = f(M)$.

Означення. Множину точок, у яких скалярна функція приймає одне й теж саме значення $f(M) = \tilde{n}$, ($c = const$), називають лінією рівня (поверхнею рівня).

$$c = f(M), \quad c = f(x, y) \quad \text{або} \quad c = f(x, y, z).$$

Приклад 1. Знайти лінії рівня функції $u = \frac{y}{x^2}$.

Розв'язання.

Так як функція має вигляд $u = \frac{y}{x^2}$, тоді

лінії рівня: $c = \frac{y}{x^2}$, $y = cx^2$.

Отже, лініями рівня в даному випадку є сімейство парабол (рисунок 1.1).

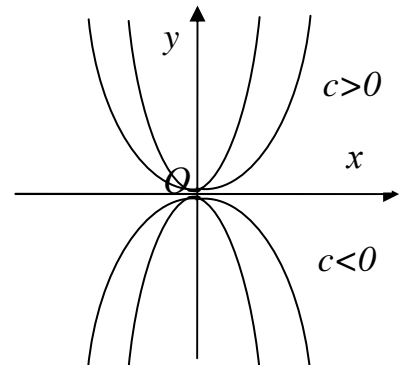


Рисунок 1.1

Приклад 2. Знайти поверхні рівня функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Розв'язання.

Так як функція $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, тоді поверхні рівня: $c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, тобто поверхнями рівня є сімейство (сукупність) концентричних сфер (рисунок 1.2).

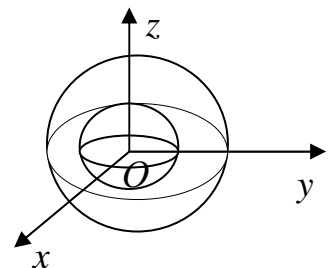


Рисунок 1.2

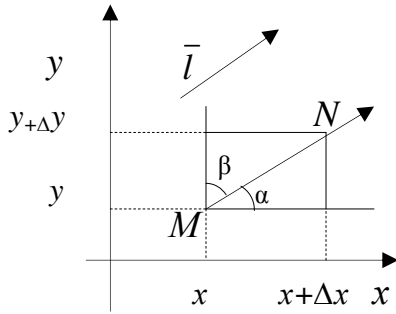
1.1.1 Похідна за напрямом

Розглянемо функцію скалярного поля $u = f(x, y)$, $M \in G$.

Означення. Похідною функції $u = f(x, y)$ в точці M за напрямом вектора $\vec{l}$ називається границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$ (якщо вона існує), і позначається символом $\frac{\partial u}{\partial l}$. Тоді за означенням

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \quad (1)$$

Розглянемо $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(N) - f(M)}{\Delta l}, \overline{MN} \square \vec{l}$ (рисуюнок 1.3).



Рисуюнок 1.3

Нехай $MN = \Delta l$, тоді $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$,
 $\Delta y = \Delta l \cos \beta$.

$$\vec{l}^\circ = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \left(\frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}, \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta).$$

$$\text{Отже, } \cos \alpha = \frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}, \cos \beta = \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \text{ і}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

Приріст: $\Delta_l u = f(N) - f(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Перепишемо дану рівність як $\Delta_l u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$, тому $\Delta_l u = \Delta_x u + \Delta_y u$. Підставивши останню рівність у формулу (1), матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta l} + \frac{\Delta_y u}{\Delta l} \right) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x} \cos \alpha + \frac{\Delta_y u}{\Delta y} \cos \beta \right).$$

Отже, похідна функції скалярного поля $u = f(x, y)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta.$$

Аналогічно доводиться, що для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

де $\vec{l}^\circ = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, а $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\vec{l}$.

Зауваження. Поняття похідної за напрямом є узагальненням поняття частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, які можна розглядати як похідні від функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом координатних осей Ox, Oy, Oz .

Приклад. Знайти похідну функції $u = x^2 - 4yz$ в точці $M(-2, 1, 0)$ в напрямку від цієї точки до точки $M_1(2, 1, 3)$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\overline{MM_1} = \bar{l}$ і його напрямні косинуси: $\overline{MM_1}(4, 0, 3)$, $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{16+9}} = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5}$.

Частинні похідні функції в точці M : $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 2x|_M = -4$, $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = -4z|_M = 0$,
 $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -4y|_M = -4$.

$$\text{Отже, } \frac{\partial u}{\partial l} = -4 \cdot \frac{4}{5} + 0 - 4 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{28}{5} = -5\frac{3}{5}.$$

Так як $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, то задана функція у даному напрямку спадає.

Відповідь: $-5\frac{3}{5}$.

1.1.2 Градієнт функції

Означення. Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}$ або $\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$.

Очевидно, що $\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \bar{l}^\circ$.

Градiєнт функції вказує напрямом, у якому швидкість зміни функції найбільша.

Властивості:

- 1) $\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$;
- 2) $\text{grad}(c \cdot u) = c \cdot \text{grad } u$;
- 3) $\text{grad}(u \cdot v) = v \cdot \text{grad } u + u \cdot \text{grad } v$.

1.2 Оператор Гамільтона

Основними диференціальними операціями над скалярним полем u і векторним полем $\vec{F}$ є: $\text{grad } u$, $\text{div } \vec{F}$, $\text{rot } \vec{F}$ ($\text{div } \vec{F}$, $\text{rot } \vec{F}$ розглянемо дещо пізніше). Операції знаходження градієнта, дивергенції та ротора називають векторними операціями першого порядку (в них задіяні похідні перших порядків). Ці операції зручно записувати з допомогою оператора Гамільтона (символічного вектора «набла»):

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Він набуває певного змісту лише в комбінації з скалярними або векторними функціями. Символічне множення вектора $\vec{\nabla}$ на скаляр u або

вектор $\vec{F}$ виконується за правилами векторної алгебри, а „множення” символів $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ на величини u, P, Q, R розуміють як знаходження відповідної частинної похідної від цих величин.

$$\text{Наприклад, } \text{grad } u = \vec{\nabla} \cdot u, \text{ де } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

1.3 Векторне поле

Означення. Якщо з кожною точкою M області G пов'язана деяка векторна величина $\vec{F}$, то говорять, що задано векторне поле цієї величини.

Приклад. Поле швидкостей, поле електричної напруженості.

Якщо в просторі введена декартова система координат, то векторне поле задається векторною функцією

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k},$$

де $P(M) = P(x, y, z)$, $Q(M) = Q(x, y, z)$, $R(M) = R(x, y, z)$ – скалярні функції.

$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ – просторове векторне поле.

На площині векторне поле задається як $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ (плоске векторне поле).

Означення. Векторною лінією поля $\vec{F}(M)$ називається крива, у кожній точці якої її дотична збігається з напрямком вектора $\vec{F}(M)$.

Приклад. У полі швидкостей рідини, що розтікається, векторними лініями будуть лінії, по яких рухаються частинки рідини (лінії струму); для магнітного поля Землі векторними (силовими) лініями будуть лінії, які виходять із північного полюса та закінчуються у південному.

Сукупність усіх векторних ліній поля, які проходять через деяку замкнену криву, називається векторною трубкою.

Нехай векторне поле задається вектором $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, де $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – неперервні функції змінних x, y, z , які мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Векторні лінії поля $\vec{F}(x, y, z)$ знаходяться з системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \text{ – для просторового векторного поля,}$$

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} \text{ – для плоского поля, рівняння якого можна ще записати}$$

так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \rightarrow y' = f(x, y).$$

Ці рівняння виведені з умови колінеарності векторів $\vec{F}(P, Q, R)$ і $\vec{dr}(dx, dy, dz)$ (рисунок 1.4).

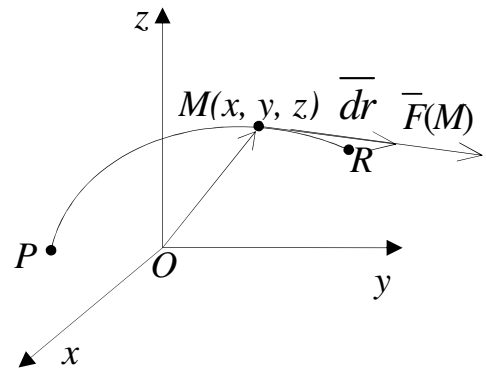


Рисунок 1.4

1.3.1 Інтеграл по області (другого роду)

У векторному полі будемо розглядати лише дві області: лінії і поверхні.

Означення. Лінія називається орієнтованою, якщо у кожній її точці задано напрям, що співпадає з напрямом дотичної до неї (рисунок 1.5).

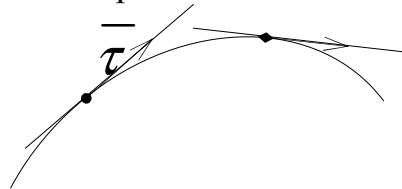


Рисунок 1.5

Означення. Поверхня вважається орієнтованою, якщо у кожній її точці задано напрям, що співпадає з напрямом нормалі до неї у цій точці (рисунок 1.6).

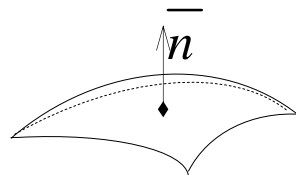


Рисунок 1.6

Орієнтовану область будемо позначати через G , а одиничний вектор, який задає напрям у довільній точці M будемо називати орієнтуючим вектором і позначати через $\vec{l}(M)$.

Нехай задано орієнтовану область G , орієнтуючий вектор $\vec{l}(M)$, і нехай у кожній точці цієї області визначена вектор-функція $\vec{F}(M)$. Розіб'ємо довільним чином область G на n частин: $G_1, \dots, G_n$ ($G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n = G$). Міри областей G_i позначимо через $\Delta\mu_i$ і через $\lambda = \max_i |\Delta\mu_i|$. Довільно, у кожній області G_i виберемо по точці M_i і обчислимо значення вектор-функції $\vec{F}(M_i)$. Проведемо в точці M_i вектор $\vec{\Delta\mu_i}$, напрям якого співпадає з напрямом

орієнтуючого вектора в точці M_i , а довжина дорівнює мірі області G_i , тобто $\overline{\Delta\mu_i} = \Delta\mu_i \cdot \bar{l}(M_i)$. Обчислимо скалярний добуток: $\overline{F(M_i)} \cdot \overline{\Delta\mu_i}$.

Розглянемо суму $\sum_{i=1}^n \overline{F(M_i)} \cdot \overline{\Delta\mu_i} = \sum_{i=1}^n (\overline{F(M_i)} \cdot \bar{l}(M_i)) \Delta\mu_i$. Ця сума називається інтегральною сумою для вектор-функції $\overline{F(M_i)}$ по орієнтованій області G .

Означення. Якщо при $\lambda = \max_i |\Delta\mu_i| \rightarrow 0$ інтегральна сума $\sum_{i=1}^n \overline{F(M_i)} \cdot \overline{\Delta\mu_i} = \sum_{i=1}^n (\overline{F(M_i)} \cdot \bar{l}(M_i)) \Delta\mu_i$ має границю, що не залежить ні від способу розбиття області G на частини, ні від вибору проміжних точок M_i , то вона називається інтегралом від вектор-функції $\overline{F(M_i)}$ по орієнтованій області G (інтегралом другого роду) і позначається

$$\int_G \overline{F(M)} \cdot d\overline{\mu} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \overline{F(M_i)} \cdot \overline{\Delta\mu_i}.$$

1.3.2 Криволінійний інтеграл другого роду

Означення. Якщо область G це крива L , а її орієнтуючий вектор у довільній точці M – $\bar{l}(M)$, то інтеграл виду

$$\int_L \overline{F} \cdot d\bar{l} = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

називається криволінійним інтегралом II-го роду по просторовій кривій L .

Задача (про обчислення роботи векторного поля).

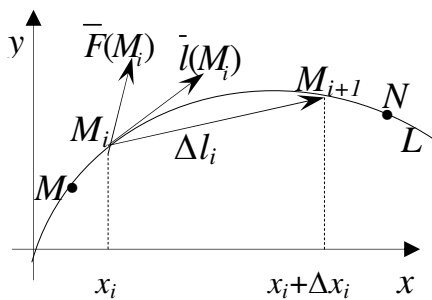


Рисунок 1.7

Нехай змінна сила $\overline{F(M)} = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j}$ рухає матеріальну точку вздовж кривої L із точки M в точку N (рисунок 1.7). Необхідно обчислити роботу цієї сили на даному шляху. Для цього розіб'ємо криву L на n частин точками $M = M_0, M_1, M_2, \dots,$

$M_n = N$, тоді $A_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \overline{F(M_i)} \cdot \Delta\bar{l}_i$, де

$$\Delta\bar{l}_i = \Delta x_i \bar{i} + \Delta y_i \bar{j}.$$

Робота дорівнює границі послідовності інтегральних сум при $\lambda = \max_i |\Delta l_i| \rightarrow 0$ і позначається через $A = \int_L \overline{F} \cdot d\bar{l}$, $d\bar{l} = dx\bar{i} + dy\bar{j}$, а це за означенням і є криволінійний інтеграл II-го роду.

Так як $A_n = \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i$, то $A = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ –

робота векторного поля $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$ по дузі $\overline{MN}$.

Якщо поле просторове $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$, тоді роботу можна обчислити за формулою:

$$A = \int_L P(M) dx + Q(M) dy + R(M) dz.$$

Зауваження 1. Якщо крива L замкнена, то вона називається замкненим контуром. Інтеграл при цьому називають циркуляцією вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру L і позначають $\oint_L \vec{F}(M) \cdot d\vec{l}$.

Зауваження 2. Криволінійний інтеграл другого роду залежить від напрямку обходу кривої, отже, $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{l}$.

Для замкнутого контура L додатнім напрямом обходу вважається обхід контура проти годинникової стрілки.

1.3.3 Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Нехай крива L задана у просторі параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, тоді

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_{AB} P(M) dx + Q(M) dy + R(M) dz = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) dt + \\ &\quad + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) dt. \end{aligned}$$

Приклад. Обчислити $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, де L – трикутник ABC з вершинами

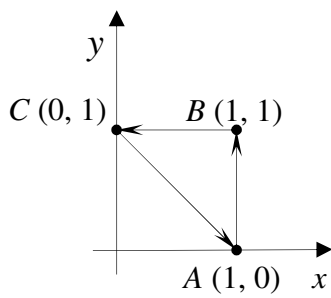
$A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$.

Розв'язання.

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{AB} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \int_{BC} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \int_{CA} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Запишемо рівняння прямих AB , BC , CA (рисунок 1.8) у параметричній формі:

$$\begin{aligned} AB: & \begin{cases} x = 1, & 0 \leq t \leq 1; \\ y = t; \end{cases} \\ BC: & \begin{cases} x = -t, & -1 \leq t \leq 0; \\ y = 1; \end{cases} \\ CA: & \begin{cases} x = t, & 0 \leq t \leq 1. \\ y = 1 - t; \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Тоді } \int_{AB} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} &= \left[AB: \begin{cases} x=1, \\ y=t, \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \right] = \int_0^1 \frac{t \cdot 0 \cdot dt - 1 \cdot dt}{1+t^2} = \\ &= - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\arctg t \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}; \end{aligned}$$

Рисунок 1.8

$$\int_{BC} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \left[BC: \begin{cases} x=-t, \\ y=1, \\ -1 \leq t \leq 0 \end{cases} \right] = \int_{-1}^0 \frac{1 \cdot (-dt) + t \cdot 0 \cdot dt}{t^2 + 1} = - \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2 + 1} = -\arctg t \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4};$$

$$\begin{aligned} \int_{CA} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} &= \left[CA: \begin{cases} x=t, \\ y=1-t, \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \right] = \int_0^1 \frac{(1-t) \cdot dt - t \cdot (-dt)}{t^2 + 1 - 2t + t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t + \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \arctg 2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Відповідь: 0.

