

Кафедра вищої математики

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

*Теорія множин, математична логіка,
графи, теорія чисел, алгебраїчні структури.*

Методичні вказівки для самостійного розв'язування індивідуальних
домашніх завдань для студентів технічних спеціальностей

Укладачі: проф. Стрелковська І.В., доц. Буслаєв А.Г., доц. Вишневська В.М.,
ст. виклад. Харсун О.М., виклад. Кольцова Л.Л.

У методичному посібнику наведено приклади розв'язання задач з дискретної математики. Розглянуто наступні теми: множини, математична логіка, графи, теорія чисел, алгебраїчні структури. Посібник призначений для полегшення самостійного розв'язання індивідуальних завдань з дискретної математики. Наведено список літератури. Запропоновані приклади можуть також бути використані на практичних заняттях з вищої математики. Посібник буде корисним для студентів денної та заочної форм навчання технічних спеціальностей.

Навчальний посібник розглянуто і схвалено методичною радою факультету ТКС.

Протокол № 9 від 22 квітня 2008 р.

Декан факультету ТКС

доц. О.В. Онацький

Методичний посібник розглянуто і схвалено на засіданні кафедри вищої математики.

Протокол № 8 від 6 березня 2008 р.

Зав. кафедрою

доц. А.Г. Буслаєв

ЗМІСТ

1. Структура та зміст залікового модуля.....	3
1.1. Перелік знань та вмінь.....	5
1.2. Перелік практичних робіт залікового модуля.....	6
2. Теорія множин.....	7
2.1. Практичні заняття з теми «Теорія множин».....	7
2.2. Тести для самоперевірки.....	13
2.3. Відповіді до тестових завдань «Теорія множин».....	15
3. Математична логіка.....	16
3.1. Практичні заняття з теми «Математична логіка».....	16
3.2. Тести для самоперевірки.....	18
3.3. Відповіді до тестових завдань «Математична логіка».....	20
4. Теорія графів.....	21
4.1. Практичні заняття з теми «Теорія графів».....	21
4.2. Тести для самоперевірки.....	29
4.3. Відповіді до тестових завдань «Теорія графів».....	31
5. Теорія чисел.....	32
5.1. Практичні заняття з теми «Теорія чисел».....	32
5.2. Тести для самоперевірки.....	41
5.3. Відповіді до тестових завдань «Теорія чисел».....	42
6. Алгебраїчні структури.....	43
6.1. Практичні заняття з теми «Алгебраїчні структури».....	43
6.2. Тести для самоперевірки.....	45
6.3. Відповіді до тестових завдань «Алгебраїчні структури».....	46
7. Література.....	47

1. СТРУКТУРА ТА ЗМІСТ ЗАЛІКОВОГО МОДУЛЯ

Змістовний модуль	Лекції годин	Заняття		Самостійна та індивідуальна робота
		практичні	лабораторні	
1. Теорія множин	8	12	–	20
2. Математична логіка	8	12	–	20
3. Теорія графів.	8	12	–	20
4. Алгебраїчні структури.	8	12	–	20
Разом	32	48	–	80

Зміст залікового модуля

1. Теорія множин.

- 1.1. Множини, підмножини, операції над множинами. Способи задання множин.
- 1.2. Операції над підмножинами деякої множини.
- 1.3. Бінарні відношення. Перетини і проекція.
- 1.4. Композиція і симетризація відношень. Функціональні відношення.
- 1.5. Відображення. Відображення в себе.
- 1.6. Відношення еквівалентності, толерантності, порядку.
- 1.7. Потужність множини.

2. Математична логіка.

- 2.1. Алгебра висловлень. Формули алгебри висловлень (ФАВ).
- 2.2. Семантика числення висловлень.
- 2.3. Класифікація (ФАВ). Рівносильність ФАВ.
- 2.4. Основні закони алгебри висловлень.
- 2.5. Бульові функції. Способи задання.
- 2.6. Елементарні бульові функції. Властивості.
- 2.7. Повні системи функцій. Базис. Теорема Поста – Яблонського.
- 2.8. Диз'юнктивні нормальні форми. Кон'юнктивні нормальні форми.
- 2.9. Алгебра Жегалкіна та її основні закони. Функція Вебба і штрих Шеффера.
- 2.10. Мінімізація бульових функцій методом Квайна–Мак–Класкі.
- 2.11. Багатозначна бульова функція.

3. Теорія графів.

- 3.1. Способи задання графів. Типи скінчених графів. Степені вершин.
- 3.2. Ізоморфізм графів. Графи і відношення. Підграфи.
- 3.3. Маршрути. Ланцюги і цикли. Зв'язність графів. Компоненти зв'язності.
- 3.4. Метрика графа.
- 3.5. Задача про найкоротший ланцюг.
- 3.6. Ейлерові графи.
- 3.7. Цикломатика графів. Циклові ребра і перешийки. Цикломатичне число.
- 3.8. Дерева. Остовне дерево графа.
- 3.9. Транспортні мережі. Сітьові графіки. Потік. Розріз. Пропускна здатність розрізу.
- 3.10. Алгоритм обчислення максимального потоку в транспортній мережі.
- 3.11. Алгоритм знаходження критичного шляху.

4. Елементарна теорія чисел і груп.

- 4.1. Конгруенція. Властивості конгруенцій.
- 4.2. Лишки. Класи лишків. Дії над класами лишків. Зведена система лишків.
- 4.3. Функція Ейлера. Конгруенція першого степеня.

- 4.4. Групи. Скінчена група, її порядок.
- 4.5. Ізоморфізм. Підгрупа, циклічна підгрупа.
- 4.6. Класи суміжності.
- 4.7. Кільце. Поле Галуа. Поняття ідеалу.

1.1. Перелік знань та вмінь

Студент повинен знати і володіти наступними поняттями.

1. Поняття множини і операцій над множинами.
2. Основи теорії відносин між елементами множин. Алгебраїчні операції над множинами та їх властивості.
3. Бінарні відношення, перетини, проекція. Відображення.
4. Елементи математичної логіки. Алгебра висловлень, основні закони.
5. Бульові функції. Властивості. Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми. Мінімізація бульових функцій.
6. Графи і відношення. Метрика графа. Цикломатика графів. Транспортні мережі. Сітьові графіки.
7. Конгруенція, групи, кільця, поля.

Студент повинен вміти:

1. Виконувати операції над множинами і підмножинами. Зображати множини за допомогою діаграм Венна. Схематично зображати бінарні відношення. Знаходити їх властивості і композицію. Вміти встановлювати порядок в множинах.
2. Вміти описувати систему, що досліджується, за допомогою висловлень, використовувати логічні символи і правильно робити логічні висновки. Знати і володіти алгеброю логіки. Виконувати еквівалентні перетворення формул алгебри висловлень. Зводити бульові функції до ДНФ і КНФ, вміти їх мінімізувати.
3. Вміти зображати задачі мовою графів. Встановлювати ізоморфізм графів. Знаходити метричні характеристики графів. Вміти розраховувати потік у транспортних і сітьових мережах, знаходити критичний шлях.
4. Вміти проводити дії над класами лишків. Розв'язувати конгруенції першого степеня та системи конгруенцій. Визначати тип алгебраїчної структури.
5. Орієнтуватися в науково-технічній літературі і самостійно освоювати нові методи оптимізації дискретних моделей систем зв'язку, телекомунікації і т. і.
6. Застосовувати методи дискретної математики для дослідження складних систем.

1.2. Перелік практичних робіт залікового модуля

№ пп.	Теми занять	№ теми	Год.
Тема: Теорія множин			
1	Приклади задання множин. Операції над множинами.	1.1	2
2	Властивості операцій. Бінарні відношення.	1.2	2
3	Перетин. Композиція відношень.	1.3	2
4	Функціональні відношення. відображення.	1.4	2
5	Відношення еквівалентності, порядку.	1.7	2
6	Потужність множин.	1.7	2
7	КР 1. Теорія множин.	1	2
Тема: Математична логіка			
8	Алгебра висловлень. Бульові функції.	2.1	2
9	Елементарні бульові функції. Базис.	2.5	2
10	Алгебра Жегалкіна, функція Вебба, штрих Шеффера.	2.9	2
11	Мінімізація бульових функцій.	2.10	2
12	КР 2. Математична логіка.	2	2
Тема: Теорія графів.			
13	Способи задання графів. Перехід від однієї форми задання до іншої.	3.1	2
14	Маршрути, ланцюги. Метричні характеристики графів.	3.4	2
15	Ейлерові графи. Задачі пошуку маршрутів.	3.6	2
16	Планарність, зв'язність, числові характеристики графів.	3.7	2
17	Транспортні мережі. Мережні графіки.	3.9	2
18	КР 3. Теорія графів.	3	2
Тема: Алгебраїчні структури			
19	Алгоритм Евкліда. Розв'язок конгруенцій першого степеня та систем конгруенцій.	4.1	2
20	Групи. Групи підстановок.	4.4	2
21	Кільце лишків. Кільце многочленів. Поле Галуа.	4.7	4
22	КР 4. Алгебраїчні структури.	4	4

2. ТЕОРІЯ МНОЖИН

2.1. Практичні заняття з теми «Теорія множин»

Приклад 1. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо $A = \{2, 5, 11\}$, $B = \{2, 3, 7\}$.

Розв'язок

- a) $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$;
- b) $A \cap B = \{2\}$;
- c) $A \setminus B = \{5, 11\}$;
- d) $B \setminus A = \{3, 7\}$.

Приклад 2. Дані множини A , B і C : $A = \{2, 3, 5, 6, 9, 10, 11\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $C = \{3, 4, 13\}$.

Визначити наступні множини:

- a) $A \cup (B \cap C)$;
- b) $(A \cup B) \setminus C$;
- c) $A \oplus C$;
- d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;
- e) $(A \cap B) \cup (B \cup C) \cup (A \cap C)$;
- f) $B \times C$.
- g) виписати всі підмножини множини C .

Розв'язок

- a) $B \cap C = \{3, 4\}$, тому $A \cup B \cap C = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11\}$;
- b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$, $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$;
- c) $A \oplus C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{2, 5, 6, 9, 10, 11\} \cup \{4, 13\} = \{2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13\}$;
- d) Так як $(A \setminus B) = \{5, 6, 9, 10, 11\}$, $(B \setminus C) = \{1, 2, 8\}$, то
 $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$;
- e) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = \{2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{3\} = \{2, 3, 4\}$;
- f) $B \times C = \{(1, 3); (1, 4); (1, 13); (2, 3); (2, 4); (2, 13); (3, 3); (3, 4); (3, 13); (4, 3); (4, 4); (4, 13); (8, 3); (8, 4); (8, 13)\}$;
- g) $S = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{13\}, \{3, 4\}, \{3, 13\}, \{4, 13\}, \{3, 4, 13\}\}$.

Приклад 3. Довести тотожність або спростити вираз:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

b) $\overline{A \cup C} \cup (B \cup B \cap C) \cap (\overline{B \cup B \cup C})$.

Розв'язок

a) Перший спосіб. Застосуємо властивості дій над множинами.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= (A \cap A) \cup (A \cap C) \cup (B \cap A) \cup (B \cap C) = \\ &= A \cup (A \cap C) \cup (B \cap A) \cup (B \cap C) = (A \cap \Omega) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C) = \\ &= A \cap (\Omega \cup C \cup B) \cup (B \cap C) = (A \cap \Omega) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C), \end{aligned}$$

де Ω – універсальна множина. Потрібне доведено.

Другий спосіб. Доведемо цю тотожність застосовуючи відношення належності. Щоб переконатися у справедливості тотожності

$A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, візьмемо деякий елемент $x \in A \cup (B \cap C)$, тоді $x \in A$ або $x \in B \cap C$. Якщо $x \in A$, то x належить об'єднанню A з будь-якою множиною, тобто $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, тому, x є елемент перетину множин $A \cup B$ і $A \cup C$, звідки випливає, що $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Якщо $x \in B \cap C$, то $x \in B$ і $x \in C$, тому $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, тоді і в цьому випадку x є елемент перетину тих же множин. Аналогічно доводиться зворотній напрям. Задана тотожність доведена.

Це відношення можна довести також геометрично. Для цього накреслимо відповідні круги області Ейлера-Венна для лівої та правої частин тотожності й з'ясуємо збігаються вони чи ні. Якщо області збігаються, то тотожність справедлива, а при розбіжності вона не має місця (див. рис. 2).