1.3.4 Обчислення площ плоских фігур за допомогою криволінійного інтеграла другого роду

Нехай задано правильну область D , таку, що $D: \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x). \end{cases}$

(рисунок 1.9а) або $D: \begin{cases} c \leq y \leq d, \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y). \end{cases}$ (рисунок 1.9б).

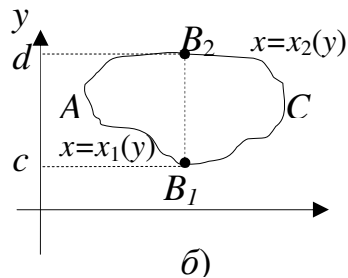
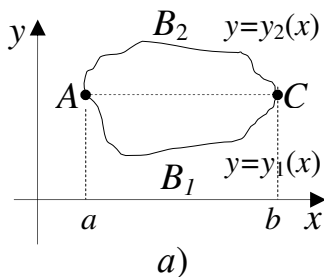


Рисунок 1.9

Тоді

$$\begin{aligned} S_D &= \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx = \int_{AB_2C} y dx - \int_{AB_1C} y dx = \\ &= - \int_{AB_1C} y dx - \int_{CB_2A} y dx = - \oint_L y dx. \end{aligned}$$

Отже,

$$S_D = - \oint_L y dx. \quad (2)$$

Аналогічно (рисунок 1.9б),

$$\begin{aligned} S_D &= \int_c^d (x_2(y) - x_1(y)) dy = \int_c^d x_2(y) dy - \int_c^d x_1(y) dy = \int_{B_1CB_2} x dy + \int_{B_2AB_1} x dy = \oint_L x dy = \oint_L x dy. \\ S_D &= \oint_L x dy. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Додавши (2) і (3), матимемо: } S_D = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (4)$$

Приклад. Обчислити площу еліпса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язування.

Запишемо рівняння еліпса в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Використовуючи формулу (4), обчислимо площу еліпса:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t dt + b \sin t \cdot a \sin t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Відповідь: πab .

1.3.5 Зв'язок криволінійного інтеграла другого роду з подвійним інтегралом (формула Гріна)

Якщо $\vec{F}$ плоске векторне поле й функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ – неперервні в області D та на її границі L , то має місце формула Гріна:

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

де обхід контура L виконується у додатньому напрямку.

Доведення.

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx =$$

$$= \int_{AB_2C} P(x, y) dx - \int_{AB_1C} P(x, y) dx = - \int_{CB_2A} P(x, y) dx - \int_{AB_1C} P(x, y) dx = - \oint_L P(x, y) dx. \quad (5)$$

Аналогічно, змінюючи порядок інтегрування, отримаємо:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d Q(x, y) \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy = \int_c^d Q(x_2(y), y) dy - \int_c^d Q(x_1(y), y) dy = \\ &= \int_{B_1CB_2} Q(x, y) dy - \int_{B_1AB_2} Q(x, y) dy = \int_{B_1CB_2} Q(x, y) dy + \int_{B_2AB_1} Q(x, y) dy = \oint_L Q(x, y) dy. \quad (6) \end{aligned}$$

Додавши (5) і (6), одержимо формулу Гріна.

1.3.6 Поверхневий інтеграл другого роду.

Потік векторного поля

Розглянемо інтеграл по орієнтованій області $\int_G \vec{F} \cdot \vec{d\mu}$ у випадку, коли область G – гладка двостороння поверхня σ (рисунок 1.10).

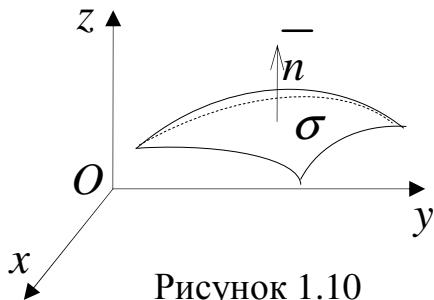


Рисунок 1.10

Означення. Поверхня σ називається гладкою, якщо в кожній її точці можна провести дотичну площину.

Означення. Поверхня σ називається двосторонньою, якщо нормаль до поверхні при обході по довільному замкненому контуру повертається у вихідне положення.

Передбачається, що у кожній точці поверхні σ задано векторне поле $\vec{F}(M)$.

Нехай область інтегрування вектор-функції $\vec{F}(M)$ є двосторонньою поверхнею σ , орієнтуючий вектор якої – це одиничний вектор $\vec{n}(M)$ до поверхні σ у точці M , напрям якого визначає одну із сторін поверхні.

Означення. Інтеграл по такій орієнтованій поверхні називається поверхневим інтегралом другого роду і позначається

$$\int_{\sigma} \vec{F}(M) \cdot \vec{d\sigma},$$

де $\vec{d\sigma} = \vec{n}(M) d\sigma$ – вектор, довжина якого дорівнює площі $d\sigma$ елемента поверхні σ , а напрям співпадає з напрямом нормалі до цієї поверхні в точці M .

Отже,

$$\int_{\sigma} \vec{F}(M) \cdot \vec{d\sigma} = \int_{\sigma} \vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma.$$

Означення. Поток вектора швидкості через поверхню σ називається кількістю рідини, що проходить через цю поверхню за одиницю часу.

Задача (про потік вектора через поверхню).

Розглянемо поле швидкостей $\vec{v}(M)$ рідини в просторі (рідина не стискається).

Обчислимо потік вектора $\bar{v}(M)$. Для цього розіб'ємо поверхню σ на n елементарних ділянок σ_i , площі яких позначимо через $\Delta\sigma_i$. На кожній виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Вектор $\bar{n}_i$ – одиничний вектор нормалі до ділянки σ_i .

Кількість рідини, що пройшла через σ_i за одиницю часу приблизно дорівнює об'єму циліндра (циліндричного стовпчика), висота якого дорівнює

$$h_i = n p_{\bar{n}_i} \bar{v}_i = |\bar{v}_i| \cos(\bar{n}_i, \bar{v}_i) = \bar{v}_i \bar{n}_i.$$

Потік вектора $\bar{v}_i$ через σ_i дорівнює: $\Pi_i \approx h_i \Delta\sigma_i = \bar{v}_i \bar{n}_i \Delta\sigma_i = \bar{v}_i \Delta\sigma_i$.

Вектор $\Delta\sigma_i$ направлений за нормаллю, довжина його дорівнює площі ділянки поверхні.

Тому потік вектора $\bar{v}$ через поверхню σ приблизно дорівнює:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \approx \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \bar{n}_i \Delta\sigma_i.$$

Означення. Границя цієї суми при $n \rightarrow \infty$, при умові, що $\lambda \rightarrow 0$ (λ – максимальний діаметр ділянок) називається потоком векторного поля $\bar{v}(M)$ через поверхню σ і позначається:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{v}(M) \cdot \bar{n} d\sigma = \iint_{\sigma} \bar{v}(M) \cdot \bar{d}\sigma.$$

Інтеграл справа за означенням є поверхневим інтегралом другого роду.

Таким чином, фізичний зміст поверхневого інтеграла по поверхні σ – це потік векторного поля $\bar{F}(M)$ через дану поверхню.

Поверхневий інтеграл має наступну властивість:

$$\Pi = \iint_{\sigma^+} \bar{F}(M) \cdot \bar{n}(M) d\sigma = - \iint_{\sigma^-} \bar{F}(M) \cdot \bar{n}(M) d\sigma,$$

де σ^+ , σ^- – різні сторони поверхні σ .

Зведемо обчислення поверхневого інтеграла другого роду до обчислення звичайного інтеграла. Для цього виразимо одиничний вектор нормалі до поверхні $\bar{n}$ через його напрямні косинуси:

$$\bar{n} = \cos(\bar{n}, \bar{i}) \bar{i} + \cos(\bar{n}, \bar{j}) \bar{j} + \cos(\bar{n}, \bar{k}) \bar{k}.$$

Позначимо $\alpha = (\bar{n}, \bar{i})$, $\beta = (\bar{n}, \bar{j})$, $\gamma = (\bar{n}, \bar{k})$, тоді одиничний вектор можна записати так:

$$\bar{n} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

Якщо рівняння поверхні σ задано формулою $z = g(x, y)$, то $u = g(x, y) - z = 0$ є її поверхнею рівня при $c = 0$. Вектор $\text{grad} u$ буде перпендикулярним до цієї поверхні. Так як $\text{grad} u = \{g'_x, g'_y, -1\}$, то

$$\begin{aligned} \overline{N} &= \{g'_x, g'_y, -1\}, \quad \overline{n} = \frac{\overline{N}}{|\overline{N}|}, \quad |\overline{N}| = \sqrt{1 + g'^2_x + g'^2_y}, \quad \overline{n} = \left\{ \frac{g'_x}{|\overline{N}|}, \frac{g'_y}{|\overline{N}|}, \frac{-1}{|\overline{N}|} \right\} \quad \text{або} \\ \overline{n} &= \left\{ \frac{-g'_x}{|\overline{N}|}, \frac{-g'_y}{|\overline{N}|}, \frac{1}{|\overline{N}|} \right\}. \end{aligned}$$

Додатнім напрямом вектора $\overline{n}$ вважається напрям, при якому кут між векторами $\overline{n}, \overline{k}$ – гострий, тобто $\cos \gamma > 0$.

Позначимо через $D_{x,y}$ проекцію σ на xOy , аналогічно $D_{x,z}$, $D_{y,z}$ – проекції σ на xOz і yOz , а їх міри відповідно: $\Delta S_{x,y}$, $\Delta S_{x,z}$, $\Delta S_{y,z}$.

Тоді,

$$\begin{aligned} \Delta S_{x,y} &= \Delta \sigma |\cos \gamma| = \Delta \sigma \left| \cos(\overline{n}, z) \right|, \\ \Delta S_{x,z} &= \Delta \sigma |\cos \beta| = \Delta \sigma \left| \cos(\overline{n}, y) \right|, \\ \Delta S_{y,z} &= \Delta \sigma |\cos \alpha| = \Delta \sigma \left| \cos(\overline{n}, x) \right|. \end{aligned}$$

Так як, $\Delta S_{x,y} \Rightarrow dx dy$, при $\Delta \sigma \rightarrow d\sigma$, то

$$d\sigma = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|},$$

аналогічно

$$d\sigma = \frac{dx dz}{|\cos \beta|} \text{ і } d\sigma = \frac{dy dz}{|\cos \alpha|}.$$

$$\begin{aligned} \text{Звідси, } \Pi &= \iint_{\sigma} \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma = \iint_{\sigma} [P(M) dydz + Q(M) dx dz + R(M) dx dy] = \\ &= \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) \text{sign}(\cos \alpha) dydz + \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) \text{sign}(\cos \beta) dx dz + \\ &+ \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \text{sign}(\cos \gamma) dx dy. \end{aligned}$$

Означення. Під потоком вектора через замкнену поверхню розуміють різницю вихідного й вхідного потоків (наприклад, рідини).

$$\text{Тобто, } \Pi = \Pi_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}} - \Pi_{\hat{a}\hat{o}\hat{o}}, \quad \Pi = \iiint_{\sigma} \overline{F}(M) \cdot \overline{n}(M) d\sigma.$$

Якщо $\Pi = 0$ через замкнену поверхню, то говорять, що всередині поверхні, обмеженої σ , немає джерел.

Якщо $\Pi > 0$ через замкнену поверхню, то говорять, що всередині існують позитивні джерела векторного поля.

Якщо $\Pi < 0$, то всередині існують стоки, тобто негативні джерела.

Методи обчислення потоку векторного поля

1 Метод проектування на одну із координатних площин. Нехай незамкнена поверхня σ проектується взаємно однозначно на площину xOy в область D_{xy} . У такому випадку поверхню σ можна задати рівнянням $z = g(x, y)$, і так як елемент площі $d\sigma$ цієї поверхні дорівнює

$$d\sigma = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|},$$

то обчислення потоку векторного поля $\vec{F}$ зводиться до обчислення подвійного інтеграла за формулою

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right|_{z=g(x,y)} dx dy. \quad (7)$$

Орт нормалі $\vec{n}$ до вибраної сторони поверхні σ знаходимо за формулою

$$\vec{n} = \pm \frac{-g'_x \vec{i} - g'_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y + 1}}, \quad (8)$$

а $\cos \gamma$ дорівнює коефіцієнту при орті $\vec{k}$ в формулі (8):

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y + 1}}. \quad (9)$$

Якщо кут γ між віссю Oz і нормаллю $\vec{n}$ гострий, то у формулах (8) і (9) необхідно брати знак „+”, якщо ж кут тупий – то „-”.

Якщо поверхню σ зручніше спроектувати на координатні площини yOz або xOz , то формули (7), (8), (9) у такому випадку, матимуть вигляд:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \alpha|} \right|_{x=\varphi(y,z)} dy dz$$

або

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \beta|} \right|_{y=\psi(x,z)} dx dz,$$

де вектори нормалі відповідно:

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{i} - \varphi'_y \vec{j} - \varphi'_z \vec{k}}{\sqrt{1 + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z}}$$

або

$$\vec{n} = \pm \frac{-\psi'_x \vec{i} + \vec{j} - \psi'_z \vec{k}}{\sqrt{\psi'^2_x + 1 + \psi'^2_z}},$$

та напрямні косинуси:

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \phi_y'^2 + \phi_z'^2}},$$

$$\cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{\psi_x'^2 + 1 + \psi_z'^2}}.$$

Зауваження. У випадку, коли поверхня σ задана неявно рівнянням $\Phi(x, y, z) = 0$, одиничний вектор нормалі знаходиться за формулою:

$$\vec{n} = \pm \frac{\Phi_x' \vec{i} + \Phi_y' \vec{j} + \Phi_z' \vec{k}}{\sqrt{\Phi_x'^2 + \Phi_y'^2 + \Phi_z'^2}}.$$

Приклад 1. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (x - 3z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ через верхню сторону трикутника ABC з вершинами у точках $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$.

Розв'язання. Рівняння площини трикутника ABC має вигляд: $2x + 2y + z = 2$, звідси $z = 2 - 2x - 2y$. Трикутник ABC проектується взаємно однозначно на площину xOy в область D_{xy} , якою є трикутник OAB (рисунк 1.11).