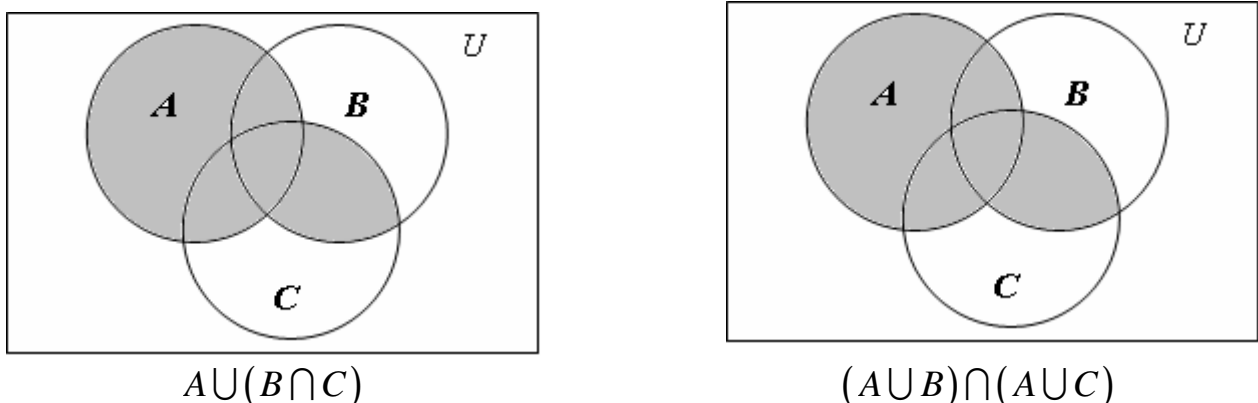


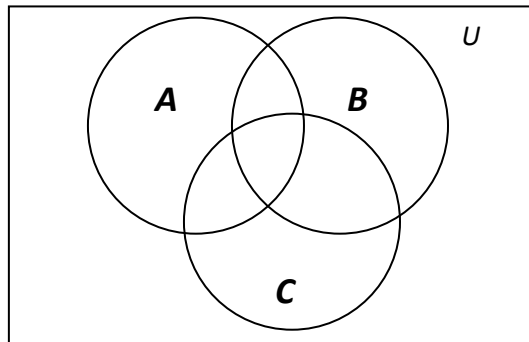
Рис. 2. Круги Ейлера-Венна для доведення тотожності
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) Спростимо вираз $\overline{A \cup C} \cup (B \cup B \cap C) \cap (\overline{B \cup B \cup C})$. Так, як

$$\begin{aligned}
 (B \cup B \cap C) \cap (\bar{B} \cup \overline{B \cup C}) &= (B \cap \bar{B}) \cup (B \cap (\overline{B \cup C})) \cup (B \cap C) \cap \bar{B} \cup \\
 &\cup (B \cap C) \cap (\overline{B \cup C}) = \emptyset \cup B \cap (\overline{B \cup C}) \cup B \cap C \cap \bar{B} \cup B \cap C \cap \overline{B \cup C} = \\
 &= B \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cup B \cap C \cap \bar{B} \cup B \cap C \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset, \text{ то } \\
 \overline{A \cup C} \cup (B \cup B \cap C) \cap (\bar{B} \cup \overline{B \cup C}) &= A \cap \bar{C} \cup \emptyset = A \cap \bar{C}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $A \cap \bar{C}$.

Приклад 4. На діаграмі Ейлера-Венна 3-х множин A, B, C

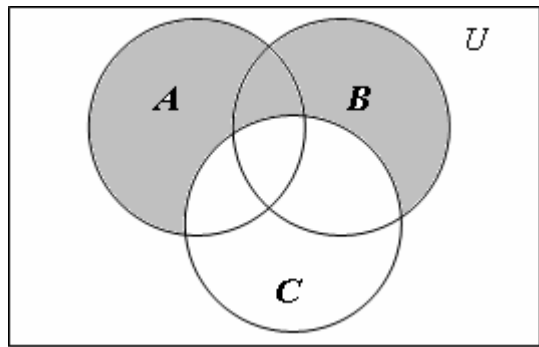


указати точки, що належать множині $((A \cup B) \setminus C) \cap \bar{A}$.

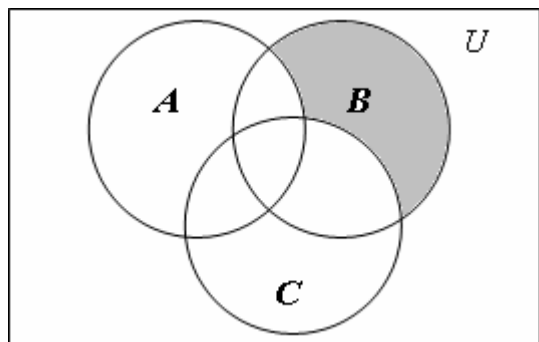
Розв'язок

Послідовно знаходимо:

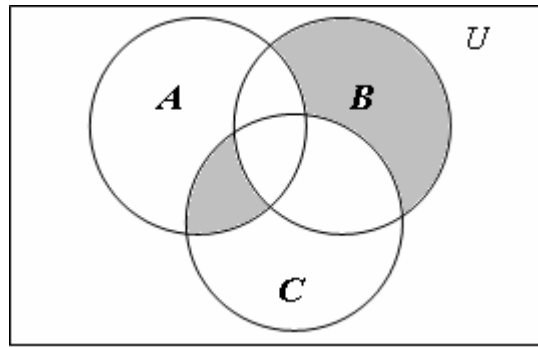
$$(A \cup B) \setminus C$$



$$((A \cup B) \setminus C) \cap \bar{A}$$

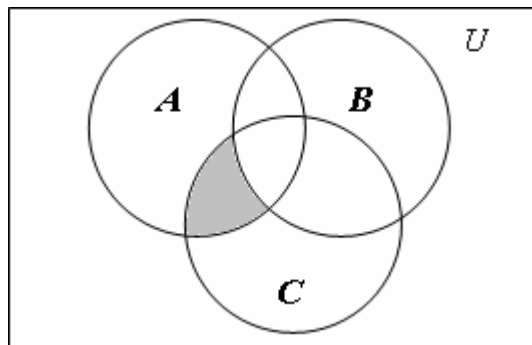


Приклад 5. Опишіть множини, що відповідають зафарбованій частині діаграми Ейлера-Венна

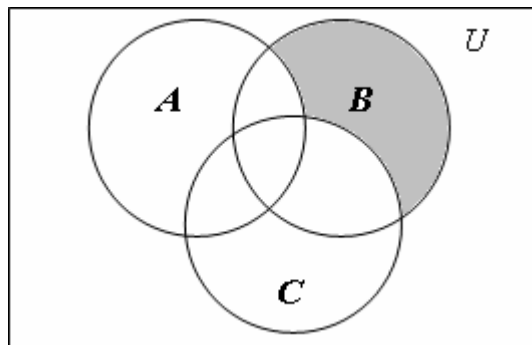


Розв'язок

Послідовно знаходимо:



$$(A \cap C) \setminus B,$$



$$\overline{(A \cup C)} \cap B.$$

Тому відповідь така: $(A \cap C) \setminus B \cup \overline{(A \cup C)} \cap B$.

Приклад 6. Дано множини: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{d, e, f\}$.

Знайти:

- a) $A \times B \times C$;
- b) $(A \times B \times C)^{-1}$;
- c) $(A \times B) \times C$.

Розв'язок

- a) $A \times B \times C = \{(a, 3, d), (a, 3, e), (a, 3, f), (a, 4, d), (a, 4, e), (a, 4, f), (b, 3, d), (b, 3, e), (b, 3, f), (b, 4, d), (b, 4, e), (b, 4, f), (c, 3, d), (c, 3, e), (c, 3, f), (c, 4, d), (c, 4, e), (c, 4, f)\}.$
- b) $(A \times B \times C)^{-1} = \{(d, 3, a), (e, 3, a), (f, 3, a), (d, 4, a), (a, 4, a), (f, 4, a), (d, 3, b), (e, 3, b), (f, 3, b), (d, 4, b), (e, 4, b), (f, 4, b), (d, 3, c), (e, 3, c), (f, 3, c), (d, 4, c), (e, 4, c), (f, 4, c)\}.$
- c) $(A \times B) \times C = \{(a, 3), (a, 4), (b, 3), (b, 4), (c, 3), (c, 4), \} \times C =$
 $= \{((a, 3), d), ((a, 3), e), ((a, 3), f), ((a, 4), d), ((a, 4), e), ((a, 4), f), ((b, 3), d), ((b, 3), e), ((b, 3), f), ((b, 4), d), ((b, 4), e), ((b, 4), f), ((c, 3), d), ((c, 3), e), ((c, 3), f), ((c, 4), d), ((c, 4), e), ((c, 4), f)\}.$

Приклад 7. На множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення

$$R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Необхідно:

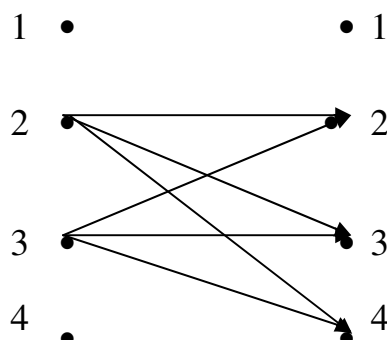
- a) побудувати матрицю і графік відношення R ;
 b) побудувати відношення $R^2 \cap R^{-1}$;
 c) побудувати переріз відношення R по елементу 2;
 d) визначити, які властивості має відношення R .

Розв'язок

a) Матриця відношення R має вигляд

R	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	0	0	0

Схематичне зображення відношення R



b) Знайдемо відношення $R^2 = R \times R$.

Так як $R^2 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$, то $R^2 = R$.

Знайдемо відношення R^{-1}

$$R^{-1} = \{(2, 2), (3, 2), (4, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$$

тому $R^2 \cap R^{-1} = \{(2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

c) $R(2) = \{2, 3, 4\}$.

d) Так як $(1, 1) \notin R$, то відношення R – не рефлексивне ($R \subseteq A \times A$ рефлексивне, якщо для кожного $a \in A$ виконується aRa).

Відношення R є транзитивним (R транзитивне, якщо із a_1Ra_2 і a_2Ra_3 випливає a_1Ra_3).

Відношення R не буде симетричним (так як із a_1Ra_2 не випливає a_2Ra_1 , тобто $R \neq R^{-1}$).

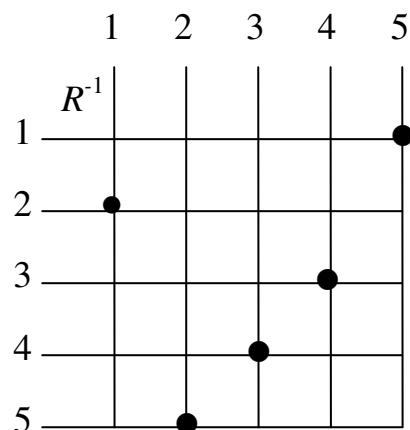
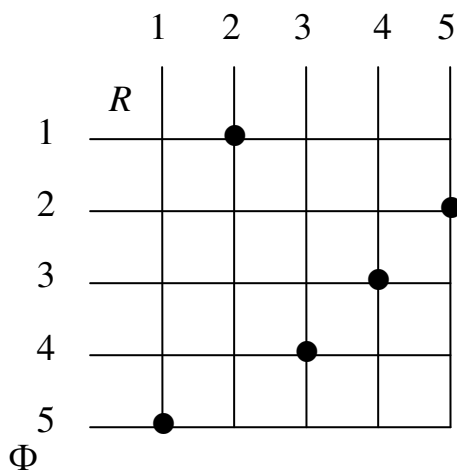
Відношення R не є асиметричним і не є антисиметричним так як не виконуються відповідно умови $R \cap R^{-1} = \emptyset$ і $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$, де Δ_A – діагональ множини A .

Приклад 8. Знайти функції f і f^{-1} , які відповідають відношенням R і R^{-1} . Перевірити, що $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_A$, де 1_A – тотожне відображення множини A на себе а символ « $\circ$ » означає послідовне виконання відображень f і f^{-1} . Накреслити схематичне зображення відношень R і R^{-1} .

$$R = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 1)\}.$$

Розв'язок

Графіки відношень R і R^{-1} мають вигляд



Функції $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

тому

$$f \circ f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 1_A;$$

$$f^{-1} \circ f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 1_A.$$

Приклад 9. Встановити, чи є відношення R ,

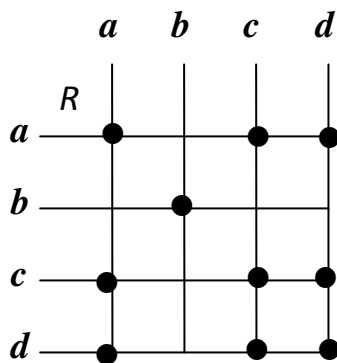
$$R = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\},$$

яке задано на множині $A = \{a, b, c, d\}$, відношенням часткового порядку? Якщо так, то записати його в матричному вигляді.

Розв'язок

Відношення R буде відношенням часткового порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне та транзитивне, тобто, якщо виконуються співвідношення: aRa для будь якого $a \in A$; (a, b) і $(b, a) \in R$; з співвідношень aRb , bRc випливає співвідношення aRc .

Перевіримо виконання цих умов по графіку і таблиці.



R	a	b	c	d
a	1		1	1
b		1		
c	1		1	1
d	1		1	1

Бачимо, що вони виконуються.

2.2. Тести для самоперевірки

- Дана множина $\{x: x - \text{ціле і } x^2 \leq 25\}$. Яка з наведених множин співпадає з вихідною множиною?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;
 c) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$; d) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Дана множина $\{x: x - \text{додатне парне ціле число і менше за } 14\}$. Яка з наведених множин співпадає з вихідною множиною?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; b) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$;
 c) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; d) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

3. Дана множина $\{a\}$. Які з наведених множин вичерпують всі підмножини даної множини?

Можливі варіанти відповідей:

a) $\emptyset, \{a\}$; b) $\{a\}$; c) $\{0, a\}$; d) $\emptyset, \{0, a\}$.

4. Дана множина $\{a, b\}$. Які з наведених множин вичерпують всі підмножини даної множини?

Можливі варіанти відповідей:

a) $\{a\}, \{b\}$; b) $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$; c) $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$; d) $\emptyset, \{a\}, \{b\}$.

5. Скільки елементів у множині $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

6. Скільки елементів у множині $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

7. Скільки елементів у множині $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

a) 3; b) 4; c) 6; d) 7.

8. Скільки елементів у множині $\{\emptyset, \{\emptyset\}, a, v, \{a, v\}, \{a, v, \{a, v\}\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

a) 6; b) 7; c) 9; d) 10.

9. Скільки елементів у множині $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

a) 3; b) 4; c) 5; d) 6.

10. Яка з наведених множин буде об'єднанням множин $A = \{1, 2, 6, 7\}$ і $B = \{2, 3, 5, 6\}$?

Можливі варіанти відповідей:

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$;
c) $\{2, 3, 5, 6\}$; d) $\{2, 6\}$.

11. Яка з наведених множин буде перетином множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$?

Можливі варіанти відповідей:

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$; b) $\{1, 3, 5\}$;
c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

12. Яка з наведених множин буде різницею множин $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ і $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$?

Можливі варіанти відповідей:

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $\{2, 4, 6\}$; c) $\{1, 7\}$; d) $\emptyset$.

13. Яка з наведених множин буде симетричною різницею множин $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ і $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$?

Можливі варіанти відповідей:

a) $\{1, 3, 5, 7\}$; b) $\{2, 4, 6\}$; c) $\{1, 7\}$; d) $\emptyset$.

14. Яка з наведених множин буде доповненням множини $A = \{x: x - \text{додатне парне число}\}$ до універсуму $\Omega = \{x: x - \text{додатне ціле число}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\bar{A} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$; b) $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$;
 c) $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$; d) $\bar{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, \dots\}$.

15. Дано три множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Яка з наведених множин буде доповненням множини $A \cap (B \cup C)$ до універсуму $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\{2, 4, 5, 6, 7\}$; b) $\{1, 3, 8, 9, 10\}$;
 c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; d) $\{4, 5, 6, 9, 10\}$.

16. Яка з наведених множин буде декартовим добутком $A \times B$ множин $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{a, b\}$?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$;
 b) $\{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$;
 c) $\{\{1, 2, 3\}, \{a, b\}\}$;
 d) $\{\{A\}, \{B\}\}$.

17. Нехай $A = \emptyset$. Яка з поданих множин є множиною всіх підмножин множини A ?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\{\emptyset\}$; b) $\emptyset$; c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; d) $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$.

18. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$. Яка з множин є булеаном вихідної множини?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
 b) $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$;
 c) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
 d) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3, 1\}\}$.

19. Яке з наступних тверджень буде хибним?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $A \cup \emptyset = A$; b) якщо $A \subseteq B$, то $A \cup B = A$;
 c) $A \setminus \emptyset = A$; d) якщо $A \cup B = A$, то $B \subseteq A$.

20. Нехай $A = \{2, 3, 4\}$, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Будь-яка підмножина множини $A \times B$ буде бінарним відношенням. Яке бінарне відношення “елемент $x \in A$ є дільник елемента $y \in B$ ” буде правильним?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$;
 b) $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$;
 c) $\{(2, 4), (2, 6), (3, 6)\}$;
 d) $\{(4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$.

2.3. Відповіді до тестових завдань «Теорія множин»

- 1) d; 2) b; 3) a; 4) c; 5) b; 6) a; 7) b; 8) a; 9) a; 10) b; 11) b; 12) c; 13) a; 14) c; 15) b;
 16) b; 17) a; 18) d; 19) b; 20) b.

3. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

3.1. Практичні заняття з теми «Математична логіка»

Пример 1. Бульова функція задана формулою алгебри логіки

$$\varphi(x, y, z) = (x \vee y) \rightarrow y \oplus z.$$

Необхідно задати цю функцію:

- 1) таблицею істинності;
- 2) вектором значень;
- 3) порядковим номером;
- 4) номерами наборів, на яких $\varphi = 1$;
- 5) картою Карно;
- 6) графічно;
- 7) ДДНФ і ДКНФ (досконалою диз'юнктивною і кон'юнктивною нормальними формами).

Розв'язок

1)

x	y	z	$x \vee y$	$y \oplus z$	φ
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

2) $\varphi(x, y, z) = (11100110)$;

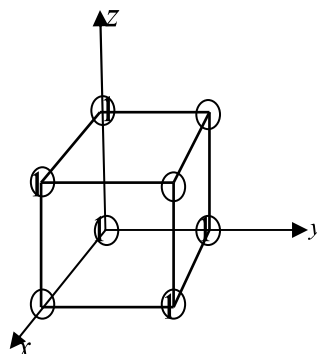
3) $n = 1 \cdot 2 + 2^2 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 230$;

4) $\varphi = \bigvee_1 (0, 1, 2, 5, 6)$;

5)

$xy \backslash z$	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1			1

6)



7) Функція дорівнює 1 на наборах (000), (001), (010), (101), (110), тому її ДДНФ має вигляд

$$x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^0 z^1 \vee x^0 y^1 z^0 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^0 = \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} z \vee \overline{x} y \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z} \vee x y \overline{z}.$$

Функція дорівнює нулю на наборах (011), (100), (111), тому її ДКНФ має вигляд

$$(x^0 \vee y^1 \vee z^1)(x^1 \vee y^0 \vee z^0)(x^1 \vee y^1 \vee z^1) = (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$

Приклад 2. Перевірити на повноту систему булевих функцій

$$\{xy \vee xz \vee yz; x \oplus y \oplus z; 1\}.$$

Розв'язок

Перевірити на повноту цю систему функцій можна за допомогою таблиці Поста. Щоб скласти таблицю Поста необхідно з'ясувати, чи належить функція з даної множини до кожного із класів Поста.

Складемо таблицю істинності функції $\varphi_1(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$

x	y	z	xy	xz	yz	φ_1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

По таблиці встановлюємо, що функція $\varphi_1(x, y, z)$ зберігає константу 0, зберігає константу 1 і є самодвоїстою, тому що кожне значення функції є запереченням симетричного йому значення. Функція є монотонною, тому що зображена формулою бульової алгебри без інверсій.

Щоб знайти многочлен Жегалкіна функції φ_1 складемо ДДНФ і замінимо кожен диз'юнкцію на суму по модулю 2, а інверсію $\overline{x}$ на $x \oplus 1$.

Тоді

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz = (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz = \\ &= \underline{xyz} \oplus yz \oplus \underline{xyz} \oplus xz \oplus \underline{xyz} \oplus xy \oplus \underline{xyz} = xy \oplus xz \oplus yz. \end{aligned}$$

Так як многочлен Жегалкіна функції містить кон'юнкції змінних, доходимо до висновку, що функція є нелінійною.

Складемо таблицю істинності функції $\varphi_2(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$

x	y	z	φ_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

По таблиці встановлюємо, що функція φ_2 зберігає константу 0, не зберігає константу 1 і є несамоодвією.

З огляду на те, що $100 \leq 111$, але $\varphi(1, 0, 0) > \varphi(1, 1, 1)$, доходимо висновку, що функція є немонотонною. Функція $\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$ є лінійною, оскільки задається многочленом Жегалкіна, що не містить кон'юнкцій змінних.

Функція $\varphi_3 = 1$ не зберігає константу 0, є несамоодвією, монотонною й лінійною.

За результатами досліджень складемо таблицю Поста

Класи Поста функції	P_0	P_1	S	L	M
$x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z$	+	+	+	–	+
$x \oplus y \oplus z$	+	–	–	+	–
1	–	+	–	+	+

де: P_0 – клас функцій, що зберігають константу 0, P_1 – клас функцій, що зберігають константу 1, S – клас самоодвістих функцій, L – клас лінійних функцій, M – клас монотонних функцій.

Оскільки в кожному стовпці таблиці є знак мінус, то для кожного класу Поста в даній системі є хоча б одна функція, що цьому класу Поста не належить. По теоремі Поста така система булевих функцій є функціонально повною.

3.2. Тести для самоперевірки

1. Яке з наступних висловлень буде хибним?

- а) якщо $2^2 = 4$, то $3^2 = 9$; б) якщо $2^2 = 5$, то $3^2 = 9$;
 с) якщо $2^2 = 5$, то $3^2 = 10$; д) якщо $2^2 = 4$, то $3^2 = 10$.

Можливі варіанти відповідей:

а), б), с), д).

2. Висловлення може бути:

Можливі варіанти відповідей:

- а) алгоритмічним; б) математичним;
 с) істинним; д) графічним.

3. Законом алгебри висловлень є:

Можливі варіанти відповідей:

- a) правило Крамера; b) правило де Моргана;
c) правило буравчика; d) правило Лопіталя.

4. Логічною операцією є:

Можливі варіанти відповідей:

- a) ділення; b) добування кореня;
c) стрілка Пірса; d) стрілка годинника.

5. Яке з наступних тверджень буде правильним?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $x \vee x = \bar{x}$; b) $x \wedge x = x^2$; c) $x \downarrow x = \bar{x}$; d) $x \wedge x = 0$.

6. Якщо $x = 1$, а $y = 0$, то яка функція буде істиною?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $x \wedge y$; b) $y \rightarrow x$; c) $x \rightarrow y$; d) $x \downarrow y$.

7. Якщо $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, то яка функція буде хибною?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $x \rightarrow z$; b) $x \vee y \rightarrow z$; c) $x \wedge y \rightarrow \bar{z}$; d) $\overline{x \vee y \vee z}$.

8. Яке з наступних тверджень буде правильним?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = x \wedge y$; b) $(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = x \vee y$;
c) $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = x \wedge y$; d) $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \bar{x} \vee \bar{y}$.

9. Яка система функцій буде повною?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\{\wedge, \leftarrow\}$; b) $\{\wedge, \oplus\}$; c) $\{\wedge, \neg\}$; d) $\{\wedge, \vee\}$.

10. Яке з тверджень буде першим дистрибутивним законом?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $x_1(x_2 \vee x_3) = \overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_3}$; b) $x_1(x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3$;
c) $x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$; d) $x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)$.

11. Яке з тверджень буде законом поглинання?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$; b) $x_1 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_1$;
c) $x_1(x_1 \vee x_2) = \bar{x}_1$; d) $x_1(x_1 \vee x_2) = x_2$.