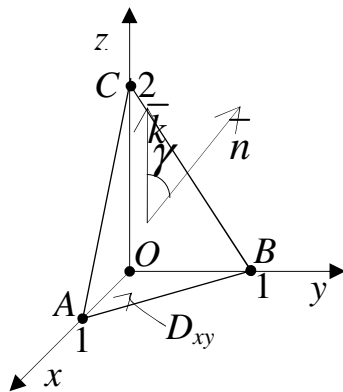


Рисунок 1.11

Кут γ гострий, тому в формулах (8) і (9) будемо брати знак „+”, отримаємо:

$$\vec{n} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} \text{ та } \cos \gamma = \frac{1}{3}.$$

Знайдемо скалярний добуток

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{n} &= (x - 3z)\frac{2}{3} + (x + 3y + z)\frac{2}{3} + (5x + y)\frac{1}{3} = \\ &= \frac{9x + 7y - 4z}{3}. \end{aligned}$$

Підставимо отримані результати у формулу (7) й обчислимо потік:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\cos \gamma|} \right|_{z=g(x,y)} dx dy = \iint_{D_{xy}} (9x + 7y - 4z) \Big|_{z=2-2x-2y} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (17x + 15y - 8) dy = \\ &= \int_0^1 \left(17x(1-x) + \frac{15}{2}(1-x)^2 - 8(1-x) \right) dx = -\frac{19}{6} + 5 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $1\frac{1}{3}$.

2 Метод проектування на три координатні площини. Нехай поверхня σ взаємно однозначно проектується на три координатні площини. Позначимо через D_{xy} , D_{xz} , D_{yz} проекції σ відповідно на площини xOy , xOz , yOz .

Нехай рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$ поверхні σ розв'язується відносно кожної змінної $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$. Тоді потік векторного поля $\overline{F}$ обчислюється за формулою

$$\Pi = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (10)$$

Знак перед кожним інтегралом залежить від знака відповідного напрямного косинуса вектора нормалі (значення косинуса гострого кута додатне, значення тупого – від'ємне).

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\overline{F} = \{xy, yz, xz\}$ через частину зовнішньої сторони сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщеної в першому октанті.

Розв'язання. Так як частина поверхні знаходиться у першому октанті (кути між вектором нормалі і координатними осями гострі), то у формулі (10) перед кожним інтегралом слід брати знак „+”. Враховуючи, що $P = xy$, $Q = yz$, $R = xz$, і з рівнянь сфери

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}, \quad x = \sqrt{1 - z^2 - y^2},$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{D_{yz}} xy dydz + \iint_{D_{xz}} yz dx dz + \iint_{D_{xy}} xz dx dy = \\ &= \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 - z^2 - y^2} y dydz + \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 - z^2 - x^2} z dx dz + \iint_{D_{xy}} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Перейдемо до полярних координат і обчислимо третій інтеграл, що знаходиться у правій частині останньої рівності (перший і другий обчислюються аналогічно).

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy &= \left[\begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ y = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \end{array} \right] = \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \cos \varphi d\varphi d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho = \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho = \left[\begin{array}{l} \rho = \sin t, \\ d\rho = \cos t dt \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

$$\text{Шуканий потік дорівнює } \Pi = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{3\pi}{16}.$$

1.3.7 Дивергенція векторного поля

Означення. Дивергенція векторного поля $\vec{F}$ в точці M позначається символом $\operatorname{div} \vec{F}(M)$ й означається як:

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (V \rightarrow M)}} \frac{\iint_{\sigma} \vec{F}(M) \cdot \vec{n} d\sigma}{V},$$

тобто, дивергенцією векторного поля називається границя відношення потоку векторного поля через замкнену поверхню σ до об'єму V , обмеженого цією поверхнею, за умови, що область стягується до точки M (λ – її діаметр).

Дивергенція характеризує густину потужності джерел векторного поля. Ця скалярна величина обчислюється за формулою

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F},$$

або

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

Властивості:

1) $\operatorname{div} \vec{c} = 0$, $\vec{c}$ – постійний вектор;

2) $\operatorname{div}(\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2) = \alpha \operatorname{div} \vec{F}_1 + \beta \operatorname{div} \vec{F}_2$, $\alpha, \beta - \text{const}$;

3) $\operatorname{div}(\varphi(M) \cdot \vec{F}(M)) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{F} + \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{F}$, так як

$$(\varphi \cdot P)'_x + (\varphi \cdot Q)'_y + (\varphi \cdot R)'_z = \varphi'_x \cdot P + \varphi \cdot P'_x + \varphi'_y \cdot Q + \varphi \cdot Q'_y + \varphi'_z \cdot R + \varphi \cdot R'_z;$$

4) $\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{c}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{c}$;

5) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, де Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\Delta u = 0 - \text{рівняння Лапласа}).$$

1.3.8 Формула Остроградського-Гауса

Теорема Остроградського-Гауса. Нехай векторне поле $\vec{F}(M)$ має неперервні частинні похідні P'_x, Q'_y, R'_z в деякій області V і на її границі, та нехай замкнена поверхня σ обмежує деяку область V . Тоді

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}(M) dv,$$

тобто, потік вектора $\vec{F}$ через замкнену поверхню σ дорівнює потрійному інтегралу по області V від дивергенції цього вектора.

У координатній формі:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\sigma} (P dydz + Q dx dz + R dx dy). \quad (11)$$

Доведення. Нехай область D є проекцією поверхні σ на площину xOy , а $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$ – рівняння відповідних частин поверхні σ (нижньої частини σ_1 і верхньої – σ_2), причому z_1, z_2 – неперервні в D .

Позначимо $P = F_x, Q = F_y, R = F_z$.

Розглянемо

$$I = \iiint_V \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial F_z}{\partial z} dz.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$I = \iint_D [F_z(x, y, z_2(x, y)) - F_z(x, y, z_1(x, y))] dx dy.$$

Виразимо подвійний інтеграл через поверхневий інтеграл II-го роду (коли довільним точкам $M(x, y)$ області D відповідають точки (x, y, z) , що описують поверхню σ як точки входу і виходу через поверхню)

$$I = \iint_{\sigma_2^+} F_z(x, y, z) dx dy - \iint_{\sigma_1^-} F_z(x, y, z) dx dy.$$

Замінюючи, у другому інтегралі внутрішню сторону поверхні на зовнішню, отримаємо:

$$I = \iint_{\sigma_2^+} F_z(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_1^+} F_z(x, y, z) dx dy = \iiint_{\sigma^+} F_z(x, y, z) dx dy.$$

А отже,
$$I = \iiint_V \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz = \iiint_{\sigma^+} F_z(x, y, z) dx dy.$$

Аналогічно доводимо, що

$$\iiint_V \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy dz = \iiint_{\sigma^+} F_x(x, y, z) dy dz, \quad \iiint_V \frac{\partial F_y}{\partial y} dx dy dz = \iiint_{\sigma^+} F_y(x, y, z) dx dz.$$

Сумуючи почленно ці рівності, одержимо:

$$\iiint_V \operatorname{div} \overline{F}(M) dv = \iiint_{\sigma^+} F_x dy dz + \iiint_{\sigma^+} F_y dx dz + \iiint_{\sigma^+} F_z dx dy = \iiint_{\sigma} \overline{F} \cdot \overline{d\sigma}$$

Приклад. Знайти потік векторного поля $\overline{F} = \{x - 3z, x + 3y + z, 5x + y\}$ через зовнішню поверхню піраміди $CAOB$ з вершинами у точках $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$.

Розв'язання. Так як $P = x - 3z, Q = x + 3y + z, R = 5x + y$, то, використовуючи формулу (11), отримаємо

$$\Pi = \iiint_V (1 + 3 + 0) dv = 4 \iiint_V dv = 4V_{CAOB} = 1 \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $1 \frac{1}{3}$.

1.3.9 Ротор (вихор) векторного поля

Означення. Ротором векторного поля $\overline{F}(M)$ називається вектор $\text{rot } \overline{F}(M)$, який означається наступним чином:

$$\text{rot } \overline{F}(M) = \overline{\nabla} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

тобто

$$\text{rot } \overline{F}(M) = \{R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y\}.$$

Напрямок ротора – це напрям, навколо якого циркуляція має найбільше значення порівняно з циркуляцією навколо будь-якого напрямку, що не співпадає з нормаллю до плоскої області, обмеженої замкненим контуром.

Властивості:

- 1) $\text{rot } \overline{c} = 0$;
- 2) $\text{rot}(\alpha \overline{F}_1 + \beta \overline{F}_2) = \alpha \text{rot } \overline{F}_1 + \beta \text{rot } \overline{F}_2$;
- 3) $\text{rot}(\varphi(M) \cdot \overline{F}(M)) = \text{grad } \varphi \times \overline{F} + \varphi \cdot \text{rot } \overline{F}$;
- 4) $\text{rot}(\varphi(M) \cdot \overline{c}) = \text{grad } \varphi \times \overline{c}$;
- 5) $\text{rot}(\text{grad } \varphi) = 0$;
- 6) $\text{div}(\text{rot } \overline{F}) = 0$.

1.3.10 Формула Стокса

Теорема Стокса. Циркуляція векторного поля $\overline{F}(M)$ по замкнутому контуру L дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню σ , натягнуту на контур L , тобто

$$\oint_L \overline{F}(M) \cdot d\overline{l} = \iint_{\sigma} \text{rot } \overline{F}(M) \cdot \overline{n}(M) d\sigma = \iint_{\sigma} \text{rot } \overline{F} \cdot d\overline{\sigma}.$$

В координатній формі

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dx dz + (Q'_x - P'_y) dx dy.$$

Обхід по контуру L вибирається так, що якщо дивитись з кінця вектора нормалі на рух по контуру L , то напрям руху має бути протилежним напрямку руху годинникової стрілки.

Розглянемо окремий випадок формули Стокса, коли векторне поле є плоским, тоді $R \equiv 0$, $z = 0$, $\overline{F}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j}$, а формула Стокса матиме вигляд:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy,$$

тобто одержимо формулу Гріна.

Фізичним змістом формули Стокса є твердження, що потік векторного поля $\vec{F}$ дорівнює кількості рідини, що витікає (стікаючої) через поверхню σ за одиницю часу

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

1.3.11 Властивості векторних полів

1 Соленоїдальне векторне поле.

Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ називається соленоїдальним в області V , якщо $\text{div } \vec{F}(M) \equiv 0$ в кожній точці M цієї області V .

Тоді з формули Остроградського-Гаусса: $\Pi = \iiint_{V'} \text{div } \vec{F} dv \equiv 0$, тобто потік соленоїдального векторного поля через будь-яку замкнену поверхню σ' , яка обмежує область $V' \subset V$, дорівнює нулю.

2 Безвихрове векторне поле.

Векторне поле $\vec{F}(M)$ називається безвихровим в деякій області V , якщо в кожній її точці $\text{rot } \vec{F}(M) = 0$. Тоді з формули Стокса, $\mathcal{C} = 0$ по будь-якому замкнутому контуру L , що повністю належить області V .

3 Потенціальне векторне поле.

Векторне поле називається потенціальним в деякій області V , якщо існує скалярна функція $u(M)$ або $u(x, y, z)$ така, що $\vec{F}(M) = \text{grad } u(M) = \vec{\nabla} \cdot u$, $M \in V$.

Функція $u(M)$ називається потенціалом векторного поля.

Теорема 1. Для того, щоб векторне поле було потенціальним в деякій області V необхідно й достатньо, щоб його $\text{rot } \vec{F}(M) = 0$, $M \in V$.

Доведення.

Необхідність. Дано $\vec{F}(M)$ потенціальне поле в області V . Тоді

$$\vec{F}(M) = \text{grad } u(M) = \vec{\nabla} \cdot u, \text{rot } \vec{F}(M) = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

Отже, $\text{rot } \vec{F}(M) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot u) = 0$ (так як $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot u$ – колінеарні вектори).

Достатність. Дано $\text{rot } \vec{F}(M) = 0$ в області V , тобто $\vec{F}(M)$ – безвихрове поле.

$$\text{rot } \vec{F}(M) = \{R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y\} = 0, \text{ якщо } R'_y = Q'_z; P'_z = R'_x; Q'_x = P'_y.$$

Розглянемо наступну функцію:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz.$$

Безпосередньо обчислюючи, отримуємо:

$$u'_x = P(x, y, z);$$

$$u'_y = \int_{x_0}^x P'_y dx + Q(x_0, y, z) + 0 = \int_{x_0}^x Q'_x dx + Q = Q, \text{ так як } P'_y = Q'_x;$$

$$\begin{aligned} u'_z &= \int_{x_0}^x P'_z dx + \int_{y_0}^y Q'_z dy + R(x_0, y_0, z) = \int_{x_0}^x R'_x dx + \int_{y_0}^y R'_y(x_0, y, z) dy + R(x_0, y_0, z) = \\ &= R(x, y, z) - R(x_0, y, z) + R(x_0, y, z) - R(x_0, y_0, z) + R(x_0, y_0, z) = R, \end{aligned}$$

так як $P'_z = R'_x$ і $Q'_z = R'_y$.

Тобто,

$$\text{grad} u(M) = \overline{F}(M).$$

Теорема 2. Якщо поле $\overline{F}(M)$ безвихрове в області V , то криволінійний інтеграл $\int_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{l}$ (другого роду) не залежить від шляху інтегрування в області V .

Доведення.

$\overline{F}(M)$ безвихрове, тому $\text{rot } \overline{F}(M) = 0, M \in V$. Тоді згідно формули Стокса: $\oint_L \overline{F} \cdot d\overline{l} = 0$.

$$\text{Розглянемо } \oint_L \overline{F} \cdot d\overline{l} = \int_{AMB} \overline{F} \cdot d\overline{l} + \int_{BNA} \overline{F} \cdot d\overline{l} = \int_{AMB} \overline{F} \cdot d\overline{l} - \int_{ANB} \overline{F} \cdot d\overline{l} = 0,$$

$$\text{тобто, } \int_{AMB} \overline{F} \cdot d\overline{l} = \int_{ANB} \overline{F} \cdot d\overline{l}.$$

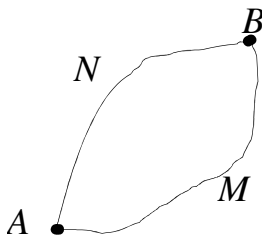


Рисунок 1.12

З теореми випливає, що для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду не залежав від шляху інтегрування необхідно й достатньо, щоб поле було потенціальним.

Адже, якщо векторне поле $\overline{F}(M)$ потенціальне

$$\text{в області } V, \text{ то } \oint_L \overline{F} \cdot d\overline{l} = \iint_{\sigma} \text{rot } \overline{F} \cdot d\overline{\sigma} = \left[\begin{array}{l} \text{rot } \overline{F} \equiv 0 \text{ в } V \\ \text{в } V \end{array} \right] = 0.$$

1.3.12 Робота в потенціальному полі

Фізичним змістом криволінійного інтеграла другого роду є робота, тому, якщо векторне поле $\overline{F}(M)$ потенціальне в області V , то

$$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \left[P = u'_x, Q = u'_y, R = u'_z \right] = \\ = \int_L u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = \int_L du = u(B) - u(A), \text{ де } AB = L \text{ (незамкнена крива).}$$

Тобто, робота вектора $\vec{F}(M)$ в потенціальному полі дорівнює різниці потенціалів у кінцевій і початковій точках.