12. Який вираз буде диз'юнктивною нормальною формою?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\frac{x_1}{x_2} \vee x_3$; b) $x_1 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_3$;
c) $1 \vee x_1 \vee x_2 x_3$; d) $0 \vee x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

13. Який вираз буде кон'юнктивною нормальною формою?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $x_1x_2 \vee x_3x_4$; b) $x_1 \vee x_1x_2 \vee x_3$;
 c) $(x_1 \vee x_2)\overline{x_3}$; d) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3x_4 \vee x_2)$.

14. Який вираз буде досконалою диз'юнктивною нормальною формою?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1x_2x_3}$; b) $x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1x_2}$;
 c) $x_1x_2x_2 \vee x_1x_1x_2$; d) $1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_2$.

15. Який вираз буде досконалою кон'юнктивною нормальною формою?

Можливі варіанти відповідей:

- a) $\overline{x_1x_2x_3} \vee x_1x_2x_3$; b) $\overline{x_1x_2x_3} \vee x_1x_2$;
 c) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2})$; d) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$.

16. Бульова алгебра побудова з використанням:

Можливі варіанти відповідей:

- a) сталої 1, диз'юнкції, кон'юнкції;
 b) диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення;
 c) імплікації, заперечення, сталої 0;
 d) диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення.

17. Алгебра Жегалкіна побудована з використанням:

Можливі варіанти відповідей:

- a) сталої 0, сталої 1, диз'юнкції;
 b) додавання за модулем 2, сталої 1;
 c) кон'юнкції, додавання за модулем 2, сталої 1;
 d) кон'юнкції, диз'юнкції, додавання за модулем 2.

18. Алгебра Вебба побудована за допомогою кількості операцій:

Можливі варіанти відповідей:

- a) однієї; b) двох; c) трьох; d) чотирьох.

19. Алгебра Шеффера побудована за допомогою кількості операцій:

можливі варіанти відповідей:

- a) однієї; b) двох; c) трьох; d) чотирьох.

20. Метод Квайна-Мак-Класкі мінімізації булевих функцій побудований на основі операцій:

Можливі варіанти відповідей:

- a) поглинання та відбиття; b) додавання та віднімання;
 c) склеювання та поглинання; d) склеювання та розрізування.

3.3. Відповіді до тестових завдань «Математична логіка»

1) d; 2) c; 3) b; 4) c; 5) c; 6) b; 7) c; 8) a; 9) d; 10) b; 11) a; 12) b; 13) c; 14) a; 15) d;
 16) b; 17) c; 18) a; 19) a; 20) c.

4. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

4.1. Практичні заняття з теми «Теорія графів»

Приклад 1. Орграф $G(X, U)$ заданий списком:

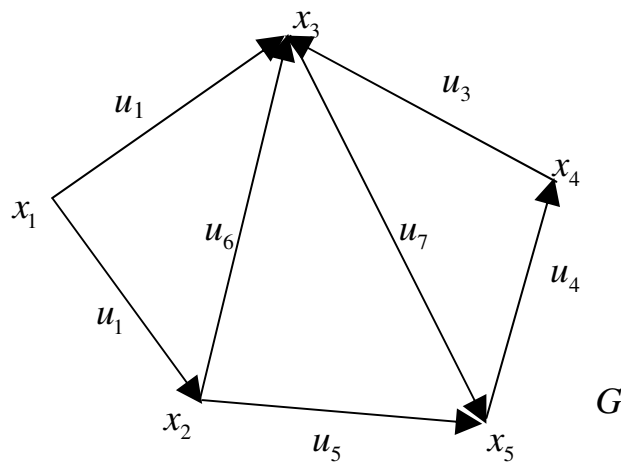
$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\};$$

$$U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_4, x_3), (x_5, x_4), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_3, x_5)\}.$$

Задати його геометричним та матричним способами.

Розв'язок

a) Геометричний спосіб задання орграфа $G(X, U)$:



b) Матричний спосіб задання орграфа $G(X, U)$.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}.$$

Матриця суміжності:

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Матриця інцидентності:

$$B(G) = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Приклад 2. Граф $G = (X, U)$ заданий матрицею суміжності.

$$A(G) = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

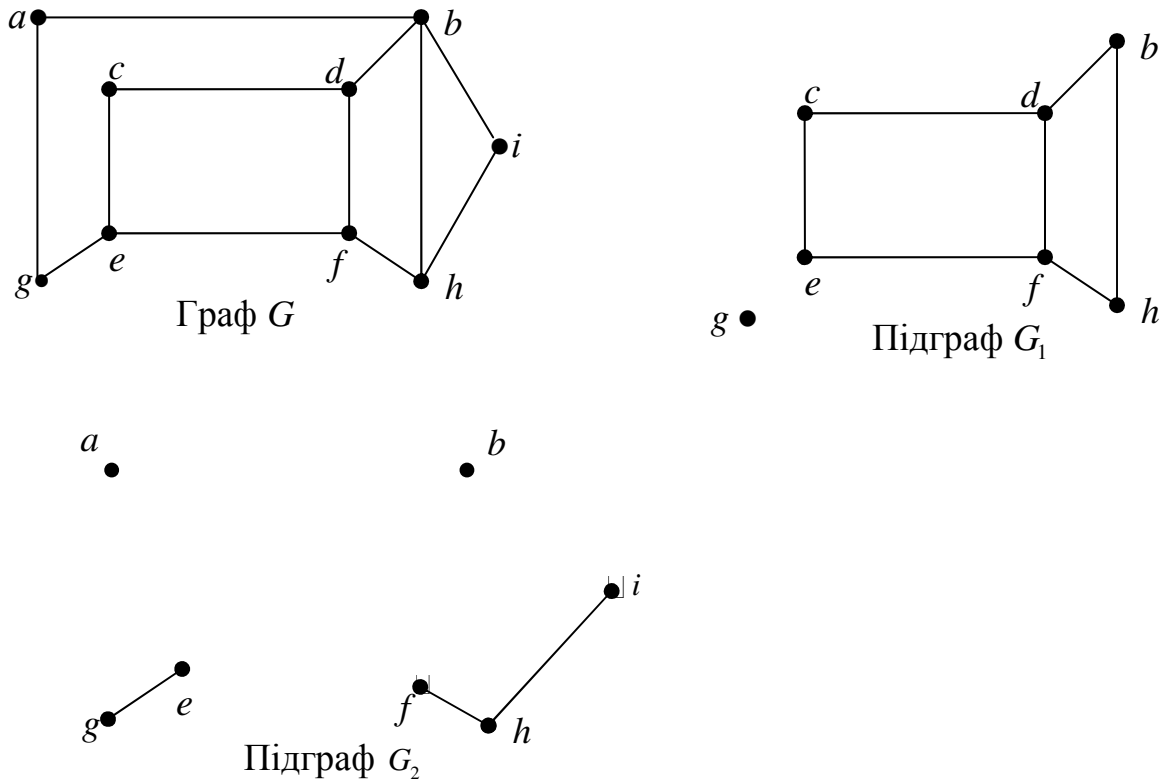
- Побудувати геометричне зображення графа. Визначити тип графа, типи ребер та вершин.
- Записати основні підграфи, дерева та ліс.
- Побудувати можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнутий маршрут, ланцюг (шлях) та простий ланцюг (простий шлях), цикл та простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона.
- Обчислити метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число.

Розв'язок

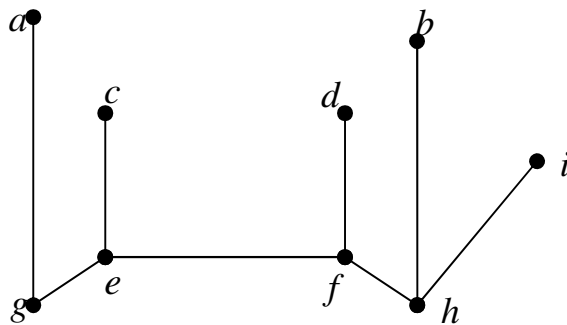
a) Геометричне зображення графа G :

G – скінчений неорієнтований зв'язний плоский граф без петель і кратних ребер, який не має висячих вершин.

b) Підграф – будь-яка частина графа, яка сама є графом.



Для того, щоб граф $G=(X,U)$ став лісом, необхідно, наприклад, вилучити з нього ребра: $u_1=\{a,b\}$, $u_2=\{b,d\}$, $u_4=\{b,i\}$, $u_8=\{c,d\}$.



В результаті вилучення указаних ребер отримаємо ліс, який і є деревом.

с) Побудуємо можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнутий маршрут, ланцюг (шлях) та простий ланцюг (простий шлях), цикл та простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона.

Маршрутом (який поєднує вершини x_i та x_j) називається скінченна послідовність ребер та інцидентних їм сусідніх з ними в цій послідовності вершин, які утворюють неперервну криву з кінцями x_i , x_j , наприклад: $au_1bu_2du_2bu_4iu_5hu_6fu_7du_7fu_{10}e$.

Маршрут замкнутий, якщо кінці його співпадають ($x_i = x_j$):

$$au_1bu_2du_2bu_4iu_5hu_6fu_7du_7fu_{10}eu_{11}gu_{12}a.$$

Ланцюгом називається маршрут, в якому все ребра різні, наприклад: $au_1bu_2du_7fu_6hu_3bu_4i$.

Простим ланцюгом називається ланцюг, в якому немає вершин, які б повторювалися: $au_1bu_2du_7fu_6hu_5i$.

Циклом називається ланцюг ненульової довжини, який поєднує вершину саму з собою, і немає ребер, які б повторювалися, наприклад:

$$du_8cu_9eu_{11}gu_{12}au_1bu_4iu_5hu_3bu_2d.$$

Простим циклом називається цикл, який поєднує вершину x саму з собою і немає вершин, які б повторювалися, окрім x , наприклад: $cu_8du_7fu_{10}eu_9c$.

Ланцюгом Ейлера називається ланцюг, який містить всі ребра і притому по одному разу: немає.

Циклом Ейлера називається цикл, який містить усі ребра і притому по одному разу: немає.

Ланцюгом Гамільтона називається ланцюг, який містить усі вершини і притому по одному разу: $fu_7du_8cu_9eu_{11}gu_{12}au_1bu_4iu_5h$.

Циклом Гамільтона називається цикл, який містить усі вершини і притому по одному разу: $au_1bu_4iu_5hu_6fu_7du_8cu_9eu_{11}gu_{12}a$.

d) Обчислимо метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число.

Ексцентриситет $e(x_i)$ вершини $x_i \in X$ в зв'язному графі G – від x_i до найбільш віддаленої від неї вершини: $e(x_i) = \max_{x \in X} d(x, x_i)$.

Радіус $r(G)$ графа G – найменший із ексцентриситетів вершин: $r(G) = \min_{x \in X} e(x)$.

Діаметр $d(G)$ графа G – найбільший із ексцентриситетів вершин: $d(G) = \max_{x \in X} e(x)$.

Вершина x називається центральною вершиною графа G , якщо на неї припадає мінімум ексцентриситетів, тобто $e(x) = r(G)$. Центром графа G називається множина усіх його центральних вершин.

Цикломатичне число графа G обчислюється по формулі: $\lambda = m - n + p$, де m – число ребер в графі, n – число вершин в графі, p – число компонентів зв'язності.

Запишемо матрицю відстані між вершинами графа:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & a & b & c & d & e & f & g & h & i
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 e \\
 f \\
 g \\
 h \\
 i
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\
 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\
 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\
 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\
 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\
 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$e(a)=3; e(b)=3; e(c)=3; e(d)=3; e(e)=3; e(f)=3; e(g)=3; e(h)=3; e(i)=3.$$

$$r(G)=3. d(G)=3.$$

$$C(G)=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}.$$

$$m=12, n=9, p=1, \lambda=12-9+1=4.$$

Приклад 3. Обчислити повний потік в транспортній мережі G (в дужках вказані пропускні можливості дуг).

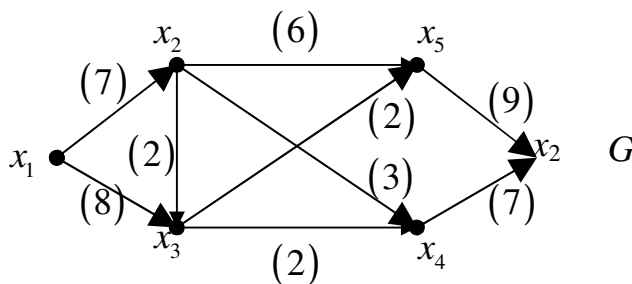


Рис. 3.

Потік φ називається повним, якщо будь-який шлях в транспортній мережі G із x_1 в x_6 містить, в крайньому разі, одну насичену дугу (насичена дуга – дуга, на якій потік по ній дорівнює її пропускній здібності, тобто $\varphi(u)=c(u)$).

Скористаємося алгоритмом знаходження повного потоку:

1) Припустимо $\varphi(u)=0$, тобто починаємо з нульового потоку (див. рис. 3а). Припустимо $G'=G$.

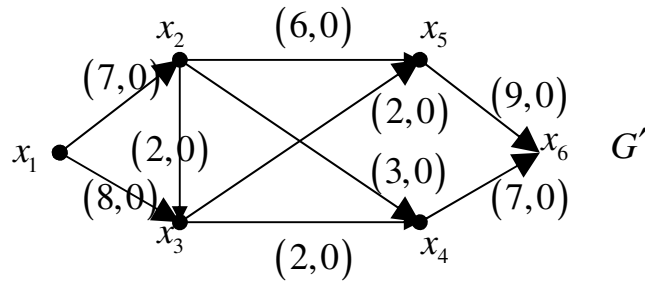


Рис. 3а.

2) Вилучимо з орграфа G' усі дуги, які є насиченими при потоці φ в транспортній мережі G . Отриманий оргграф знову позначимо через G' . При нульовому потоці насичені дуги відсутні.

3) Знаходимо в G' простий ланцюг з x_1 в x_6 . Якщо такого ланцюга немає, то φ – повний потік який ми шукаємо в транспортній мережі G . Інакше переходимо до кроку 4. В нашому випадку такий простий ланцюг – $\eta_1 = x_1 x_2 x_4 x_6$.

4) Збільшимо потоки по дугам із η_1 на 3 (до насичення дуги (x_2, x_4)). В результаті отримаємо потік $\varphi = \varphi_1$, який містить одну насичену дугу (рис. 3b). Відмітимо її знаком « $\times$ » (аналогічно будемо відмічати знаком « $\times$ » усі інші насичені дуги) і вилучимо її з орграфа G' . Оргграф який отримаємо знову позначимо через G' (рис. 3c).

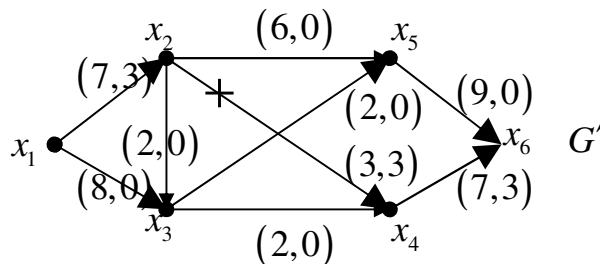


Рис. 3b.

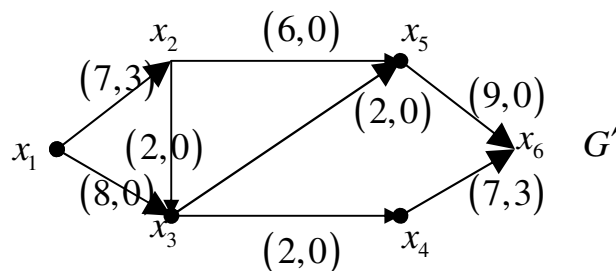


Рис. 3c.

5) Виділимо в G' простий ланцюг $\eta_2 = x_1x_2x_3x_4x_6$ і збільшимо потік на 2 (до насичення дуг (x_2, x_3) , (x_3, x_4)). В результаті отримаємо потік $\varphi = \varphi_2$, який містить три насичених дуги (рис. 3 d) і вилучимо їх з орграфа G' . Орграф який отримаємо знову позначимо через G' (рис. 3 e).

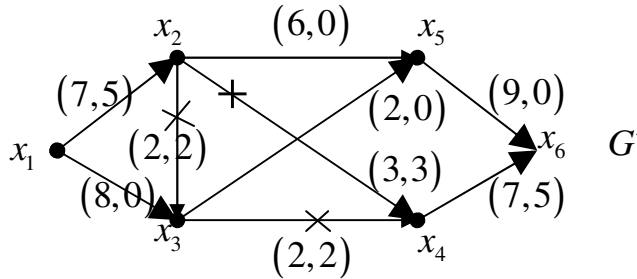


Рис. 3 d .

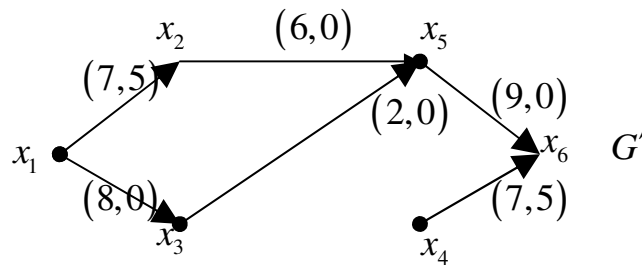


Рис. 3 e .

6) Виділимо в G' простий ланцюг $\eta_3 = x_1x_3x_5x_6$ і збільшимо потік на 2 (до насичення дуги (x_3, x_5)). В результаті отримаємо потік $\varphi = \varphi_3$, який містить чотири насичені дуги (рис. 3 i) і вилучимо їх з орграфа G' . Орграф який отримали знову позначимо через G' (рис. 3 j).

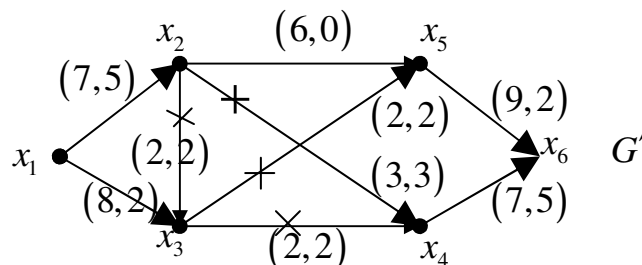


Рис. 3 i .

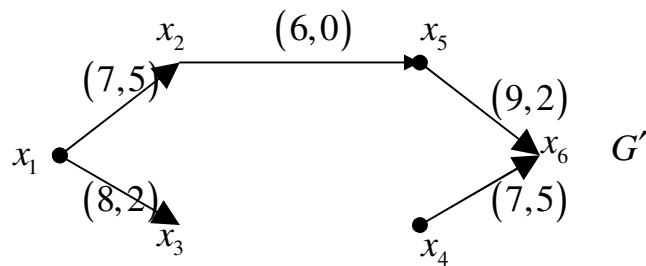


Рис. 3 j .

7) Виділимо в G' простий ланцюг $\eta_4 = x_1 x_2 x_5 x_6$ і збільшимо потік на 2 (до насичення дуги (x_1, x_2)). В результаті отримаємо потік $\varphi = \varphi_4$, який містить насичені дуги (рис. 3 k) і вилучимо їх з орграфа G' . Орграф який отримали знову позначимо через G' (рис. 3 l).

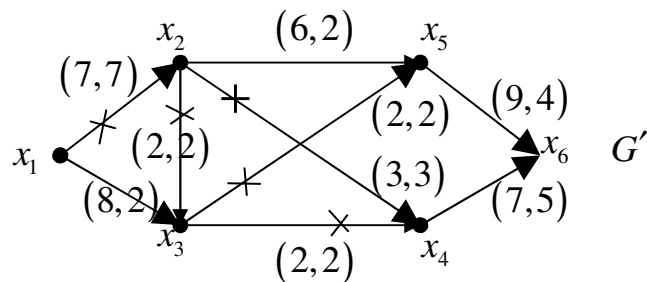


Рис. 3 k .

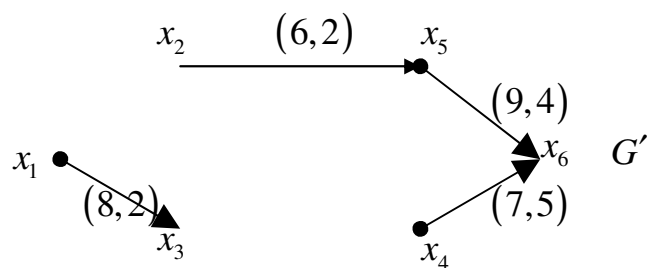


Рис. 3 l .

Помітно, що в G' не існує шляху із x_1 в x_6 . Значить, в транспортній мережі G з потоком φ_4 не існує шляху з x_1 в x_6 , який не включав би насичених дуг, тобто потік φ_4 є повним. Величина φ_4 отриманого повного потоку дорівнює 9.

4.2. Тести для самоперевірки

1. Дано означення:

„Будемо говорити, що задано граф G , якщо вказано дві множини:

- 1) непушта скінчена множина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, де $x_i, i = \overline{1, n}$ вершини графа;
- 2) множина U , складена із упорядкованих пар вершин”.

Воно визначає:

можливі варіанти відповідей:

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| a) орієнтований граф; | b) неорієнтований граф; |
| c) мультиграф; | d) псевдограф. |

2. Для яких скінчених графів не можна побудувати матрицю інцидентності?

Можливі варіанти відповідей:

- a) для орієнтованих псевдографів; b) для неорієнтованих псевдографів;
- c) для орієнтованих мультиграфів; d) для неорієнтованих мультиграфів.

3. Чи завжди можна побудувати матрицю суміжності для даного скінченого графа?

Можливі варіанти відповідей:

- a) тільки для орієнтованих графів; b) тільки для неорієнтованих графів;
- c) завжди; d) не завжди.

4. Якщо два графа ізоморфні, то що можна сказати про їх матриці суміжності після відповідної перенумерації вершин другого графа?

Можливі варіанти відповідей:

- a) не рівні; b) рівні;
- c) суміжні матриці не існують; d) нульові.

5. Граф без петель і кратних ребер – це:

можливі варіанти відповідей:

- a) повний; b) зв'язаний;
- c) звичайний; d) не зв'язаний.

6. Планарний граф – це:

можливі варіанти відповідей:

- a) граф у тривимірному просторі; b) граф у n -мірному просторі;
- c) граф у одновимірному просторі; d) граф на площині.

7. Орграф без циклів – це орграф:

можливі варіанти відповідей:

- a) контурний; b) ациклічний;
- c) безконтурний; d) циклічний.

8. Граф без циклів – це:

можливі варіанти відповідей:

- | | |
|------------------|----------------|
| a) контурний; | b) ациклічний; |
| c) безконтурний; | d) циклічний. |

9. Простий цикл – це:

можливі варіанти відповідей:

- a) шлях;
- b) замкнений ланцюг;
- c) замкнений ланцюг, в якому всі вершини, крім першої й останньої, різні;
- d) ланцюг.

10. Простий контур – це:

можливі варіанти відповідей:

- | | |
|--------------------|----------------------------|
| a) шлях; | b) простий шлях; |
| c) замкнений шлях; | d) простий замкнений шлях. |

11. Граф, у якого будь-яка пара вершин зв'язна, є:

можливі варіанти відповідей:

- | | |
|-----------------|-------------------|
| a) ейлеровим; | b) зв'язним; |
| c) не зв'язний; | d) гамільтоновим. |

12. Граф називається нероздільним, якщо:

можливі варіанти відповідей:

- a) він незв'язний і не має точок зчленування;
- b) він зв'язний і не має точок зчленування;
- c) він зв'язний і має точки зчленування;
- d) він незв'язний і має точки зчленування.

13. Сепарабельний граф – це:

можливі варіанти відповідей:

- a) нероздільний граф;
- b) роздільний граф;
- c) граф, який має хоча б одну точку зчленування;
- d) граф, який має хоча б один міст.

14. Скінчений граф є ейлеровим графом тоді і тільки тоді, коли:

можливі варіанти відповідей:

- a) зв'язний і всі його вершини мають парні степені;
- b) зв'язний;
- c) всі його вершини мають парні степені;
- d) не зв'язний.

Якщо існує цикл в скінченному графі, в якому кожне ребро графа брало участь хоча б один раз, то такий цикл називається:

можливі варіанти відповідей:

- a) ейлеровим;
- b) гамільтоновим;
- c) простим;
- d) елементарним.

15. Для будь-якого графа цикломатичне число:

можливі варіанти відповідей:

- a) $\lambda = 0$;
- b) $\lambda = 1$;
- c) $\lambda \geq 0$;
- d) $\lambda < 0$.

16. Знайти вірне означення дерева:

можливі варіанти відповідей:

- a) дерево – це зв'язний граф без циклів;
- b) дерево – це зв'язний граф з циклами;
- c) дерево – це зв'язний граф, цикломатичне число якого додатне;
- d) дерево – це незв'язний граф без циклів.