1.3.13 Теорема Гельмгольца

Теорема. Будь-яке векторне поле $\vec{F}(M)$ можна представити у вигляді суми двох полів, одне з яких є потенціальним, а інше соленоїдальним.

Доведення. Нехай $\vec{F}(M)$ – довільне векторне поле. Тоді $\text{div } \vec{F}(M) = f(M)$ – скалярна функція. Знайдемо потенціальне поле $\vec{F}_1(M) = \text{grad } u(M)$, потенціал u якого є розв'язанням неоднорідного рівняння Лапласа: $\Delta u = f(M)$.

$$\text{Тобто, } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(M) \text{ або } \Delta u = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u.$$

Покажемо, що векторне поле $\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1$ є соленоїдальним. Для цього знайдемо його дивергенцію:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F}_2 &= \text{div } \vec{F} - \text{div } \vec{F}_1 = f(M) - \text{div } (\vec{\nabla} u) = f(M) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = \\ &= f(M) - \Delta u = f(M) - f(M) \equiv 0, \end{aligned}$$

тому $\vec{F}_2$ – соленоїдальне поле.

$$\text{Отже, } \vec{F}(M) = \vec{F}_1(M) + \vec{F}_2(M).$$

1.4 Завдання для самостійної роботи

1.4.1 Дано скалярне поле $u(x, y, z)$, вектор $\vec{l}$ і точка M . Знайти:

- 1) похідну поля $u(x, y, z)$ в точці M за напрямом вектора $\vec{l}$;
- 2) градієнт поля $u(x, y, z)$ в точці M ;
- 3) найбільшу швидкість зростання поля $u(x, y, z)$ в точці M .

- 1.01. $u = x^2 - y^2 + z^3$, $\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $M(1; 2; -1)$.
- 1.02. $u = xy + yz - xz$, $\vec{l} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M(0; 1; -1)$.
- 1.03. $u = x^2y + y^2z + xz^2$, $\vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$, $M(1; 0; 2)$.
- 1.04. $u = xz + y^2x - yz^2$, $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $M(2; 1; 0)$.
- 1.05. $u = xyz^2 + zy$, $\vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $M(-1; 0; 2)$.
- 1.06. $u = 3x^2 + 2y^2 - 4zx$, $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$, $M(2; 1; -1)$.

- 1.07. $u = 2x^3 + xy^2 + 3z^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $M(2;2;0)$.
- 1.08. $u = x^2y^2z^2$, $\bar{l} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $M(1;2;3)$.
- 1.09. $u = xyz - y^2z^3$, $\bar{l} = 4\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$, $M(2;0;1)$.
- 1.10. $u = x^2yz + y^2 + xyz^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(1;-1;0)$.
- 1.11. $u = xy^2z^3$, $\bar{l} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(0;1;2)$.
- 1.12. $u = 2xy + 3yz^3$, $\bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \sqrt{8}\bar{k}$, $M(-1;2;1)$.
- 1.13. $u = 3xy + 2yz^3$, $\bar{l} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $M(2;0;2)$.
- 1.14. $u = 3x^2 + 2y^2 - 4z^2$, $\bar{l} = 4\bar{j} - 3\bar{k}$, $M(1;1;0)$.
- 1.15. $u = 2xz + 3xy + 4yz$, $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{2}\bar{k}$, $M(1;2;-2)$.
- 1.16. $u = 3x^2 + yz - xz^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(0;-1;2)$.
- 1.17. $u = 3xy^2 + 2yz^3$, $\bar{l} = 4\bar{i} - 3\bar{k}$, $M(2;0;1)$.
- 1.18. $u = 2xy - 3yz^3$, $\bar{l} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $M(1;1;0)$.
- 1.19. $u = x^2y + xy^2 - yz^2$, $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{7}\bar{k}$, $M(1;-1;1)$.
- 1.20. $u = 2xyz^2 - 3xzy^2$, $\bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $M(2;1;-1)$.
- 1.21. $u = xy^2z + x^2z^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(0;-1;3)$.
- 1.22. $u = 4xz + 3yz^2$, $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{7}\bar{k}$, $M(1;0;-3)$.
- 1.23. $u = x^3y^2 + yz^2$, $\bar{l} = -\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k}$, $M(2;1;-3)$.
- 1.24. $u = 4xz + 3yz^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $M(3;0;1)$.
- 1.25. $u = 2xy - 3yz + 4xz$, $\bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $M(1;3;-1)$.
- 1.26. $u = xy^2z + 2x^2z^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $M(1;3;-2)$.
- 1.27. $u = 2xyz + 3x^2z^2$, $\bar{l} = 4\bar{i} + 3\bar{k}$, $M(2;-3;-1)$.
- 1.28. $u = 3xy^2 + 4yz^2$, $\bar{l} = -3\bar{i} - 4\bar{k}$, $M(-2;0;3)$.
- 1.29. $u = 2xy - 3yz^3$, $\bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(-1;0;1)$.
- 1.30. $u = 3xy + yz^3$, $\bar{l} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $M(2;0;2)$.

1.4.2 Дано векторне поле $\bar{F}(x, y, z)$ та замкнена поверхня $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Знайти:

- 1) потік векторного поля $\bar{F}$ через поверхню σ за означенням та за формулою Остроградського-Гауса;
 - 2) циркуляцію поля $\bar{F}$ по замкнутому контуру $L = \sigma_1 \cap \sigma_2$ за означенням та за теоремою Стокса.
- 2.01. $\bar{F} = (x - y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (y - z)\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 - y^2 - z^2 = 1$; $\sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ($z > 0$).
- 2.02. $\bar{F} = (x - y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} - 2x\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $\sigma_2: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 2.03. $\bar{F} = yz\bar{i} + x\bar{j} - y\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 = z^2$; $\sigma_2: z = 1$ ($0 \leq z \leq 1$).

- 2.04. $\bar{F} = (x - y)\bar{i} + (y - z)\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 - y^2 - z^2 = 1$; $\sigma_2: x = \sqrt{5}$.
- 2.05. $\bar{F} = (2x - y)\bar{i} + (3x + y)\bar{j} + z\bar{k}$; $\sigma_1: y = x^2 + z^2$; $\sigma_2: y = 1$.
- 2.06. $\bar{F} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $\sigma_2: 3z = x^2 + y^2$.
- 2.07. $\bar{F} = -y\bar{i} + x\bar{j} + z\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 = z^2$; $\sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = 2 \ (z > 0)$.
- 2.08. $\bar{F} = x\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 = z$; $\sigma_2: z = 3 + 2y \ (z \geq 0)$.
- 2.09. $\bar{F} = (x + z)\bar{i} + y\bar{j}$; $\sigma_1: z = 8 - x^2 - y^2$; $\sigma_2: z = x^2 + y^2$.
- 2.10. $\bar{F} = (x - y)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + 2y\bar{k}$; $\sigma_1: x = y^2 + z^2$; $\sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- 2.11. $\bar{F} = x\bar{i} + (x + z)\bar{j} - 2y\bar{k}$; $\sigma_1: x = y^2 + z^2$; $\sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- 2.12. $\bar{F} = -3y\bar{i} + 2x\bar{j} + (x + z)\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 - y^2 - z^2 = 1$; $\sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = 3 \ (z > 0)$.
- 2.13. $\bar{F} = -2y\bar{i} + 3z\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 = y^2 + z^2$; $\sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = 8 \ (x \geq 0)$.
- 2.14. $\bar{F} = (x - 3y)\bar{i} + (y + 5z)\bar{j} + 2x\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 = z^2$; $\sigma_2: z = 3$.
- 2.15. $\bar{F} = 3x\bar{i} - z\bar{j}$; $\sigma_1: z = 6 - x^2 - y^2$; $\sigma_2: x^2 + y^2 = z^2 \ (z \geq 0)$.
- 2.16. $\bar{F} = x\bar{i} - (x + 2y)\bar{j} + y\bar{k}$; $\sigma_1: z = x^2 + y^2$; $\sigma_2: z = 1$.
- 2.17. $\bar{F} = x\bar{i} + z\bar{j} - y\bar{k}$; $\sigma_1: z = 4 - 2(x^2 + y^2)$; $\sigma_2: z = 2(x^2 + y^2)$.
- 2.18. $\bar{F} = x\bar{i} - z\bar{j} + y\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $\sigma_2: x^2 + y^2 = z^2 \ (z \geq 0)$.
- 2.19. $\bar{F} = (x + z)\bar{i} + y\bar{j}$; $\sigma_1: z = 8 - x^2 - y^2$; $\sigma_2: z = x^2 + y^2$.
- 2.20. $\bar{F} = (x + y)\bar{i} - 4y\bar{j} + 2x\bar{k}$; $\sigma_1: z = x^2 + y^2$; $\sigma_2: z = 1$.
- 2.21. $\bar{F} = x\bar{i} - 2z\bar{j} + 3y\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 - z = 0$; $\sigma_2: z - 2x = 0$.
- 2.22. $\bar{F} = x\bar{i} + \bar{j} + y\bar{k}$; $\sigma_1: z = 4 - x^2 - y^2$; $\sigma_2: z = 0 \ (z > 0)$.
- 2.23. $\bar{F} = 3x\bar{i} - 2y\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 - y^2 - z^2 = 1$; $\sigma_2: x = 2$.
- 2.24. $\bar{F} = (x - 2y)\bar{i} + (z - x)\bar{j} + x\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 - y^2 - z^2 = 1$; $\sigma_2: y = 2$.
- 2.25. $\bar{F} = y\bar{i} + 2x\bar{j} + z\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $\sigma_2: z = 0 \ (z > 0)$.
- 2.26. $\bar{F} = (x + z)\bar{i} + (y + z)\bar{k}$; $\sigma_1: z = x^2 + y^2$; $\sigma_2: z = 1$.
- 2.27. $\bar{F} = (x - z)\bar{i} + y\bar{j}$; $\sigma_1: z = 1 - x^2 - y^2$; $\sigma_2: z = x^2 + y^2$.
- 2.28. $\bar{F} = (x + y)\bar{i} + 2x\bar{k}$; $\sigma_1: z = x^2 + y^2$; $\sigma_2: z = 4$.
- 2.29. $\bar{F} = x\bar{i} + z\bar{j} + 3y\bar{k}$; $\sigma_1: x^2 + y^2 - z = 0$; $\sigma_2: z - 2y = 0$.
- 2.30. $\bar{F} = x\bar{i} + \bar{j} + y\bar{k}$; $\sigma_1: z = 9 - x^2 - y^2$; $\sigma_2: z = 0 \ (z > 0)$.

1.4.3 Дано векторне поле $\bar{F}(x, y, z)$. Довести, що поле $\bar{F}(x, y, z)$ є потенціальним. Знайти потенціал поля $\bar{F}(x, y, z)$.

- 3.01. $\bar{F} = 3x^2\bar{i} + 2y\bar{j} - 4\bar{k}$.
- 3.02. $\bar{F} = (2x + 1)\bar{i} - 4y^2\bar{j} - 2z\bar{k}$.
- 3.03. $\bar{F} = (x^2 + x)\bar{i} + 4\bar{j} - 2z\bar{k}$.

$$3.04. \bar{F} = 4\bar{i} - (y^2 + 1)\bar{j} + 3z\bar{k}.$$

$$3.05. \bar{F} = 5x\bar{i} - (y + 2)\bar{j} + (z^2 + 1)\bar{k}.$$

$$3.06. \bar{F} = (2x^2 + x)\bar{i} + y^2\bar{j} - (3z + 2)\bar{k}.$$

$$3.07. \bar{F} = 5\bar{i} - (y + 3)\bar{j} - (z^2 - 1)\bar{k}.$$

$$3.08. \bar{F} = (1 - 3x)\bar{i} + 5\bar{j} + (3z^2 + 2)\bar{k}.$$

$$3.09. \bar{F} = (4x^2 + 1)\bar{i} + (3y - 2)\bar{j} + z\bar{k}.$$

$$3.10. \bar{F} = (3x + 4)\bar{i} + (y^2 - 2y)\bar{j} + 4\bar{k}.$$

$$3.11. \bar{F} = (2 - 3x)\bar{i} + (4y^2 + 3y)\bar{j} + (2z + 1)\bar{k}.$$

$$3.12. \bar{F} = (1 - 2x^2)\bar{i} + (3 - y)\bar{j} + (4z + 1)\bar{k}.$$

$$3.13. \bar{F} = 2x^2\bar{i} - y^2\bar{j} + \bar{k}.$$

$$3.14. \bar{F} = (5x + 2)\bar{i} - (3y + 1)\bar{j} + (2z - 1)\bar{k}.$$

$$3.15. \bar{F} = (2x^2 + x)\bar{i} + y^2\bar{j} - (3z + 2)\bar{k}.$$

$$3.16. \bar{F} = (1 + 3x)\bar{i} - 2y\bar{j} + (4 - 3z)\bar{k}.$$

$$3.17. \bar{F} = (3x - x^2)\bar{i} + (2 - 4y)\bar{j} + 3\bar{k}.$$

$$3.18. \bar{F} = (2x^2 + 4)\bar{i} + (3y - 1)\bar{j} + (z + 2)\bar{k}.$$

$$3.19. \bar{F} = 3x\bar{i} + (2 - 4y^2)\bar{j} + (3z - z^2)\bar{k}.$$

$$3.20. \bar{F} = (x^2 - 2)\bar{i} + (y - 2)\bar{j} + (z^2 + 2z)\bar{k}.$$

$$3.21. \bar{F} = (1 - 2x + x^2)\bar{i} + (4y - 1)\bar{j} - 2z\bar{k}.$$

$$3.22. \bar{F} = 2\bar{i} - (3y^2 + y)\bar{j} + (4 - 3z)\bar{k}.$$

$$3.23. \bar{F} = (2x - x^2)\bar{i} + (1 - 4y)\bar{j} + (z^2 + 1)\bar{k}.$$

$$3.24. \bar{F} = (4x^2 + 1)\bar{i} - (3y + 2)\bar{j} + (1 - z^2)\bar{k}.$$

$$3.25. \bar{F} = (1 + 2x^2)\bar{i} + (3y - 1)\bar{j} + 4z\bar{k}.$$

$$3.26. \bar{F} = 3\bar{i} + (4y^2 + 3y)\bar{j} + (2z + 3)\bar{k}.$$

$$3.27. \bar{F} = (4 - 3x^2)\bar{i} + (2y^2 - y)\bar{j} + (1 - 2z)\bar{k}.$$

$$3.28. \bar{F} = (x^2 + 1)\bar{i} + (3y - 2)\bar{j} + 4z^2\bar{k}.$$

$$3.29. \bar{F} = 2x^2\bar{i} - (3y^2 + 2y)\bar{j} + (z^2 - 3z)\bar{k}.$$

$$3.30. \bar{F} = (3x - 2)\bar{i} + (2y + 1)\bar{j} + (z - 1)\bar{k}.$$

2 ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

2.1 Комплексні числа та дії над ними

Означення. Комплексними називаються числа виду

$$z = x + iy, \quad (1)$$

де x і y – дійсні числа, а i – уявна одиниця ($i^2 = -1$). Число x називається дійсною частиною комплексного числа і позначається $x = \operatorname{Re} z$, y – уявною частиною: $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексних числа рівні тоді й тільки тоді, коли рівні окремо їх дійсні й уявні частини.