17. Ліс – це:

можливі варіанти відповідей:

- a) довільний граф, який не має циклів;
- b) граф з циклами;
- c) довільний граф, що містить гамільтоновий цикл;
- d) довільний граф, що містить ейлеровий цикл.

18. Теорема Форда-Фалкерсона:

можливі варіанти відповідей:

- a) найбільша величина потоку в транспортній мережі дорівнює найменшій пропускній здатності розрізу;
- b) найменша величина потоку в транспортній мережі дорівнює найменшій пропускній здатності розрізу;
- c) поняття – найбільша величина потоку в транспортній мережі та найбільша пропускна здатність розрізу є непорівнянні;
- d) найбільша величина потоку в транспортній мережі дорівнює найбільшій пропускній здатності розрізу.

4.3. Відповіді до тестових завдань «Теорія графів»

1) a; 2) a; 3) c; 4) b; 5) c; 6) d; 7) c; 8) b; 9) c; 10) d; 11) b; 12) b; 13) c; 14) a; 15) a; 16) c; 17) a; 18) a; 19) d.

5. ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ

5.1. Практичні заняття з теми «Теорія чисел»

Приклад 1. Знайти остачу від ділення 317^{259} на 15.

Розв'язок

Оскільки $317 \equiv 2 \pmod{15}$, то $317^{259} \equiv 2^{259} \pmod{15}$. За теоремою Ейлера

$$2^{\varphi(15)} \equiv 1 \pmod{15}. \quad \text{Так як} \quad \varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = 15 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8, \quad \text{то}$$

$$2^8 \equiv 1 \pmod{15}. \quad \text{З огляду на те, що} \quad 259 = 32 \cdot 8 + 3, \quad \text{одержимо}$$

$$2^{259} = (2^8)^{32} \cdot 2^3 \equiv 8 \pmod{15}.$$

Отже, 317^{259} при діленні на 15 дає остачу 8.

Відповідь. 8.

Приклад 2. Розв'язати конгруенцію $111x \equiv 49 \pmod{179}$.

Розв'язок

Розв'язок будемо шукати у вигляді $x \equiv (-1)^{n-1} p_{n-1} \cdot 49 \pmod{179}$, де n – число неповних часток, p_{n-1} – чисельник передостаннього підходящого дробу в розкладі $\frac{179}{111}$ в ланцюговий дріб.

Чисельники підходящих дробів обчислюємо за формулою

$$p_k = q_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad \text{де} \quad p_0 = 1.$$

$$\begin{array}{r}
 179 \overline{) 111} \\
 \underline{111} \\
 68 \\
 111 \overline{) 68} \\
 \underline{68} \\
 43 \\
 68 \overline{) 43} \\
 \underline{-43} \\
 25 \\
 43 \overline{) 25} \\
 \underline{25} \\
 18 \\
 25 \overline{) 18} \\
 \underline{18} \\
 7 \\
 18 \overline{) 7} \\
 \underline{14} \\
 4 \\
 7 \overline{) 4} \\
 \underline{4} \\
 3 \\
 4 \overline{) 3} \\
 \underline{3} \\
 1 \\
 3 \overline{) 1} \\
 \underline{3} \\
 0
 \end{array}$$

q_k		1	1	1	1	1	2	1	1	3
p_k	1	1	2	3	5	8	21	29	50	

Так як $n = 9$, то $x \equiv (-1)^8 \cdot 50 \cdot 49 \pmod{179}$ або $x \equiv 2450 \pmod{179}$. Звідси $x \equiv 123 \pmod{179}$.

Відповідь. $x \equiv 123 \pmod{179}$.

Приклад 3. Розв'язати систему конгруенцій
$$\begin{cases} 5x \equiv 2 \pmod{12}, \\ 7x \equiv 2 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 1 \pmod{5}. \end{cases}$$

Розв'язок

Додамо до правої частини першої конгруенції -12 . Тоді отримаємо $5x \equiv -10 \pmod{12}$. Звідси $x \equiv -2 \pmod{12}$ або $x \equiv 10 \pmod{12}$.

До лівої частини другої конгруенції додамо $-8x$. Тоді $-x \equiv 2 \pmod{8}$. Звідси $x \equiv -2 \pmod{8}$ або $x \equiv 6 \pmod{8}$.

До правої частини третьої конгруенції додамо 5 . Будемо мати $3x \equiv 6 \pmod{5}$ або $x \equiv 2 \pmod{5}$.

Таким чином, маємо систему конгруенцій
$$\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{12}, \\ x \equiv 6 \pmod{8}, \\ x \equiv 2 \pmod{5}. \end{cases}$$

З першої конгруенції випливає, що $x = 12k + 10$. Підставимо знайдене x в другу конгруенцію, одержимо $10 + 12k \equiv 6 \pmod{8}$ або $12k \equiv -4 \pmod{8}$. Звідси $3k \equiv -1 \pmod{2}$, $3k \equiv 3 \pmod{2}$. Отже, $k \equiv 1 \pmod{2}$ або $k = 2l + 1$ і $x = 10 + 12 + 24l = 22 + 24l$. Підставивши $x = 22 + 24l$ в останню конгруенцію, одержимо $22 + 24l \equiv 2 \pmod{5}$ або $24l \equiv -20 \pmod{5}$.

Звідси $l \equiv 0 \pmod{5}$ або $l = 5m$, де $m \in \mathbb{Z}$.

Остаточно $x = 22 + 24 \cdot 5m = 22 + 120m$ або $x \equiv 22 \pmod{120}$.

Відповідь. $x \equiv 22 \pmod{120}$.

Приклад 4. Довести, що $n^3 - n + 7$ конгруентне 7 за модулем 6.

Розв'язок

За умовою $n^3 - n + 7 \equiv 7 \pmod{6}$. Розглянемо дану конгруенцію.

$$n^3 - n \equiv 0 \pmod{6}, \quad n(n^2 - n) \equiv 0 \pmod{6}, \quad n(n+1)(n-1) \equiv 0 \pmod{6}.$$

$$[n(n+1)(n-1)] : 2, \quad [(n-1)n(n+1)] : 3. \quad \text{Отже, } [(n+1)n(n-1)] : 6.$$

Приклад 5. Довести, що $(2+7)^5 \equiv 2^5 + 7^5 \pmod{5}$.

Розв'язок

$$(2+7)^5 = 2^5 + 5 \cdot 2^4 \cdot 7 + 10 \cdot 2^3 \cdot 7^2 + 10 \cdot 2^2 \cdot 7^3 + 5 \cdot 2 \cdot 7^4 + 7^5 \equiv 2^5 + 7^5 \pmod{5},$$

$$5(2^4 \cdot 7 + 2^3 \cdot 7^2 + 2^2 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^4) \equiv 0 \pmod{5}.$$

Приклад 6. Довести, що якщо $50a - b + 60c \equiv 0 \pmod{398}$, то $a - 4b + 41c \equiv 0 \pmod{199}$.

Розв'язок

Конгруенцію $50a - b + 60c \equiv 0 \pmod{398}$ помножимо на 8 і віднімемо деяке кратне модуля. Так як $400a \equiv 2a \pmod{398}$ та $480 \equiv 82 \pmod{398}$ то буде: $2a - 8b + 82c \equiv 0 \pmod{398}$. Тепер всю конгруенцію і модуль поділимо на 2: $a - 4b + 41c \equiv 0 \pmod{199}$.

Приклад 7. Треба розв'язати конгруенцію $7x \equiv 5 \pmod{9}$.

Розв'язок

Застосуємо теорему Ейлера. $\varphi(9) = 9 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$, $\varphi(9) - 1 = 5$, $x = 5 \cdot 7^5 + 9t$,

$x = 245 + 9t$ або $x = 2 + 9t$, де $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $x = \{\dots, 2, 11, 20, 29, \dots, 245, \dots\}$.

Відповідь. $x \equiv 2 \pmod{9}$.

Приклад 8. Треба розв'язати конгруенцію $31x \equiv 19 \pmod{83}$.

Розв'язок

n		0	1	2	3
q_n		2	1	2	10
p_n	1	2	3	8	

$$\frac{83}{31} = [2, 1, 2, 10]. \quad x \equiv 19 \cdot 8 \cdot (-1)^3 \pmod{83}, \quad x \equiv 152 \pmod{83} \quad \text{або} \quad x \equiv 14 + 83t, \quad \text{де}$$

$t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $x = \{\dots, 14, 97, 180, \dots\}$.

Відповідь. $x \equiv 14 \pmod{83}$.

Приклад 9. 1) Знайти дві останні цифри числа 11^{245} ;

2) Знайти дві останні цифри числа 2^{99} .

Розв'язок

1) Для того, щоб знайти R останніх цифр числа a , достатньо знайти остачу від ділення цього числа на 10^R . В нашому випадку $a = 11^{245}$, $R = 2$.

Так як $(11, 100) = 1$, то за теоремою Ейлера $11^{\varphi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$, де $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$. Тобто. $11^{40} \equiv 1 \pmod{100}$.

Так як $245 = 40 \cdot 6 + 5$, то $11^{245} = 11^{40 \cdot 6 + 5} = (11^{40})^6 \cdot 11^5 \equiv 1^6 \cdot 11^5 = 121^2 \cdot 11 \equiv 21^2 \cdot 11 = 441 \cdot 11 \equiv 41 \cdot 11 = 451 \equiv 51 \pmod{100}$.

Тому, дві останні цифри числа 11^{245} – 5 та 1.

Відповідь. 51.

2) Знайти дві останні цифри числа 2^{99} .

Для того, щоб знайти дві останні цифри числа 2^{99} , достатньо знайти остачу від ділення цього числа на 10^2 .

Так як $(2, 100) = 2 > 1$, то теорему Ейлера застосовувати не можна. Знайдемо $(2^{99}, 100) = (2^{99}, 2^2 \cdot 5^2) = 2^2 = 4$. Тому $2^{99} = 2^{97} \cdot 4$ і $100 = 25 \cdot 4$.

Тепер знайдемо остачу від ділення числа 2^{97} на 25. Так як $(2, 25) = 1$, то за теоремою Ейлера $2^{\varphi(25)} \equiv 1 \pmod{25}$, де $\varphi(25) = \varphi(5^2) = 25 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20$. Тому $2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$.

Так як $97 = 20 \cdot 4 + 17$, то $2^{97} = 2^{20 \cdot 4 + 17} = (2^{20})^4 \cdot 2^{17} \equiv 1^4 \cdot 2^{17} = (2^5)^3 \cdot 4 \equiv 7^3 \cdot 4 = 343 \cdot 4 \equiv 18 \cdot 4 = 72 \equiv 22 \pmod{25}$.

Виходячи із цієї конгруенції: $2^{97} = 25 \cdot k + 22$.

Помножимо обидві частини конгруенції на 4 = $(2^{99}, 100)$, одержимо: $2^{99} = 100 \cdot k + 88$.

Таким чином, число 2^{99} закінчується двома вісімками.

Відповідь. 88.

Приклад 10. Розв'язати конгруенцію:

- 1) $3x \equiv 1 \pmod{5}$; 2) $12x \equiv 1 \pmod{7}$; 3) $7x \equiv 4 \pmod{19}$; 4) $52x \equiv 27 \pmod{65}$;
- 5) $10 \cdot x \equiv 25 \pmod{35}$.

Розв'язок

1) Випробовуючи числа 0, 1, 2, 3, 4, що становлять повну систему найменших невід'ємних лишків по модулю 5, знаходимо, що конгруенції задовольняє число 2, тобто одержуємо рішення: $x \equiv 2 \pmod{5}$, або клас чисел $x = 5 \cdot k + 2$.

Відповідь. $x \equiv 2 \pmod{5}$.

2) $12x \equiv 1 \pmod{7}$.

Виключимо $7x$ із лівої частини конгруенції (дивись основні властивості конгруенцій), одержуємо конгруенцію: $5x \equiv 1 \pmod{7}$. Шляхом випробувань знаходимо розв'язок: $x \equiv 3 \pmod{7}$.

Відповідь. $x \equiv 3 \pmod{7}$.

3) $7x \equiv 4 \pmod{19}$.

Так як $(7, 19) = 1$, то конгруенція має один і тільки один розв'язок (клас чисел x по модулю 19).