Число $\bar{z} = x - iy$ називається спряженим до числа $z = x + iy$.

Запис комплексного числа у вигляді (1) називається його алгебраїчною формою.

Комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити на площині точкою з координатами (x, y) . Координатну площину в цьому випадку називають комплексною площиною.

Комплексне число можна представити у вигляді радіус-вектора. Довжина радіус-вектора:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

називається модулем комплексного числа ($r \geq 0$). Кут φ , утворений радіусом-вектором oz з додатнім напрямом осі Ox називається аргументом комплексного числа й позначається

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

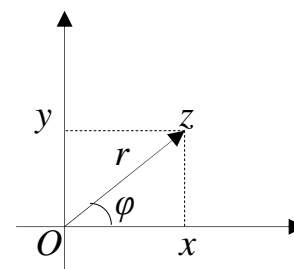


Рисунок 2.1

Аргумент комплексного числа – величина багатозначна: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$ ($k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$), де $\arg z$ – головне значення аргумента, яке знаходиться в проміжку $(-\pi; \pi]$.

З рисунка 2.1 видно, що мають місце рівності:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Якщо в алгебраїчній формі x і y замінити на $x = r \cos \varphi$ та $y = r \sin \varphi$, то комплексне число $z = x + iy$ можна записати у вигляді:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2)$$

Такий запис комплексного числа називається його тригонометричною формою.

Ейлером була доведена рівність $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, використовуючи яку, можна записати

$$z = re^{i\varphi}. \quad (3)$$

Це показникова форма комплексного числа.

Нехай задано два комплексних числа в алгебраїчній формі: $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$. Тоді

$$1) z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$2) z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

$$3) \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Якщо ж комплексні числа задані в тригонометричній формі, тобто $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то

$$1) z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)];$$

$$3) z^n = r^n (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n \in \mathbb{Z} - \text{формула Муавра};$$

$$4) \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

2.2 Поняття про функцію комплексної змінної

Надалі ми будемо розглядати різні множини комплексних чисел. Вони задаються за допомогою рівностей або нерівностей. Наприклад, умова $|z_0| = R, R = \text{const}$ визначає коло радіусом R із центром у точці z_0 (рисунок 2.2а); умова $\arg z = \text{const}$ – промінь, що виходить із початку координат під кутом $\varphi = \arg z$ (рисунок 2.2б).

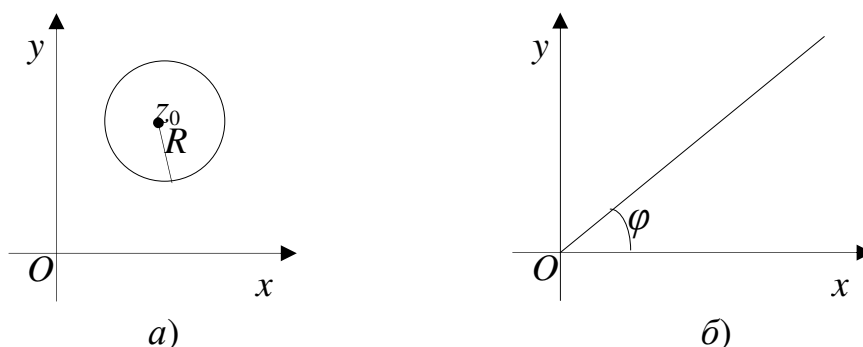


Рисунок 2.2

Означення 1. Якщо кожному комплексному числу z , що належить множині D , поставлено у відповідність деяке одне комплексне число або сукупність комплексних чисел ω , то говорять, що ω є функцією від z , визначеною на множині D і записують

$$\omega = f(z). \quad (4)$$

Якщо врахувати, що $z = x + iy$ й покласти $\omega = u + iv$, то для означення функції ω достатньо визначити дві функції дійсних змінних $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$.

Отже,

$$\omega = u(x, y) + iv(x, y). \quad (5)$$

Від запису (4) можна перейти до запису вигляду (5). Такий перехід називається виділенням дійсної та уявної частин.

Приклад. Виділити дійсну та уявну частини функції: $\omega = z^2$.

Розв'язання. Так як $z = x + iy$, тоді $\omega = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Отже, $u(x, y) = x^2 - y^2$ та $v(x, y) = 2xy$.

Означення 2. Комплексне число $\omega_0 = u_0 + iv_0$ називається границею функції $\omega = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$ при $z \rightarrow z_0(x_0, y_0)$, якщо для кожного, як завгодно малого наперед заданого додатного числа ε можна вказати таке додатне число σ , що з нерівності $|z - z_0| < \sigma$ випливає нерівність $|f(z) - \omega_0| < \varepsilon$.

Дане означення записується: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0$.

Із означення випливає, що якщо ω_0 є границею функції $\omega = f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, то це значення ω_0 не залежить від шляху, яким z наближається до z_0 . Із означення також слідує, що якщо границя функції існує, то існують і границі:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{та} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Означення 3. Функція $f(z)$ називається неперервною функцією в точці z_0 , якщо вона визначена в деякому околі цієї точки й $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Функція $f(z)$ неперервна в області D , якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Неперервні функції комплексної змінної мають аналогічні властивості, що й неперервні функції дійсної змінної. Зокрема, якщо функція $\omega = f(z)$ неперервна в замкненій області D , то вона:

- 1) обмежена за модулем в цій області, тобто $|f(z)| < M$;
- 2) досягає свого найбільшого й найменшого значення в замкненій області D .

2.3 Основні елементарні функції комплексної змінної

Визначимо основні елементарні функції комплексної змінної $z = x + iy$.

Показникова функція. Показникова функція $w = e^z$ задається формулою

$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Задавши у данній рівності $y = 0$, встановлюємо, що для дійсних значень $z = x$ показникова функція e^z співпадає з показниковою функцією дійсної змінної: $e^z = e^x$.

Логарифмічна функція. Логарифмічна функція визначається як функція, обернена до показникової: число w називається логарифмом числа

$z \neq 0$, якщо $e^w = z$ і позначається $w = \text{Ln } z$. Так як значення показникової функції $e^w = z$ завжди відмінні від нуля, то логарифмічна функція $w = \text{Ln } z$ визначена на всій площині z , крім точки $z = 0$.

Поклавши $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, отримаємо, згідно означення логарифмічної функції,

$$e^{u+iv} = r \cdot e^{i\varphi} \text{ або } e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Звідси маємо:

$$e^u = r, v = \varphi + 2k\pi, \text{ тобто } u = \ln r, v = \varphi + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\text{Отже, } w = \text{Ln } z = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),$$

тобто

$$\text{Ln } z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

або

$$\text{Ln } z = \ln|z| + i\text{Arg } z,$$

де $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$.

Остання формула показує, що логарифмічна функція комплексної змінної має нескінченну кількість значень, тобто $w = \text{Ln } z$ – багатозначна функція.

Однозначну вітку цієї функції можна виділити, підставивши в останню формулу конкретне значення k . Поклавши $k = 0$, отримаємо однозначну функцію, яку називають головним значенням логарифма $\text{Ln } z$ і позначають $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \text{ де } -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Якщо z – дійсне додатне число, то $\arg z = 0$ і $\ln z = \ln|z|$, тобто головне значення логарифма дійсного додатного числа співпадає зі звичайним натуральним логарифмом цього числа.

Логарифмічну функцію комплексної змінної можна представити так:

$$\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i.$$

Степенева функція. Якщо n – натуральне число, то степенева функція визначається рівністю $w = z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Функція $w = z^n$ –

однозначна функція. Якщо $n = \frac{1}{q}$ ($q \in \mathbb{N}$), то в такому випадку

$$w = z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{q} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{q} \right), \text{ де } k = 0, 1, 2, \dots, q-1.$$

Тут функція $w = z^{\frac{1}{q}}$ є багатозначною (q -значною). Однозначну вітку цієї функції можна отримати, надаючи k відповідного значення, наприклад $k = 0$.

Якщо $n = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}$), то степенева функція визначається рівністю

$$w = z^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{z} \right)^p = \sqrt[q]{|z|^p} \left(\cos \frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} + i \sin \frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} \right).$$

Функція $w = z^{\frac{p}{q}}$ – багатозначна.

Тригонометричні функції. Тригонометричні функції комплексного аргумента $z = x + iy$ визначаються рівностями:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Тригонометричні функції комплексної змінної зберігають властивості тригонометричних функцій дійсної змінної.

Гіперболічні функції. Гіперболічні функції визначаються рівностями:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Зв'язок між гіперболічними і тригонометричними функціями:

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z, \sin z = -i \operatorname{sh} iz, \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

Із означення гіперболічних функцій випливає, що функції $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ періодичні з періодом $2\pi i$; функції $\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ мають період πi .

2.4 Диференційованість і аналітичність функції комплексної змінної

Означення. Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому околі точки z . Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{df(z)}{dz} = f'(z),$$

то вона називається похідною від функції $f(z)$ комплексної змінної z , а функція $f(z)$ – диференційованою в точці z .

Нагадаємо, що функція двох дійсних змінних $u(x, y)$ називається диференційованою, або тією, яка має повний диференціал у даній точці (x, y) , якщо у повному прирості функції в цій точці може бути виділена головна лінійна частина й нескінченно мала частина з вищим порядком малості відносно $\Delta x, \Delta y$, тобто

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad (6)$$

$$\alpha, \beta \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x, \Delta y \rightarrow 0, \text{ причому } A = \frac{\partial u}{\partial x}, B = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Теорема. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі точки $z = x + iy$, то для того, щоб функція $f(z)$ мала похідну в точці $z(x, y)$, необхідно і достатньо, щоб функції u і v були диференційовані в точці (x, y) по x і по y та виконувались умови:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{Умови Коші-Рімана}).$$

Доведення.

Необхідність. Нехай функція $f(z)$ диференційована в точці $z = x + iy$. Потрібно довести, що функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ диференційовані в точці (x, y) і у цій точці виконуються умови Коші-Рімана.

Так як функція $f(z)$ диференційована в точці z , то її приріст можна представити у вигляді:

$$f(z + \Delta z) - f(z) = c\Delta z + \gamma\Delta z,$$

причому $\gamma \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$, а $c = f'(z)$, тобто

$$f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \gamma\Delta z.$$

За означенням: $z = x + iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$;

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y);$$

$$f(z + \Delta z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

$$f'(z) = A + iB, \gamma = \alpha + i\beta. \alpha, \beta \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] = \\ &= (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y). \end{aligned}$$

Звідси,

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = A\Delta x - B\Delta y + \alpha\Delta x - \beta\Delta y, \quad (7)$$

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = B\Delta x + A\Delta y + \alpha\Delta y + \beta\Delta x. \quad (8)$$

Вирази (7) і (8) мають той же вигляд, що й (6). Порівнюючи їх, помічаємо

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ і } B = -\frac{\partial u}{\partial y}; A = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ і } B = \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ бо } f'(z) = A + iB = u'_x + iv'_x.$$

Звідси,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9)$$

Таким чином, доведено, що якщо функція $f(z)$ диференційована в точці $z = x + iy$, то її дійсна й уявна частини $u(x, y)$, $v(x, y)$ диференційовані в точці (x, y) і задовольняють умовам (9).

Враховуючи умови Коші-Рімана, похідну функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ можна знайти за формулами:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Приклад. Перевірити умови Коші-Рімана та знайти похідну функцій:

$$w = f(z) = z^2 \text{ та } w = z \operatorname{Re} z.$$

Розв'язання.

1) $z = x + iy$, тоді $w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, тому $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

Так як $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, то видно, що умови Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ виконуються.

$$\text{Отже, } \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

2) $w = z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = x^2 + xyi$, тому $u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = xy$. Знаходимо $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = y$. Так як $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$, то умови Коші-Рімана не виконуються і для функції $w = z \operatorname{Re} z$ похідної не існує.

Означення. Якщо функція $f(z)$ диференційована не тільки в даній точці z_0 , але й у деякому околі цієї точки, то вона називається аналітичною в точці z_0 .

Означення. Функція $f(z)$, аналітична у всіх точках області D , називається аналітичною в області D .

2.5 Інтеграл від функції комплексної змінної.

Теорема Коші

Нехай $f(z)$ – неперервна функція комплексної змінної, визначена в кожній точці деякої дуги AB .

Розіб'ємо дугу AB на n частин, довільно вибираючи точки поділу $A = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = B$ (рисунок 2.3). На кожній частині виберемо довільну точку ξ_i і утворимо суму:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k, \text{ де } \Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$

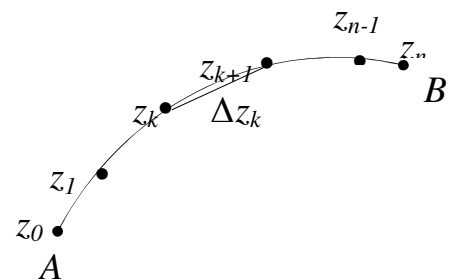


Рисунок 2.3

Границя цієї суми (при наближенні до нуля $\max |\Delta z_k|$) називається інтегралом від $f(z)$ уздовж дуги AB і позначається $\int_{AB} f(z) dz$.

Тобто $\int_{AB} f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k$, де $|\Delta z_k|$ – довжина хорди, що стягує елементарну дугу $\square_{z_k, z_{k+1}}$.

Властивості інтеграла. Із означення випливають наступні властивості:

1. $\int_{AB} [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_{AB} f_1(z) dz \pm \int_{AB} f_2(z) dz.$
2. $\int_{AB} c f(z) dz = c \int_{AB} f(z) dz, \quad c - const.$
3. $\int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz.$
4. Якщо дуга AB розділена на частини точкою C , то

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AC} f(z) dz + \int_{CB} f(z) dz.$$
5. Оцінка модуля інтеграла.

Якщо на кривій AB , що має довжину $L: |f(z)| \leq M$, то $\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leq ML.$

Доведення.

$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$, $|\Delta z_k|$ – відстань між точками z_k і z_{k-1} , а $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$ – довжина ламаної, вписаної в дугу AB , тому $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq L.$

Отже, $\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \right| \leq ML.$

Переходячи до границі, одержимо $\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leq ML$

6. Вираження інтеграла від функції комплексної змінної через криволінійні інтеграли II-го роду.

Так як $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ і $z_k = x_k + i y_k$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(x_k, y_k) + i v(x_k, y_k)] (\Delta x_k + i \Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n [u(x_k, y_k) \Delta x_k - v(x_k, y_k) \Delta y_k] + i \sum_{k=1}^n [v(x_k, y_k) \Delta x_k + u(x_k, y_k) \Delta y_k]. \end{aligned}$$

Ці суми є інтегральними сумами криволінійних інтегралів II-го роду. Тому граничний перехід за умови, що $\max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0$, тобто, $\max_k |\Delta y_k| \rightarrow 0$ дозволяє записати формулу

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AB} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{AB} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Ця формула виділяє дійсну й уявну частини інтеграла.

7. Перетворення інтеграла функції комплексної змінної у звичайний інтеграл від комплексної функції дійсної змінної.

Якщо дуга AB задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t_1 \leq t \leq t_2$, то $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ – комплексне параметричне рівняння дуги AB . Тоді

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(z) dz &= \int_{t_1}^{t_2} f[x(t) + iy(t)] d[x(t) + iy(t)] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f[x(t) + iy(t)] \frac{d}{dt}[x(t) + iy(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)] z'(t) dt. \end{aligned}$$

Дана формула зводить обчислення інтеграла від функції комплексної змінної до обчислення визначеного інтеграла дійсної змінної.

Приклад 1. Знайти $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$, де γ – коло радіуса R із центром у точці

$$z_0 = \alpha + i\beta.$$

Розв'язання.

Рівняння кола: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ (рис. 2.4).

Нехай $x - \alpha = R \cos t$, $y - \beta = R \sin t$.

Рівняння $\begin{cases} x = \alpha + R \cos t, \\ y = \beta + R \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ є параметричним

рівнянням кола, тоді його комплексне параметричне рівняння матиме вигляд:

$$z = x + iy = \alpha + i\beta + R(\cos t + i \sin t) = z_0 + Re^{it}.$$

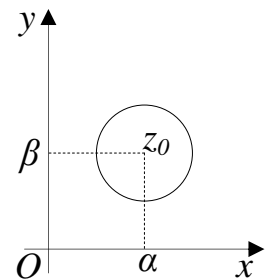


Рисунок 2.4

Продиференціювавши, отримаємо: $dz = d(z_0 + Re^{it}) = iRe^{it} dt$.

$$\text{Тому } \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it} dt}{Re^{it}} = 2\pi i.$$

Відповідь: $2\pi i$.

Основна теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , обмеженій замкненим контуром $\tilde{A}$, а також у точках цього контуру, то інтеграл від цієї функції по контуру $\tilde{A}$ дорівнює нулю:

$$\oint_{\tilde{A}} f(z) dz = 0.$$

Доведення.

Нехай функція $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в однозв'язній області D . Із аналітичності випливає існування неперервних частинних похідних від функцій $u(x, y)$, $v(x, y)$ в області D . Нехай $\tilde{A}$ – замкнений контур, що обмежує область D (рисунок 2.5).

$$\text{Тоді } \oint_{\tilde{A}} f(z) dz = \oint_{\tilde{A}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \oint_{\tilde{A}} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

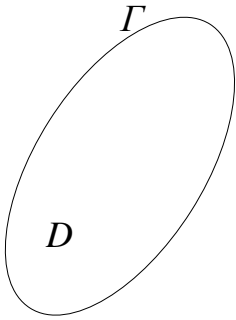


Рисунок 2.5

Використовуючи формулу Гріна

$$\oint_{\tilde{A}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

отримаємо

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Так як функція $f(z)$ аналітична, то виконуються умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отже,

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = 0.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли:

1) $\oint_{\tilde{A}} (z^2 - 3z)dz;$

2) $I = \oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0}$, якщо а) $\tilde{A} : |z - z_0| = R;$

б) $\tilde{A}$ – контур, що не містить точки z_0 .

Розв'язання.

1) Так як функція $f(z) = z^2 - 3z$ аналітична на всій площині, то $\oint_{\tilde{A}} (z^2 - 3z)dz = 0$ по будь-якому замкненому контуру.

2) $I = \oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0}$, якщо а) $\tilde{A} : |z - z_0| = R$.

Із вище доведеного (приклад 1) $I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$. Відмітимо, що точка z_0

лежить усередині кола $|z - z_0| = R$ і функція $f(z)$ у цій точці не аналітична.

б) Якщо ж $\tilde{A}$ – контур, що не містить точки z_0 , то $I = \oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0} = 0$.

Відповідь: 0; $2\pi i$, 0.

Теорема. Якщо функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D , обмеженій зовнішнім контуром $\tilde{A}$ і внутрішніми контурами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, а також на контурах $\tilde{A}, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, то має місце формула

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Доведення.

Доведемо теорему при $n=2$.

Нехай в області, обмеженій контуром $\tilde{A}$ є два контури γ_1, γ_2 і $f(z)$ функція, аналітична в області, що знаходиться між контурами $\tilde{A}$ та γ_1, γ_2 , а також на всіх цих контурах.

Проведемо дуги: lk, mn, pg , що з'єднують контур Γ з γ_1 , γ_1 з γ_2 , γ_2 з $\tilde{A}$ і позначимо через C_1 замкнений контур $lkzmntpgfl$, а через C_2 – $klrgpunmsk$ (рисунок 2.6). Тоді області всередині

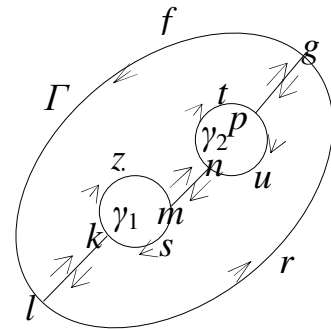


Рисунок 2.6

всередині контурів C_1 і C_2 однозв'язні й для них справедлива основна теорема Коші:

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 0, \quad \oint_{C_2} f(z) dz = 0.$$

Додавши ці рівності й, використовуючи 3-тю властивість для інтегралів, можна помітити, що інтегрування по кожній з дуг lk, mn, pq відбувається двічі в різних напрямках, а обхід контурів γ_1, γ_2 відбувається за годинниковою стрілкою (тобто, у від'ємному напрямку). Отже,

$$\oint_{\tilde{A}} f(z) dz - \oint_{\gamma_1} f(z) dz - \oint_{\gamma_2} f(z) dz = 0,$$

звідки випливає необхідне.

2.6 Інтеграл Коші. Інтегральна формула Коші

Теорема. Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , обмеженій замкненим контуром $\tilde{A}$, і на самому контурі. Тоді значення функції в будь-якій точці $z_0 \in D$ знаходиться за формулою

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Доведення.

Нехай $f(z)$ – аналітична функція в області, обмеженій замкненим контуром $\tilde{A}$ і на самому контурі. Зафіксуємо точку z_0 усередині контура $\tilde{A}$ і розглянемо функцію

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ця функція аналітична у всіх точках контура $\tilde{A}$ й на ньому, за винятком точки z_0 . Тобто при $z = z_0$ одержимо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$, яка розкривається, тому що, при $z \rightarrow z_0$ $\varphi(z) \rightarrow f'(z_0)$. Тому, якщо доозначити функцію $\varphi(z)$ у точці z_0 умовою $\varphi(z) = f'(z_0)$, то $\varphi(z)$ стане неперервною функцією у всій області, обмеженій замкненим контуром.

Отже, й сама функція буде обмеженою, тобто $|\varphi(z)| < M$, де M – деяке додатне число.

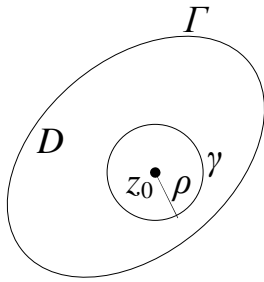


Рисунок 2.7

Нехай γ – коло радіусом ρ із центром у точці z_0 , що лежить усередині $\tilde{A}$ (рисунок 2.7). В області, обмеженій контурами $\tilde{A}$ і γ функція $\varphi(z)$ – аналітична, так як точка $z = z_0$ (у якій аналітичність порушується) викинута з області.

Застосуємо теорему Коші для багатозв'язної області, тоді $\oint_{\tilde{A}} \varphi(z) dz = \oint_{\gamma} \varphi(z) dz$.

За правилом оцінки модуля інтеграла, матимемо:

$$\left| \oint_{\gamma} \varphi(z) dz \right| \leq M L_{\tilde{A}} = 2\pi\rho M.$$

Переходячи до границі при $\rho \rightarrow 0$ в останній рівності, одержимо

$$\oint_{\tilde{A}} \varphi(z) dz = 0,$$

або

$$\oint_{\tilde{A}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 \Rightarrow \oint_{\tilde{A}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0} = 0. \quad (10)$$

За теоремою Коші для багатозв'язного контура $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$. Тому рівність (10) набуває вигляду:

$$\oint_{\tilde{A}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) = 0.$$

Звідси,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Ця формула називається інтегральною формулою Коші, а інтеграл, що знаходиться у правій її частині називається інтегралом Коші. З формули бачимо, що значення аналітичної функції всередині $\tilde{A}$ цілком визначається значеннями цієї функції на границі C .

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{z^2 dz}{z+1}$, де $\tilde{A}$: 1) $|z| = 2$; 2) $|z| = \frac{1}{2}$.

Розв'язання.

1) З умови $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{z^2 dz}{z+1}$ функція $f(z) = z^2$ аналітична всюди. Точка $z_0 = -1$ лежить усередині круга $|z| < 2$, тому за формулою Коші $I = f(-1) = 1$.

2) точка $z_0 = -1$ лежить поза кругом $|z| \leq \frac{1}{2}$, тому за теоремою Коші $I = 0$.

Відповідь: 1; 0.

2.8 Похідні вищих порядків від аналітичної функції

Теорема. Аналітична функція нескінченно раз диференційована, причому справедлива формула

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}.$$

Доведення.

Ми показали, що якщо функція $f(z)$ аналітична в області D , обмеженій контуром $\tilde{A}$ і на самому контурі, то значення функції в будь-якій точці z , що лежить в області D , знаходиться за інтегральною формулою Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Як б не була точка z завжди можна вибрати величину Δz таку, що нова точка $z + \Delta z$ теж буде лежати усередині області D . Будемо, наприклад, вважати $|\Delta z|$ меншим найкоротшої відстані від точки z до границі області. Тоді для нової точки $z + \Delta z$, за формулою Коші

$$f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{\xi - z - \Delta z} d\xi.$$

Розглянемо

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \oint_{\tilde{A}} \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z - \Delta z} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right] d\xi.$$

Після перетворення,

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} d\xi.$$

При $\Delta z \rightarrow 0$, одержимо

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi. \quad (11)$$

Отримали формулу для $n=1$. Замінюючи в формулі (11) z на $z + \Delta z$, можна скласти нове відношення: $\frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z}$ і одержати формулу для другої похідної:

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi \text{ і т.д.}$$

$$\text{Отже, } f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

З аналітичності функції в деякій точці випливає існування в околі цієї ж точки похідних будь-якого порядку, а, відповідно, і їх аналітичність.

2.8 Ряди аналітичних функцій

Означення. Степеневим рядом називається ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, де C_n – сталі комплексні числа (коефіцієнти ряду). Для степеневих рядів справедливі наступні властивості:

1. Для степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, що має як точки збіжності, так і точки розбіжності, завжди існує таке дійсне число $R \geq 0$, що усередині круга $|z - z_0| < R$ розглянутий ряд збігається, а поза цим кругом – розбігається. Область $|z - z_0| < R$ називається областю збіжності, а число R – радіусом збіжності степеневого ряду.

2. Сума степеневого ряду є аналітичною функцією в області збіжності.

3. Степеневий ряд в крузі радіуса $\rho < R$ збігається рівномірно. Його можна почленно диференціювати й почленно інтегрувати по будь-якій дузі, що лежить в області збіжності. При цьому, радіус збіжності кожного отриманого ряду дорівнює радіусу збіжності вихідного ряду.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 1 + i)^n}{2^n}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера

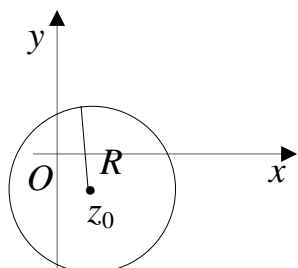


Рисунок 2.8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z - 1 + i)^{n+1} 2^n}{2^{n+1} (z - 1 + i)^n} \right| = \frac{1}{2} |z - 1 + i| < 1, \text{ тоді } |z - 1 + i| < 2, \text{ де}$$

$$z_0 = 1 - i \text{ і } R = 2.$$

$$\text{Так як } |z - 1 + i| = |x + iy - 1 + i| < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} < 2, \text{ а остання нерівність визначає}$$

область, обмежену колом з центром в точці $z_0(1, -1)$ і радіусом $R = 2$.

2.8.1 Ряд Тейлора

Степеневий ряд усередині своєї області збіжності визначає аналітичну функцію – суму ряду. Справедливе й обернене твердження.

Теорема. Будь-яка функція $f(z)$, аналітична усередині круга з центром в точці z_0 , розкладається в цьому крузі в степеневий ряд виду:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулою: $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Доведення.

Розглянемо функцію $f(z)$, аналітичну в крузі k із центром у точці z_0 .

Нехай z довільна точка круга. Тоді за інтегральною формулою Коші $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

Проведемо всередині k коло L з центром в точці z_0 радіусом r так, щоб точка z була всередині цього кола (рисунок 2.9).

Тоді рівняння кола $L: |\xi - z_0| = r$.

Відстань між точками z і z_0 буде менша r .

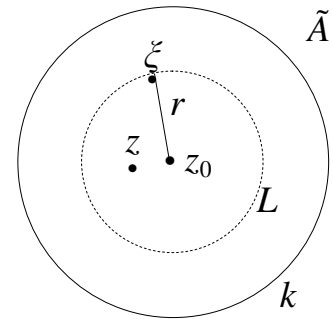


Рисунок 2.9

Розглянемо дріб

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}, \quad (12)$$

де $\frac{z - z_0}{\xi - z_0} = q \Rightarrow |q| < 1$.

Вираз (12) можна розглядати як суму спадної геометричної прогресії з першим членом $\frac{1}{\xi - z_0}$ і знаменником $\frac{z - z_0}{\xi - z_0}$. Тоді згідно формули суми

геометричної прогресії $\frac{a}{1 - q} = a + aq + aq^2 + \dots$, отримаємо:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \quad (13)$$

Перемноживши ряд (13) на $f(\xi)$, одержимо:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + \frac{(z - z_0)f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2 f(\xi)}{(\xi - z_0)^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \quad (14)$$

Так як $|\xi - z_0| = r$, враховуючи аналітичність функції $|f(\xi)| < M$ при $\xi \in L$, то

$$\left| \frac{(z - z_0)^n f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| = \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right|^n \cdot \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|} \leq |q|^n \cdot \frac{M}{r}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n \cdot \frac{M}{r} = \frac{M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} |q|^n$ збігається і є мажорантним до ряду (14), тому

ряд (14) збіжний і його можна почленно інтегрувати

$$\begin{aligned} f(z) &= \oint_L \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + \frac{(z - z_0)f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2 f(\xi)}{(\xi - z_0)^3} + \dots \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi + \frac{(z - z_0)^2}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^3} d\xi + \dots = \end{aligned}$$

$$= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \quad (15)$$

Отже,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \text{ де } C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Степеневий ряд (15) називається рядом Тейлора для функції $f(z)$.

2.8.2 Ряд Лорана

Раніше було показано, що областю збіжності степеневого ряду

$$C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \dots + C_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

є круг: $|z - z_0| < R$.