а) *Спосіб Ейлера.* Рішення знаходиться за формулою $x \equiv b \cdot a^{\varphi(m)-1} \pmod{m}$, де $\varphi(m)$ – функція Ейлера. Так як

$$\varphi(19) = 19 \cdot \left(1 - \frac{1}{19}\right) = 18, \text{ то } x \equiv 4 \cdot 7^{18-1} = 4 \cdot 7^{17} = 4 \cdot (7^3)^5 \cdot 7^2 = 4 \cdot (343)^5 \cdot 7^2 \equiv \\ \equiv 4 \cdot 1^5 \cdot 7^2 = 4 \cdot 49 \equiv 4 \cdot 11 = 44 \equiv 6 \pmod{19}.$$

Тому $x \equiv 6 \pmod{19}$.

б) *За допомогою скінчених неперервних дробів.* Знаходимо потрібні данні для формули: $x \equiv (-1)^n b \cdot P_{n-1} \pmod{m}$.

Маємо:

$$\begin{array}{r} 19 \mid 7 \\ 14 \mid 2 = q_0 \\ 7 \mid 5 \\ 5 \mid 1 = q_1 \\ 5 \mid 2 \\ 4 \mid 2 = q_2 \\ 2 \mid 1 \\ 2 \mid 2 = q_3 \\ 0 \end{array}$$

Тому

$$P_{-2} = 0, \quad P_{-1} = 1, \quad P_s = P_{s-1} \cdot q_s + P_{s-2}, \quad s = 0, \dots, n.$$

s	-2	-1	0	1	2	3
q_s			2	1	2	2
P_s	0	1	2	3	8	

$$n=3, \quad P_{n-1}=8.$$

Звідси $x \equiv (-1)^3 \cdot 4 \cdot 8 = -32 \equiv -13 \equiv 6 \pmod{19}$.

Результати збіглися: $x \equiv 6 \pmod{19}$.

Відповідь. $x \equiv 6 \pmod{19}$.

4) $52x \equiv 27 \pmod{65}$.

Конгруенція не має розв'язку, оскільки $(52, 65) = 13 > 1$, а 27 не ділиться на 13.

Відповідь. Розв'язків не має.

5) $10 \cdot x \equiv 25 \pmod{35}$.

Так як $(10, 35) = 5 > 1$ і 25 ділиться на 5, то конгруенція має 5 розв'язків, які знаходяться за формулою: $x_{k+1} \equiv m_1 \cdot k + \alpha \pmod{m}$, де $k = 0, \dots, 4$; число α – рішення конгруенції $a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1}$, де $a_1 = 2$, $b_1 = 5$, $m_1 = 7$.

Розв'яжемо конгруенцію: $2 \cdot x \equiv 5 \pmod{7}$. Шляхом випробувань знаходимо розв'язок: $x \equiv 6 \pmod{7}$. Тому $\alpha = 6$. Отже $x_{k+1} \equiv 7 \cdot k + 6 \pmod{35}$, а саме:

$$x_1 \equiv 6 \pmod{35},$$

$$x_2 \equiv 7 + 6 = 13 \pmod{35},$$

$$x_3 \equiv 14 + 6 = 20 \pmod{35},$$

$$x_4 \equiv 21 + 6 = 27 \pmod{35},$$

$$x_5 \equiv 28 + 6 = 34 \pmod{35}.$$

Відповідь. $x_{k+1} \equiv 7 \cdot k + 6 \pmod{35}$, $k = 0, \dots, 4$.

Приклад 11. Розв'язати системи конгруенцій:

$$1) \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5}, \\ x \equiv 1 \pmod{12}, \\ x \equiv 7 \pmod{14}. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{25}, \\ x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 3 \pmod{7}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod{10}, \\ 2x \equiv 5 \pmod{15}, \\ 7x \equiv 5 \pmod{12}. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 4x \equiv 1 \pmod{9}, \\ 5x \equiv 3 \pmod{7}, \\ 4x \equiv 5 \pmod{12}. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{10}, \\ 4x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 7 \pmod{9}. \end{cases}$$

Розв'язок

$$1) \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5}, \\ x \equiv 1 \pmod{12}, \\ x \equiv 7 \pmod{14}. \end{cases} \quad \text{З першої конгруенції маємо: } x = 5 \cdot t + 4 \quad (*).$$

Підставимо (*) в другу конгруенцію: $5 \cdot t + 4 \equiv 1 \pmod{12}$, або $5 \cdot t \equiv 9 \pmod{12}$, звідки $t \equiv 9 \pmod{12}$, або $t = 12 \cdot t_1 + 9$. Підставимо знайдене значення t в рівність (*), отримаємо: $x = 5 \cdot (12 \cdot t_1 + 9) + 4 = 60 \cdot t_1 + 49 \quad (**)$.

Знайдене значення x підставимо в третю конгруенцію: $60 \cdot t_1 + 49 \equiv 7 \pmod{14}$, або $60 \cdot t_1 \equiv -42 \pmod{14}$, або $4 \cdot t_1 \equiv 0 \pmod{14}$. Скорочуючи члени конгруенції і модуль на 2, одержимо: $2 \cdot t_1 \equiv 0 \pmod{7}$, або $t_1 \equiv 0 \pmod{7}$, звідки $t_1 = 7 \cdot t_2 + 0$. Підставимо знайдене значення t_1 в рівність (**), знаходимо: $x = 60 \cdot (7 \cdot t_2 + 0) + 49 = 420 \cdot t_2 + 49$. Або $x \equiv 49 \pmod{420}$.

Перевірка: $49 - 4 = 45$ ділиться на 5; $49 - 1 = 48$ ділиться на 12; $49 - 7 = 42$ ділиться на 14.

Зауваження. Розв'язуючі конгруенцію $4 \cdot t_1 \equiv 0 \pmod{14}$, ми одержали конгруенцію $2 \cdot t_1 \equiv 0 \pmod{7}$, і розв'язок її $t_1 \equiv 0 \pmod{7}$, або $t_1 = 7 \cdot t_2 + 0$, яке привело до розв'язку $x = 420 \cdot t_2 + 49$ заданої в умові системи. Але конгруенція $4 \cdot t_1 \equiv 0 \pmod{14}$ має ще другий розв'язок $t_1 \equiv 7 \pmod{14}$, або $t_1 = 14 \cdot t_2 + 7$, оскільки $d = (4, 14) = 2$, яке при підстановці в рівність (**) дає розв'язок $x = 840 \cdot t_2 + 469$. Однак $469 \equiv 49 \pmod{420}$, тобто числа 469 і 49 належать одному класу по модулю 420, тому ми не знаходимо цей другий розв'язок системи.

Взагалі, якщо яка-небудь конгруенція системи або конгруенція відносно t_i має d розв'язків по деякому модулю m , то для розв'язку системи досить обмежитися тільки розв'язком рівносильної їй конгруенції по модулю $\frac{m}{d}$.

Відповідь. $x \equiv 49 \pmod{420}$.

$$2) \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{25}, \\ x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 3 \pmod{7}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}. \end{cases}$$

Модулі даної системи попарно прості, тому за китайською теоремою про залишки розв'язок можна знайти за формулою:

$$x_0 = \frac{M}{m_1} \cdot y_1 \cdot \alpha_1 + \frac{M}{m_2} \cdot y_2 \cdot \alpha_2 + \frac{M}{m_3} \cdot y_3 \cdot \alpha_3 + \frac{M}{m_4} \cdot y_4 \cdot \alpha_4, \\ x \equiv x_0 \pmod{M}. \quad (*)$$

$$\text{Знаходимо: } M = [25, 4, 7, 9] = 6300, \quad \frac{M}{m_1} = \frac{6300}{25} = 252, \quad \frac{M}{m_2} = \frac{6300}{4} = 1575,$$

$$\frac{M}{m_3} = \frac{6300}{7} = 900, \quad \frac{M}{m_4} = \frac{6300}{9} = 700.$$

Складемо конгруенції: $252 \cdot y_1 \equiv 1 \pmod{25}$, $1575 \cdot y_2 \equiv 1 \pmod{4}$, $900 \cdot y_3 \equiv 1 \pmod{7}$, $700 \cdot y_4 \equiv 1 \pmod{9}$, звідки $y_1 = -12$, $y_2 = -1$, $y_3 = 2$, $y_4 = 4$.

Тепер за формулою (*) маємо:

$$x_0 = 252 \cdot (-12) \cdot 1 + 1575 \cdot (-1) \cdot 2 + 900 \cdot 2 \cdot 3 + 700 \cdot 4 \cdot 4 = 10426 \equiv 4126 \pmod{6300}.$$

Отже, $x \equiv 4126 \pmod{6300}$.

Відповідь. $x \equiv 4126 \pmod{6300}$.

$$3) \begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod{10}, \\ 2x \equiv 5 \pmod{15}, \\ 7x \equiv 5 \pmod{12}. \end{cases}$$

З першої конгруенції маємо: $x \equiv 9 \pmod{10}$, або $x = 10 \cdot t + 9$ (*).

Підставимо це значення x в другу конгруенцію і розв'яжемо її відносно t : $2 \cdot (10 \cdot t + 9) \equiv 5 \pmod{15}$, $20 \cdot t \equiv -13 \pmod{15}$, $5 \cdot t \equiv 2 \pmod{15}$ (**), але $(5, 15) = 5$ і 2 не діляться на 5, тому конгруенція (**) відносно t не має розв'язків, значить, не має розв'язків і дана система конгруенцій.

Відповідь. Розв'язків не має.

$$4) \begin{cases} 4x \equiv 1 \pmod{9}, \\ 5x \equiv 3 \pmod{7}, \\ 4x \equiv 5 \pmod{12}. \end{cases}$$

В даній системі конгруенцій бачимо, що в третій конгруенції $(4, 12) = 4$, але 5 не ділиться на 4, тому вона не має розв'язків, отже, не розв'язуючі систему, можна сказати, що вона не має розв'язків.

Відповідь. Розв'язків не має.

$$5) \begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{10}, \\ 4x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 7 \pmod{9}. \end{cases}$$

З першої конгруенції маємо: $x \equiv 7 \pmod{10}$, або $x = 10 \cdot t + 7$ (*).

Підставляючи в другу конгруенцію, одержимо: $4 \cdot (10 \cdot t + 7) \equiv 3 \pmod{5}$, $40 \cdot t \equiv -25 \pmod{5}$. Так як коефіцієнти отриманої конгруенції кратні 5, то вона має місце при будь-якому значенні t ; інакше кажучи, ця конгруенція не накладає ніяких обмежень на значення x із другої конгруенції системи. Тому продовжуємо рішення, підставляючи значення x з (*) у третю конгруенцію системи: $2 \cdot (10 \cdot t + 7) \equiv 7 \pmod{9}$, $20 \cdot t \equiv -7 \pmod{9}$, $20 \cdot t \equiv 2 \pmod{9}$, $10 \cdot t \equiv 1 \pmod{9}$, $t \equiv 1 \pmod{9}$, або $t = 9 \cdot t_1 + 1$. Знайдене значення підставляємо в рівність (*) і знаходимо: $x = 10 \cdot (9 \cdot t_1 + 1) + 7 = 90 \cdot t_1 + 17$ тобто $x \equiv 17 \pmod{90}$.

Перевірка: $3 \cdot 17 - 1 = 50$ ділиться на 10; $4 \cdot 17 - 3 = 65$ ділиться на 5; $2 \cdot 17 - 7 = 27$ ділиться на 9.

Відповідь. $x \equiv 17 \pmod{90}$.

5.2. Тести для самоперевірки

1. Користуючись алгоритмом Евкліда, знайти найбільший спільний дільник чисел 1001 і 6253.

Можливі варіанти відповідей:

a) 12; b) 13; c) 14; d) 15.

2. $a \equiv b \pmod{m}$ коли:

- 1) різниця $a - b$ ділиться на m ;
- 2) $a = b + mt$, де t ціле;
- 3) a ділиться на m і b ділиться на m .

Можливі варіанти відповідей:

a) усі твердження вірні; b) твердження 1 і 2 еквівалентні;
c) твердження 3 є наслідком 1; d) твердження 2 невірне.

3. $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$; $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$. Які твердження вірні?

Можливі варіанти відповідей:

a) $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{(m+1)}$; b) $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}$;
c) $ka_1 \equiv kb_1 \cdot b_2 \pmod{(m-1)}$; d) $a_1^k \equiv b_1^k \pmod{m}$, де k – неціле число.

4. Чи завжди можливо обидві частини конгруенції поділити на їх спільний дільник k ?