Розглянемо ряд

$$\frac{C_1}{z - z_0} + \frac{C_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{C_n}{(z - z_0)^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z - z_0)^{-n}. \quad (16)$$

Зробимо заміну $\frac{1}{z - z_0} = \zeta$ та отримаємо ряд:

$$C_1 \zeta + C_2 \zeta^2 + \dots + C_n \zeta^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \zeta^n.$$

Даний степеневий ряд збігається в крузі $|\zeta| < \rho$. Переходячи від ζ до змінної z , одержимо: $\frac{1}{|z - z_0|} < \rho$, $|z - z_0| > \frac{1}{\rho}$, тобто областю збіжності ряду (16)

є зовнішня частина кола із центром в точці z_0 і радіусом $\frac{1}{\rho}$.

Розглянемо ряд, нескінченний в обидва боки

$$\dots + \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z - z_0)^1} + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots + C_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \quad (17)$$

Даний ряд буде збіжним, якщо одночасно збігатимуться ряди:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \text{ і } \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n.$$

Область збіжності першого ряду є круг радіусом R із центром у точці z_0 . Область збіжності другого ряду є зовнішність деякого кола радіусом r із центром у точці z_0 . Якщо $0 < r < R$ (рисунок 2.10), то їх спільна частина – кільце є областю збіжності ряду (17).

Множина точок z , що знаходяться в кільці задовольняють нерівність

$$r < |z - z_0| < R.$$

Якщо $r > R$, то ряд (17) не має точок збіжності. Якщо $R = r$, то ряд (17) може мати точки збіжності лише на колі $r = R$.

Сума ряду (17) є аналітичною функцією в кільці збіжності.

Справедливе зворотне твердження, що називається теоремою Лорана.

Теорема Лорана. Будь-яка функція, аналітична всередині кільця $0 < r < |z - z_0| < R$ з центром в точці z_0 , може бути розкладена в цьому кільці в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

коефіцієнти якого визначаються формулами

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots,$$

а L – будь-яке коло з центром у точці z_0 , що лежить усередині даного кільця (без доведення).

Даний ряд називається рядом Лорана для функції $f(z)$ в розглянутому кільці.

2.9 Ізольовані особливі точки

Точки площини, у яких функція $f(z)$ є аналітичною, будемо називати правильними точками цієї функції, а точки, у яких функція $f(z)$ не є аналітичною, зокрема, точки, у яких функція $f(z)$ невизначена, називаються особливими точками. Особлива точка називається ізольованою, якщо в деякому її околі немає інших особливих точок.

Якщо z_0 ізольована особлива точка функції $f(z)$, то в достатньо малому околі з виколотим центром z_0 , що є кільцем із внутрішнім радіусом, рівним нулю, функція $f(z)$ буде аналітичною й розкладається в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}. \quad (18)$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ називається правильною частиною, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$ називається головною частиною розкладу функції $f(z)$ (18).

Можливо три випадки:

1. У розкладі (18) відсутня головна частина.

В цьому випадку точка z_0 називається усувною особливою точкою (УОТ).

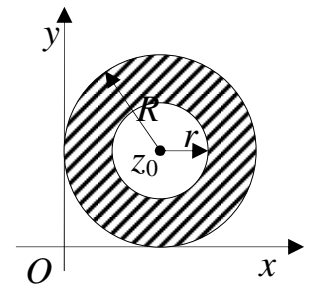


Рисунок 2.10

$$f(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots + C_n(z - z_0)^n + \dots,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0.$$

Отже, якщо доозначити функцію $f(z)$ в точці z_0 , прийнявши $f(z_0) = C_0$, то точка z_0 стане правильною.

Приклад 1. Знайти особливі точки функції $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ і визначити їх тип.

Розв'язання. $z = 0$ – особлива точка. Розклад функції $f(z) = \sin z$ в ряд:
 $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$, тоді $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ і $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Поклавши $f(0) = 1$, невизначеність $\frac{0}{0}$ можна усунути. Отже, $z = 0$ – УОТ.

Відповідь: $z = 0$ – УОТ.

Якщо z_0 – усувна особлива точка (УОТ), то існує границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, що дорівнює константі.

2. Головна частина містить кінцеве число членів.

Точка z_0 називається полюсом k -го порядку (ПкП), якщо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{(z - z_0)} + \dots + \frac{C_{-k}}{(z - z_0)^k}, \text{ де } k - \text{порядок полюса.}$$

Приклад 2. Знайти особливі точки функції $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ і визначити їх тип.

Розв'язання. $z = 0$ – особлива точка. Розклад функції $f(z) = \cos z$ в ряд:
 $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$, тоді $\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \dots$

Отже, $z = 0$ – полюс першого порядку (П1П).

Відповідь: $z = 0$ – П1П.

Якщо z_0 – полюс (П), то границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Полюс першого порядку називається простим полюсом. Точка z_0 буде полюсом k -го порядку функції $f(z)$, якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k = C \neq 0$.

3. Головна частина містить нескінченне число членів.

Точка z_0 називається істотно особливою (ІОТ).

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n.$$

Приклад 3. Знайти особливі точки функції $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ і визначити їх тип.

Розв'язання. $z = 0$ – особлива точка. Розклад функції в ряд:
 $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$

Отже, $z = 0$ – істотно особлива точка (ІОТ).

Відповідь: $z = 0$ – ІОТ.

Якщо z_0 – істотно особлива точка (ІОТ), то границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не існує.

2.10 Лишки. Основна теорема про лишки

Нехай z_0 – ізольована особлива точка функції $f(z)$. В околі цієї точки функцію $f(z)$ можна розкласти в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots,$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

Означення. Коефіцієнт при $(z - z_0)^{-1}$ в розкладі Лорана, тобто число C_{-1} називається лишком функції $f(z)$ відносно особливої точки z_0 й позначається $C_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$ або $C_{-1} = \hat{A} \div f(z)$.

З формули для коефіцієнтів ряду Лорана слідує, що

$$C_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz.$$

Основна теорема про лишки. Якщо функція $f(z)$ аналітична всередині замкненого контура $\tilde{A}$ й на ньому, за винятком кінцевого числа точок $z_1, z_2, \dots, z_n$ усередині $\tilde{A}$, які є полюсами, то $\oint_{\tilde{A}} f(z) dz$ дорівнює добутку $2\pi i$ на суму лишків відносно особливих точок функції $f(z)$, що лежать усередині області, обмеженої контуром $\tilde{A}$

$$\oint_{\tilde{A}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (19)$$

Доведення.

Особливі точки, що лежать усередині області, обмеженої контуром $\tilde{A}$, виділимо околами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ настільки малих радіусів, щоб вони лежали всередині області, обмеженої контуром $\tilde{A}$ і не перетиналися (рисунки 2.11).

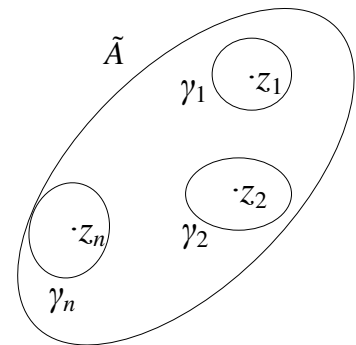


Рисунок 2.11

За теоремою Коші для багатозв'язної області, матимемо:

$$\oint_{\tilde{A}} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz. \quad (20)$$

Із означення лишка:

$$\oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (21).$$

Підставляючи (21) в (20), одержимо формулу (19).

Отже, щоб обчислити інтеграл, потрібно знати формули для обчислення лишків.

Обчислення лишків

1. Якщо функція $f(z)$ аналітична у точці z_0 або z_0 – усувна особлива точка (УОТ) функції $f(z)$, то $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

2. Нехай z_0 – простий полюс функції $f(z)$, тоді

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{z - z_0}.$$

Почленно перемноживши ліву і праву частини на $(z - z_0)$, одержимо:

$$f(z)(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^{n+1} + C_{-1}.$$

Перейдемо до границі при $z \rightarrow z_0$, тоді $C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$.

Отже, якщо z_0 – простий полюс функції $f(z)$, то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z - z_0)].$$

Якщо функцію $f(z)$ можна представити у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де функції

$\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналітичні в точці z_0 , $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Якщо точка z_0 – полюс k -го порядку функції $f(z)$, то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z - z_0)^k]^{(k-1)}$$

або

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1} [f(z)(z - z_0)^k]}{dz^{k-1}}.$$

3. Якщо z_0 – істотно особлива точка (ІОТ) функції $f(z)$, то її лишок у даній точці знаходиться з безпосереднього розкладу функції $f(z)$ в ряд Лорана $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, де $\tilde{A}: |z-1-i|=2$.

Розв'язання.

Особливі точки підінтегральної функції: $z_{1,2} = 1$, $z_3 = -i$, $z_4 = i$.

Точки $z_{1,2} = 1$, $z_4 = i$ знаходяться в області, обмеженій контуром $\tilde{A}: |z-1-i|=2$ (рисунок 2.12).

Визначимо тип особливих точок:

$$1) \ z_{1,2} = 1. \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} = \infty.$$

Отже, $z_{1,2} = 1$ – полюс. Знайдемо порядок полюса:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Тоді $z_{1,2}=1$ – полюс 2-го порядку (П2П).

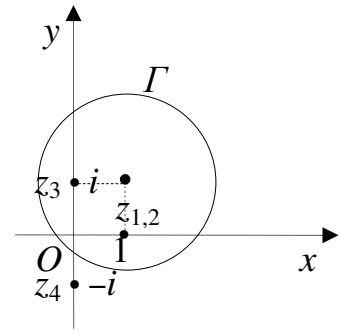


Рисунок 2.12

$$2) \ z_4 = i. \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-1)^2(z+i)(z-i)} = \infty. \quad z_4 = i \text{ – полюс.}$$

Порядок полюса: $\lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)}{(z-1)^2(z+i)(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-1)^2(z+i)} = \frac{1}{4}$. Отже, $z_4 = i$ – простий полюс (ПП).

Знаючи типи особливих точок, знайдемо лишки функції в даних точках:

$$1) \text{ так як } z_{1,2} = 1 \text{ – П2П, то } \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2(z^2+1)} \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2};$$

$$2) \text{ так як } z_4 = i \text{ – ПП, то } \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)}{(z-1)^2(z+i)(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-1)^2(z+i)} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Тоді } \oint_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

Для $z_4 = i$ – ПП, функцію $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ можна представити у вигляді

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}, \text{ тоді } \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}}{(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-1)^2(z+i)} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{\pi i}{2}.$$

2.11 Обчислення невластних інтегралів

Невластні інтеграли дійсної змінної можна знаходити з допомогою лишків:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z), \quad (22)$$

де $z = z_k$ – ізольовані особливі точки функції $f(z)$, які знаходяться над віссю абсцис, а функція $f(z)$ задовольняє умові: $|z| \cdot f(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Якщо ж $z = z_i$ – ізольовані особливі точки функції $f(z)$, які розташовані на осі абсцис і $|z| \cdot f(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} f(z). \quad (23)$$

Приклад 1. Обчислити $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Так як $\frac{z}{1+z^2} \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то можна використовувати вище зазначені формули.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \oint_{\tilde{N}} \frac{dz}{1+z^2} = \oint_{\tilde{N}} \frac{dz}{(z-i)(z+i)}$, C – границя півкруга достатньо великого радіуса, що містить всі особливі точки півплощини.

Особливі точки функції: $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Над віссю абсцис знаходиться точка $z_1 = i$, яка є простим полюсом функції $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$, тоді

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Так як особлива точка знаходиться над віссю абсцис, то, використовуючи формулу (22), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Відповідь: π .

Приклад 2. Обчислити $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$. Так як $\frac{z}{(1+z^2)^2} \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то можна використовувати вище зазначені формули.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \oint_{\tilde{N}} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \oint_{\tilde{N}} \frac{dz}{(z-i)^2(z+i)^2}$, C – границя півкруга, який містить всі особливі точки півплощини.

Особливі точки функції: $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Над віссю абсцис знаходиться точка $z_1 = i$, яка є полюсом другого порядку функції $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$. Тоді,

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{-2}{(z+i)^3} \right] = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{i}{4}.$$

Згідно формули (22), маємо $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 3. Обчислити $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)} \cdot \frac{z}{(z^2+1)(z-1)} \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то можна використовувати формули (22) і (23).

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)} = \oint_N \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)} = \oint_N \frac{dz}{(z-i)(z+i)(z-1)}$, C – границя півкруга, який містить всі особливі точки півплощини.

Особливі точки функції: $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1$.

Над віссю абсцис знаходиться точка $z_1 = i$ (П1П), на осі абсцис – точка $z_3 = 1$ (П1П) функції $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-1)}$. Тоді,

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)(z-1)} = \frac{1}{-2-2i} = \frac{-1+i}{4};$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{(z^2+1)(z-1)} = \frac{1}{2}.$$

Використовуючи формули (22) і (23) отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)} = 2\pi i \left(\frac{-1+i}{4} \right) + \pi i \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2}$.

2.12 Завдання для самостійної роботи

2.12.1 Побудувати область G на комплексній площині (геометричне тлумачення).

1.01. $G: |z+1-zi|=3$.

1.10. $G: |z-1+i|<2$.

1.02. $G: |z-1-i|=2$.

1.11. $G: \operatorname{Re} z > 2$.

1.03. $G: |z+1-i|=1$.

1.12. $G: \operatorname{Im} z \leq -1$.

1.07. $G: |z+2|-|z-1|=3$.

1.13. $G: 0 < \operatorname{Re} z < 2$.

1.04. $G: \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 2$.

1.14. $G: 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$.

1.05. $G: 0 \leq \arg z \leq \pi/4$.

1.15. $G: |z| + \operatorname{Re} z \leq 1$.

1.06. $G: |z-1| + |z+1| = 3$.

1.16. $G: 0 < \arg z < \pi/4$.

1.08. $G: \operatorname{Re} \frac{1}{z} = 2$.

1.17. $G: -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq 0$.

1.09. $G: \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1$.

1.18. $G: |z-2| + |z+2| = 5$.

- 1.19. $G: 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$.
 1.20. $G: |z| = 1 + \operatorname{Re} z$.
 1.21. $G: \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.
 1.22. $G: |2z| > |1 + z|$.
 1.23. $G: |z| < \arg z$, якщо $0 \leq \arg z < 2\pi$.
 1.24. $G: \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z \leq 2$.
 1.25. $G: |2z + 1 - 2i| = 2$.
 1.26. $G: |2z - 1 - i| = 1$.
 1.27. $G: |2z + 1 - i| = 2$.
 1.28. $G: \operatorname{Re}(2z) - \operatorname{Im}(2z) = 1$.
 1.29. $G: \arg z = \pi/4, \operatorname{Re} z \leq 2$.
 1.30. $G: 0 < \operatorname{Re} z \leq 1$.

2.12.2 З'ясувати, чи є функція аналітичною: якщо так, то знайти її похідну в заданій точці.