Можливі варіанти відповідей:

a) завжди; b) коли $(k, m) = 1$;
c) ніколи; d) коли цей дільник є непарне число.

5. Дана конгруенція $21 \equiv -15 \pmod{6}$. Яка конгруенція є наслідком даної?

Можливі варіанти відповідей:

a) $7 \equiv -5 \pmod{5}$; b) $42 \equiv -30 \pmod{12}$;
c) $7 \equiv -5 \pmod{2}$; d) $7 \equiv 11 \pmod{9}$.

6. Які сукупності чисел утворюють повні системи лишків по mod 6?

Можливі варіанти відповідей:

a) -11, 11, 12, 20, 33, 64, 83; b) -13, 2, 5, 17, 20, 64;
c) 1, 14, 18, 35, 40, 75; d) 3, 5, 7, 11, 13.

7. Які числа утворюють зведену систему лишків по mod 6?

Можливі варіанти відповідей:

a) -11, 11; b) 5, 2, 1; c) 1, 11, 13, 35; d) 67, 71, 73, 79.

8. Число примітивних класів по mod 14 дорівнює:

Можливі варіанти відповідей:

a) 3; b) 5; c) 6; d) 78.

9. Число примітивних класів по mod 13 дорівнює:

Можливі варіанти відповідей:

a) 7; b) 12; c) 13; d) 87.

10. Конгруенція $113 \equiv 89 \pmod{311}$ має розв'язок:

Можливі варіанти відповідей:

$a) x \equiv -46; -48 \pmod{311};$ $b) x \equiv -47 \pmod{311};$

$c) x \equiv 256 \pmod{311};$ $d) x \equiv 5 \pmod{25}.$

11. Конгруенція $441x \equiv 15 \pmod{303}$ має розв'язок (укажіть повний розв'язок):

Можливі варіанти відповідей:

$a) x \equiv 13 \pmod{303};$ $b) x \equiv 11; 114 \pmod{303};$

$c) x \equiv 13; 114; 25 \pmod{303};$ $d) x \equiv 7 \pmod{37}.$

5.3. Відповіді до тестових завдань «Теорія чисел»

1) a ; 2) b ; 3) b ; 4) b ; 5) c ; 6) c ; 7) a ; 8) c ; 9) b ; 10) c ; 11) c .

6. АЛГЕБРАІЧНІ СТРУКТУРИ

6.1. Практичні заняття з теми «Алгебраїчні структури»

Приклад 1. На множині $M = \{a, b, c\}$ задана бінарна операція $*$:

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	a	c
c	a	c	b

- з'ясувати властивості операції $*$;
- з'ясувати існування нейтрального елемента;
- з'ясувати, чи допускає дана операція зворотну операцію.

Розв'язок

а) З'ясуємо властивості операції $*$.

Так як $a * c = c * a = a$, $a * b = b * a = b$, $b * c = c * b = c$ – операція $*$ комутативна.

Так як $(a * b) * c = b * c = c$, $a * (b * c) = a * c = a$ – операція $*$ не асоціативна.

б) З'ясуємо існування нейтрального елемента.

Нейтральний елемент e , який задовольняє умові $e * a = a * e = a$, не існує.

с) З'ясуємо, чи допускає дана операція зворотну операцію.

Операція $*$ допускає обернену операцію, так як у кожному рядку й у кожному стовпці таблиці представлені всі елементи множини M лише один раз.

Приклад 2. Дана множина $H = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ підстановок із симетричної групи S_4 :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Перевірити, чи є H підгрупою групи S_4 .
- Встановити порядок елемента σ_2 .
- Визначити парність підстановки σ_3 .
- Розкласти в добуток циклів підстановку σ_4 .

Розв'язок

а) Перевіримо, чи є H підгрупою групи S_4 .

Оскільки група S_4 є скінченною, множина H буде підгрупою S_4 , якщо вона замкнута щодо групової операції. Маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdot \sigma_2 &= \sigma_2 \cdot \sigma_1 = \sigma_2, & \sigma_1 \cdot \sigma_3 &= \sigma_3 \cdot \sigma_1 = \sigma_3, & \sigma_1 \cdot \sigma_4 &= \sigma_4 \cdot \sigma_1 = \sigma_4, & \sigma_1^2 &= \sigma_1, \\ \sigma_2 \cdot \sigma_3 &= \sigma_3 \cdot \sigma_2 = \sigma_4, & \sigma_2 \cdot \sigma_4 &= \sigma_4 \cdot \sigma_2 = \sigma_3, & \sigma_3 \cdot \sigma_4 &= \sigma_4 \cdot \sigma_3 = \sigma_2, & \sigma_2^2 &= \sigma_1, & \sigma_3^2 &= \sigma_1, \\ \sigma_4^2 &= \sigma_1. \end{aligned}$$

Отже, добуток кожних двох елементів множини H – елемент тієї ж множини, тому H є підгрупою групи S_4 . σ_1 – одиничний елемент H .

b) Встановимо порядок елемента σ_2 .

Так як $\sigma_2^2 = \sigma_1$, то порядок елемента σ_2 дорівнює 2.

c) Визначимо парність підстановки σ_3 .

Підстановка σ_3 містить чотири інверсії і є парною.

d) Розкладемо в добуток циклів підстановку σ_4 .

Розкладання в добуток циклів має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3)$ (так позначають цикли).

Приклад 3. Скласти таблиці додавання й множення в кільці $GF_3[x]/(2x^3 + x^2 + 1)$ для многочленів другого степеня вигляду $ax^2 + bx$.

Розв'язок

Є шість многочленів зазначеного вигляду: x^2 , $x^2 + x$, $x^2 + 2x$, $2x^2$, $2x^2 + x$, $2x^2 + 2x$.

Зауваження. Загальний вигляд многочленів другого степеня $ax^2 + bx + c$, де за умовою задачі $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ але для спрощення задачі розглядається тільки випадок, коли многочлен має вигляд $ax^2 + bx$.

Для розв'язання задачі необхідно використати таблиці додавання й множення в полі GF_3 :

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Наприклад, додамо многочлени $x^2 + 2x$ і $2x^2 + 2x$. З огляду на те, що $1 + 2 = 0$, $2 + 2 = 1$, одержимо:

$$(x^2 + 2x) + (2x^2 + 2x) = x^2(1 + 2) + x(2 + 2) = x.$$

Отриманий результат занесемо до таблиці:

Операція «+»	x^2	$x^2 + x$	$x^2 + 2x$	$2x^2$	$2x^2 + x$	$2x^2 + 2x$
x^2						
$x^2 + x$						
$x^2 + 2x$						x
$2x^2$						
$2x^2 + x$						
$2x^2 + 2x$						

Інші порожні клітинки таблиці пропонуємо заповнити самостійно.

Тепер помножимо ці многочлени. З огляду на те, що $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 2 = 1$, $1 + 2 = 0$, одержимо:

$$(x^2 + 2x) \cdot (2x^2 + 2x) = 2x^4 + x^3 + 2x^3 + x^2 = 2x^4 + x^3(1 + 2) + x^2 = 2x^4 + x^2.$$

Знайдемо залишок від ділення $2x^4 + x^2$ на $2x^3 + x^2 + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x + 0 & 2x^3 + x^2 + 1 \\
 \underline{2x^4 + x^3 + x} & x + 1 \\
 2x^3 + x^2 + 2x & \\
 \underline{2x^3 + x^2 + 1} & \\
 2x + 2 &
 \end{array}$$

Тут урахувалося, що $0 - 1 = 2$, тому що $1 + 2 = 0$.

Таким чином, $(x^2 + 2x) \cdot (2x^2 + 2x) = 2x + 2$.

Отриманий результат занесемо до таблиці:

Операція «·»	x^2	$x^2 + x$	$x^2 + 2x$	$2x^2$	$2x^2 + x$	$2x^2 + 2x$
x^2						
$x^2 + x$						
$x^2 + 2x$						$2x + 2$
$2x^2$						
$2x^2 + x$						
$2x^2 + 2x$						

Інші порожні клітинки таблиці пропонуємо заповнити самостійно.

6.2. Тести для самоперевірки

1. Яка множина є групою відносно операції множення?

Можливі варіанти відповідей:

- a) множина цілих чисел;
- b) множина парних цілих чисел;
- c) множина невід'ємних чисел;
- d) множина додатніх раціональних чисел.

2. Яка множина є підгрупою групи S_3 ?

Можливі варіанти відповідей:

a) $\{e, (23), (132)\}$; b) $\{e, (12), (123)\}$; c) $\{e, (132), (123)\}$; d) $\{e, (13), (12)\}$.

3. Яка множина не є кільцем відносно операцій додавання і множення?

Можливі варіанти відповідей:

a) множина натуральних чисел; b) множина раціональних чисел;

c) множина парних цілих чисел; d) множина дійсних чисел.

4. Яка множина є полем відносно операцій додавання і множення?

Можливі варіанти відповідей:

a) множина цілих чисел; b) множина парних цілих чисел;

c) множина натуральних чисел; d) множина раціональних чисел.

5. Який многочлен є незвідним над полем $GF(2)$?

Можливі варіанти відповідей:

a) $x^2 + x$; b) $x^2 + x + 1$; c) $x^2 + 1$; d) x^2 .

6. Яка матриця над полем $GF(3)$ має обернену матрицю?

Можливі варіанти відповідей:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Яка матриця над полем $GF(3)$ має ранг 2?

Можливі варіанти відповідей:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Яка множина не є кільцем?

Можливі варіанти відповідей:

a) множина парних цілих чисел відносно операцій додавання і множення;

b) множина, що складається з числа 0;

c) множина цілих чисел відносно операцій додавання і множення;

d) множина, що складається з чисел 0 і 1.

9. Яка множина є кільцем?

Можливі варіанти відповідей:

a) множина цілих чисел відносно операцій множення і ділення;

b) множина раціональних чисел відносно операцій додавання і множення;

c) множина парних чисел відносно операцій додавання і ділення;

d) множина натуральних чисел відносно операцій віднімання і множення.

6.3. Відповіді до тестових завдань «Алгебраїчні структури»

1) d; 2) c; 3) a; 4) d; 5) b; 6) b; 7) a; 8) d; 9) b.

7. ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Джеймс А. Андерсен. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ.. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
2. Бондаренко М.Ф., Белоус Н.В., Руткас А.Г. Дискретная математика. – Харьков: «Компания СМІТ», 2004. – 480 с.
3. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. 2-е изд., дополн. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 376 с.
4. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Учебное пособие. – М.: Логос, 2003. – 240 с.
5. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельський Г.М. Дискретная математика для инженера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
6. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: учеб. пособие. – М.: Издательство МАЙ, 1992.
7. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техника, 1975.
8. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979.

Додаткова література

9. Грибанов В. У., Титов П. И.. Сборник упражнений по теории чисел. – «Просвещение» - М.:, 1985.
10. Морощко Є. П. Збірник задач і вправ з теорії чисел. – Центр «Магістр-S».
11. Костриков А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.
12. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1968.
13. Горбатов В.А. Основы дискретной математики: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1986.
14. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1970.
15. Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968.
16. Серпинский В. О теории множеств. – М.: Просвещение, 1966.
17. Кузичев А.С. Диаграммы Венна. – М.: Наука, 1968.
18. Харари Ф. Теория графов. – М.: Наука, 1973.
19. Березина Л.Ю. Графы и их применение: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979.
20. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике – М.: Наука, 1977.
21. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984.
22. Новоселов В.Г., Скатков А.В. Прикладная математика для инженеров-системотехников. Дискретная математика в примерах и задачах. – К.: УМК ВО, 1992.
23. Емеличев В.А., Мельников Д.И. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
24. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976.

25. Зыков А.А, Основы теории графов. – М.: Наука, 1987.
26. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
27. Мелихов А.Н. Ориентированные графы и конечные автоматы. – М.: Наука, 1971.
28. Мендельсон З. Введение в математическую логику: Перевод с английского – М.: Наука, 1984.
29. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки: Перевод с английского -М.: Мир, 1986.
30. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1965.
31. Общая алгебра. Т. 1, 2 / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников и др. – М.: Наука, 1990.
32. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Науку, 1984.
33. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977.
34. В.У. Грибанов, П.И. Титов. Сборник упражнений по теории чисел. – М.: «Просвещение», 1964.
35. В.В. Глаголев. Основы теории систем. Методы дискретной математики. – Тула, 1987.