- | | | | |
|---|-----------------|--|------------------|
| 2.01. $\omega = (\operatorname{Re} z)^2 \cdot e^z$, | $z_0 = -1$. | 2.16. $\omega = (z - 1)^2 + z + i + 1$, | $z_0 = 0$. |
| 2.02. $\omega = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \cdot \sin z$, | $z_0 = 0$. | 2.17. $\omega = (z - 1) \cdot e^{z+i}$, | $z_0 = 1 - i$. |
| 2.03. $\omega = \operatorname{Im} z \cdot \cos z$, | $z_0 = \pi/3$. | 2.18. $\omega = (1 - z) \sin z$, | $z_0 = \pi/4$. |
| 2.04. $\omega = \operatorname{Re} z \cdot e^z$, | $z_0 = 0$. | 2.19. $\omega = e^{-iz^2}$, | $z_0 = i$. |
| 2.05. $\omega = z - \ln z$, | $z_0 = 1$. | 2.20. $\omega = i + e^{-iz}$, | $z_0 = 1 - i$. |
| 2.06. $\omega = 9z - ie^z$, | $z_0 = i$. | 2.21. $\omega = z - e^z$, | $z_0 = -1 - i$. |
| 2.07. $\omega = 8z^2 - \sin z$, | $z_0 = 1 - i$. | 2.22. $\omega = z + \sin z$, | $z_0 = 2i - 1$. |
| 2.08. $\omega = 2z^2 - i(z + 1)$, | $z_0 = -i$. | 2.23. $\omega = (i + 1) + e^z$, | $z_0 = 2i$. |
| 2.09. $\omega = (iz)^4 - i$, | $z_0 = i$. | 2.24. $\omega = i \sin(z + 1)$, | $z_0 = i$. |
| 2.10. $\omega = ze^z + ie^z$, | $z_0 = i$. | 2.25. $\omega = \frac{1}{i} \cos(z - i)$, | $z_0 = i + 1$. |
| 2.11. $\omega = (z - \bar{z}) \cos z$, | $z_0 = 0$. | 2.26. $\omega = \left(\operatorname{Re} \frac{z}{3} \right)^2 \cdot e^{\frac{z}{3}}$, | $z_0 = 2i$. |
| 2.12. $\omega = z \cdot \bar{z} \cdot e^z$, | $z_0 = 1$. | 2.27. $\omega = \operatorname{Re} \left(\frac{z}{2} \right) \operatorname{Im} \left(\frac{z}{2} \right) \cos \left(\frac{z}{2} \right)$, | $z_0 = \pi$. |
| 2.13. $\omega = z \cdot \cos \bar{z}$, | $z_0 = \pi/3$. | 2.28. $\omega = \operatorname{Im} \left(\frac{z}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{z}{2} \right)$, | $z_0 = \pi/6$. |
| 2.14. $\omega = \sin(i + z) + z^2 + 1$, | $z_0 = -1$. | 2.29. $\omega = \operatorname{Re} \left(\frac{z}{2} \right) \cdot e^{\frac{z}{2}}$, | $z_0 = 1$. |
| 2.15. $\omega = i(1 - z) + e^z$, | $z_0 = -i$. | 2.30. $\omega = 2z - \ln(2z)$, | $z_0 = 2$. |

2.12.3 Обчислити інтеграл по заданій кривій.

- 3.01. $\int_{AB} \bar{z} dz$, AB : відрізок прямої, що з'єднує точки $A=0$ і $B=3+2i$.
- 3.02. $\int_{AB} \bar{z} dz$, AB : напівколо $|z|=1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.
- 3.03. $\int_{AB} \operatorname{Im} \bar{z} dz$, AB : радіус-вектор точки $z=1+i$.
- 3.04. $\int_{AB} \frac{z}{z} dz$, AB : відрізок прямої, що з'єднує точки $A=0$ і $B=1+i$.
- 3.05. $\int_{AB} \frac{z}{z} dz$, AB : дуга параболи $y=x^2$, що з'єднує точки $A=0$ і $B=1+i$.
- 3.06. $\int_{AB} \frac{z}{z} dz$, AB : дуга $y=\sqrt{x}$, що з'єднує точки $A=1+i$ і $B=0$.
- 3.07. $\int_{AB} z^3 dz$, AB : відрізок прямої, що з'єднує точки $A=2+4i$ і $B=0$.
- 3.08. $\int_{AB} z^3 dz$, AB : дуга $y=x^2$, що з'єднує точки $A=0$ і $B=2+4i$.
- 3.09. $\int_{AB} z^3 dz$, AB : дуга $y=2\sqrt{2x}$, що з'єднує точки $A=0$ і $B=2+4i$.
- 3.10. $\int_{AB} z^3 dz$, AB : відрізок прямої, що з'єднує точки $A=i$ і $B=1$.
- 3.11. $\oint_{\tilde{A}} z^3 dz$, $\tilde{A}$: коло $|z|=2$.
- 3.12. $\int_{AB} \operatorname{Re} z dz$, AB : радіус-вектор точки $z=2+i$.
- 3.13. $\int_{AB} \operatorname{Im} z dz$, AB : радіус-вектор точки $z=2-i$.
- 3.14. $\int_{AB} x dz$, AB : напівколо $|z|=1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.
- 3.15. $\int_{AB} y dz$, AB : частина кола $|z|=2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.
- 3.16. $\int_{AB} |z| dz$, AB : радіус-вектор точки $z=(-1-i)$.
- 3.17. $\int_{AB} |z| dz$, AB : напівколо $|z|=2$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.
- 3.18. $\int_{AB} |z| \bar{z} dz$, AB : частина кола $|z|=2$, $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$.
- 3.19. $\int_{AB} |z| z dz$, AB : напівколо $|z|=3$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.
- 3.20. $\int_{AB} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, AB : частина кола $|z|=1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

$$3.21. \oint_{\tilde{A}} (z^2 - 5) dz, \quad \tilde{A} : \text{коло } |z - 5| = 1.$$

$$3.22. \oint_{\tilde{A}} (\bar{z} + 1) dz, \quad \tilde{A} : \text{коло } |z| = 1.$$

$$3.23. \oint_{\tilde{A}} i e^z dz, \quad \tilde{A} : \text{коло } |z| = 1.$$

$$3.24. \int_{AB} (\bar{z} + 1) dz, \quad AB : \text{відрізок прямої, що з'єднує точки } A = 1 + i \text{ і } B = 2 - i.$$

$$3.25. \int_{AB} (\bar{z} + 1) dz, \quad AB : \text{напівколо } |z| = 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$3.26. \oint_{\tilde{A}} (5i + 4)(1 + \sin z) dz, \quad \tilde{A} : \text{коло } |z - 1| = 1.$$

$$3.27. \oint_{\tilde{A}} (5i - \cos z) dz, \quad \tilde{A} : \text{коло } |z - i| = 2.$$

$$3.28. \int_{AB} e^z (i + 1) dz, \quad AB : \text{відрізок прямої, що з'єднує точки } A = -i \text{ і } B = -1.$$

$$3.29. \int_{AB} \frac{(z + 1)^2}{\bar{z}} dz, \quad AB : \text{відрізок прямої, що з'єднує точки } A = -i \text{ і } B = 1 + i.$$

$$3.30. \int_{AB} \frac{(z + 1)^2}{\bar{z}} dz, \quad AB : \text{відрізок прямої, що з'єднує точки } A = i \text{ і } B = 1 - i.$$

2.12.4 Розкласти функцію у ряд Лорана в околі вказаної точки (або в кільці).

$$4.01. \varphi = \frac{1}{z - 2}, \quad z_0 = 0. \quad 4.10. \varphi = \frac{4}{z^2 + 2}, \quad z_0 = \sqrt{2}i.$$

$$4.02. \varphi = \frac{1}{z + 1}, \quad z_0 = 1. \quad 4.11. \varphi = \frac{1}{(z - i)(z - 2)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.03. \varphi = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)}, \quad z_0 = 0. \quad 4.12. \varphi = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z - 2)(z^2 + 1)}, \quad z_0 = 2.$$

$$4.04. \varphi = \frac{1}{(z - 1)(z - 3)}, \quad z_0 = 1. \quad 4.13. \varphi = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z - 2)(z^2 + 1)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.05. \varphi = \frac{1}{(z - 2)(z - 4)}, \quad 2 < |z| < 4. \quad 4.14. \varphi = \frac{z}{1 + z^2}, \quad z_0 = i.$$

$$4.06. \varphi = \frac{1}{(z - i)(z - 1)}, \quad z_0 = 1. \quad 4.15. \varphi = \frac{z}{1 + z^2}, \quad z_0 = -i$$

$$4.07. \varphi = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad z_0 = 0. \quad 4.16. \varphi = \frac{z}{(z - 1)(z - i)}, \quad z_0 = 1.$$

$$4.08. \varphi = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad z_0 = i \quad 4.17. \varphi = \frac{2z}{(z - 1)(z + i)}, \quad z_0 = -i.$$

$$4.09. \varphi = \frac{3}{z^2 + 1}, \quad z_0 = i. \quad 4.18. \varphi = \frac{3z}{(z + 1)(z - 1)}, \quad z_0 = 1.$$

- 4.19. $\varphi = z^3 \exp \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$. 4.25. $\varphi = \frac{5}{(z-1)(z-5)}$, $1 < |z| < 5$.
- 4.20. $\varphi = \cos \frac{z}{z-2}$, $z_0 = 2$. 4.26. $\varphi = \frac{1}{2z-1}$, $z_0 = 1$.
- 4.21. $\varphi = \sin \frac{z}{z-i}$, $z_0 = i$. 4.27. $\varphi = \frac{1}{2z+i}$, $z_0 = 0$.
- 4.22. $\varphi = (z-1) \sin \frac{z}{1-z}$, $z_0 = 1$. 4.28. $\varphi = \frac{1}{(2z-1)(z-1)}$, $z_0 = 1$.
- 4.23. $\varphi = e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0 = 1$. 4.29. $\varphi = \frac{1}{(3z-1)(z-1)}$, $z_0 = 1$.
- 4.24. $\varphi = z^2 \exp \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$. 4.30. $\varphi = \frac{1}{(z-1)(3z-2)}$, $z_0 = 1$.

2.12.5 Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної, використовуючи теорему про лишки та за формулою Коші.

- 5.01. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^2+1}$, $\tilde{A} : |z-i|=1$. 5.11. $\oint_{\tilde{A}} \frac{z-1 \sin \frac{2}{z}}{z^2+1} dz$, $\tilde{A} : |z|=2$.
- 5.02. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^2-1}$, $\tilde{A} : |z|=2$. 5.12. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^4+1}$, $\tilde{A} : x^2 + y^2 = 2x$.
- 5.03. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{(z-1)^2(z+2)}$, $\tilde{A} : |z|=3$. 5.13. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^4+1}$, $\tilde{A} : |z-2| = \frac{1}{2}$.
- 5.04. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^4-1}$, $\tilde{A} : |z|=2$. 5.14. $\oint_{\tilde{A}} \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$, $\tilde{A} : |z|=1$.
- 5.05. $\oint_{\tilde{A}} \sin \frac{1}{z} dz$, $\tilde{A} : |z|=1$. 5.15. $\oint_{\tilde{A}} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$, $\tilde{A} : |z|=1$.
- 5.06. $\oint_{\tilde{A}} \sin^2 \frac{1}{z} dz$, $\tilde{A} : |z|=1$. 5.16. $\oint_{\tilde{A}} \frac{\sin \frac{1}{z}}{2\pi i} dz$, $\tilde{A} : |z|=2$.
- 5.07. $\oint_{\tilde{A}} e^{\frac{1}{z}} dz$, $\tilde{A} : |z|=1$. 5.17. $\oint_{\tilde{A}} \frac{1}{2\pi i} \sin^2 \frac{1}{z} dz$, $\tilde{A} : |z|=3$.
- 5.08. $\oint_{\tilde{A}} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz$, $\tilde{A} : |z|=1$. 5.18. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{(z-3)(z^2-1)}$, $\tilde{A} : |z|=2$.
- 5.09. $\oint_{\tilde{A}} \cos \frac{1}{z} \exp \frac{2}{z} dz$, $\tilde{A} : |z|=1$. 5.19. $\oint_{\tilde{A}} \frac{1}{2\pi i} \cdot z^2 \cdot e^{\frac{2}{z}} dz$, $\tilde{A} : |z|=2$.
- 5.10. $\oint_{\tilde{A}} \frac{\sin \frac{2}{z}}{\exp \frac{1}{z}} dz$, $\tilde{A} : |z|=1$. 5.20. $\oint_{\tilde{A}} (1+z) e^{\frac{1}{z-1}} dz$, $\tilde{A} : |z|=3$.

- 5.21. $\oint_{\tilde{A}} (1+z)^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, $\tilde{A} : |z|=3$. 5.26. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{2z^2+3}$, $\tilde{A} : |z+i|=1$.
- 5.22. $\oint_{\tilde{A}} (1+z+z^2) e^{\frac{1}{z-2}} dz$, $\tilde{A} : |z|=3$. 5.27. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{2z^2-3}$, $\tilde{A} : |z-1|=3$.
- 5.23. $\oint_{\tilde{A}} \frac{z dz}{(z-2)(z+i)}$, $\tilde{A} : |z-3|=33$. 5.28. $\oint_{\tilde{A}} \frac{2z dz}{(z-2)^2(2z+i)}$, $\tilde{A} : |z|=4$.
- 5.24. $\oint_{\tilde{A}} \frac{z+1}{z^2+1}$, $\tilde{A} : |z-4|=44$. 5.29. $\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{3z^4-1}$, $\tilde{A} : |z-1|=3$.
- 5.25. $\oint_{\tilde{A}} \frac{z+1}{z^2(z-1)}$, $\tilde{A} : |z-0,1|=0,2$. 5.30. $\oint_{\tilde{A}} \sin \frac{z-1}{z} dz$, $\tilde{A} : |z-i|=0,5$.

ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Гольдфайн И. А. Векторный анализ и теория поля. – ГИФМЛ, 1962.
2. Лаврентьев Н. А., Шабат Б. В. Методы функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.
3. Маркушевич А. И., Маркушевич В. А. Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977.
4. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика. Ч. I, II. – К.: Техніка, 2000.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1985.
6. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2005.
7. Поддубный Г. В. Математический анализ для радиоинженеров. – М.: Наука, 1978.
8. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1960.
9. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1974.

Додаткова:

10. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. II. – М.: Высшая школа, 1970.
11. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. II. – М.: Наука, 1973.
12. Лунгу К. Н., Норин В. П., Письменный Д. Т. и др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс; под ред. С. Н. Федина. 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.
13. Лаптев Г. Ф. Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975.
14. Ладон И. Ф. Основы векторного исчисления с приложениями к теории электромагнитного поля. – Ленинград: Издание ВЭТА, 1938.
15. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Векторный анализ. – М.: Наука, 1978.
16. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1973, 1979.
17. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – ГИФМЛ, 1962.
18. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II, III. Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1971
19. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для вузов. – М.: Наука, 1967.
20. Толстов Г. П. Элементы математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1974.

21. Буслаєв А. Г. Верховський А. Г. Стрелковська І. В. Харсун О. М. Розрахункові завдання з вищої математики. Ч. I, II. Методичні вказівки та завдання. – О.: ОНАЗ. 2001.
22. Верховський А. Г. Зиньков П. И. Ромащенко Н. В. Паскаленко В. М. Математический анализ в теории электрических цепей. Методические указания и контрольные задания. – О.: ОНАС. 1985.
23. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1973.
24. Паскаленко В. М., Стрелковська І. В., Шкуліпа І. В. Комплексні числа. Навчальний посібник для студентів технічних факультетів усіх форм навчання. – О.: ОНАЗ, 2005.