

ДЕРЖАВНИЙ КОМІТЕТ ЗВ'ЯЗКУ ТА ІНФОРМАТИЗАЦІЇ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ІМ. О.С.ПОПОВА
=====

Кафедра фізики

МЕТРОЛОГІЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ТЕХНІЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

**МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З ФІЗИКИ № 1-1, 1-2**

Затверджено
радою факультету ІТ та ПЗ
протокол № 4
від 20.12.2000 р.

ОДЕСА 2000

Рецензент – в.о. проф. Одинцов М.М.

Укладачі: доцент Коробіцин Б.В.,

доцент Горбачов В.Е.

Методичне керівництво є досить повним введенням у лабораторний практикум для всіх дисциплін. На прикладі двох лабораторних робіт вивчаються способи обробки прямих і непрямих вимірів, обчислення довірчих границь, застосування наближених обчислень і правил округлення. Приведено зразок оформлення протоколу лабораторної роботи, що враховує сучасні вимоги до технічної документації. Вказівки розраховані на студентів за напрямком “Телекомунікації”

Схвалено і рекомендовано до друку
на засіданні кафедри фізики
4 вересня 2000 р. протокол № 2

1 ТЕОРІЯ ПОХИБОК

1.1 Фізичні величини і їхнє вимірювання

Досліджувані фізикою закони навколишнього світу виражаються у формі математичних рівнянь, що пов'язують різні фізичні величини. **Фізичною величиною** зазвичай називають певну *властивість* тіла чи фізичного процесу, яка може бути *визначена кількісно* шляхом вимірювань. **Виміряти фізичну величину** — це означає порівняти її з однорідною величиною, прийнятою за одиницю.

Вимірювання фізичних величин поділяють на прямі й непрямі. **Прямим** вимірюванням називається спосіб, при якому певна величина порівнюється з еталоном. Прямі вимірювання дають безпосередньо значення фізичної величини. При **непрямих** вимірюваннях фізична величина обчислюється за допомогою формул, в які підставляють результати прямих вимірювань.

Кожне вимірювання, як би ретельно воно не було зроблено, неминуче супроводжується похибками. Тому в задачу будь-якого вимірювання входить визначення не тільки самої вимірюваної величини, але й її похибки.

Похибки бувають трьох типів:

1) **Грубі**, чи промахи, характеризуються аномально великою величиною й виникають при користуванні несправними приладами, внаслідок помилки експериментатора тощо. Результат вимірювання, що містить промах, скасовується, і дане вимірювання треба повторити.

2) **Систематичними** називаються похибки одного знака, зумовлені однією й тією ж причиною, і при багаторазових вимірюваннях мають одне й те саме значення, тобто систематично повторюються. Такі похибки важко, але можна врахувати, тобто усунути. Наприклад, якщо стрілка амперметра за відсутності струму перебуває не на нулі, а на якійсь іншій поділці, то, віднімаючи щоразу значення цієї поділки з показань амперметра, ми позбудемося систематичної похибки.

3) **Випадковими** називаються похибки, спричинені безліччю незалежних причин, що діють у кожному окремому вимірюванні різним чином, тому усунути такі похибки не вдається. Наприклад, на вимірювання малих струмів за допомогою чутливого мікроамперметра впливають струси приладу, коливання температури навколишнього середовища, наявність зовнішнього магнітного поля тощо. При кожному вимірюванні вплив таких чинників на покази мікроамперметра буде різним, тому результати вимірювань щоразу будуть відрізнятися. Випадкові похибки за допомогою додаткових заходів можна звести до мінімуму (наприклад, помістивши мікроамперметр у термостат), але цілком усунути їх неможливо, і, щоби їх урахувати, результати вимірювань треба піддавати статистичній обробці.

1.2 Статистична обробка результатів прямих вимірювань

Визначення фізичної величини x за результатами проведених вимірювань проводиться в такій послідовності.

1) Проводять ***n* вимірювань** фізичної величини x , внаслідок яких дістають ряд значень $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

2) Обчислюють найбільш імовірне значення вимірюваної величини, яким є **середнє арифметичне** з результатів окремих вимірювань:

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.1)$$

Середнє значення вимірюваної величини $\tilde{x}$ наближається до істинного x при дуже великому числі вимірювань. При кінцевому числі вимірювань n це виконується неточно, і результат вимірювань подається у вигляді **довірчого інтервалу** $(\tilde{x} - \Delta x) \leq x \leq (\tilde{x} + \Delta x)$, в якому буде знаходитися шукана величина x з імовірністю α , що називається **довірчою ймовірністю**, або **надійністю**. Довірча ймовірність показує, яка частка вимірювань при великому їхньому числі потрапляє в довірчий інтервал.

Для розрахунку **абсолютної похибки** Δx , що визначає нижню і верхню межі довірчого інтервалу, необхідно виконати такі дії.

3) Знаходять відхилення результатів кожного вимірювання від середнього значення:

$$\Delta x_1 = \tilde{x} - x_1; \quad \Delta x_2 = \tilde{x} - x_2; \quad \dots; \quad \Delta x_n = \tilde{x} - x_n. \quad (1.2)$$

Підносять кожне з них до квадрату і обчислюють суму квадратів відхилень від

$$\text{середнього} \quad \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2. \quad (1.3)$$

4) Задаються довірчою ймовірністю вимірюваної величини α .

5) За значеннями довірчої ймовірності α і числа вимірювань n з таблиць (фрагмент див. у таблиці 1.1) знаходять значення **коефіцієнта Стюдента** $t_{\alpha,n}$. (Наприклад, при надійності $\alpha = 0,95$ і числі вимірювань $n = 5$ дістаємо $t_{0,95;5} = 2,77$.)

6) Визначають **абсолютну похибку** за формулою Стюдента:

$$\Delta x = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (1.4)$$

Видно, що абсолютна похибка Δx (а також і довірчий інтервал) тим менше, чим менше коефіцієнт Стюдента, який, у свою чергу, можна зменшити збільшенням числа вимірювань n , завданням меншої довірчої ймовірності α чи зменшенням похибок окремих вимірювань.

Таблиця 1.1 - Значення коефіцієнта Стюдента $t_{\alpha,n}$

α	0,9 (90%)	0,95 (95%)	0,99 (99%)
n			
3	2,92	4,30	9,96
5	2,13	2,77	4,60
10	1,833	2,26	3,25

7) Розраховують **відносну похибку**, що також характеризує точність вимірювань:

$$\delta = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} . \quad (1.5)$$

8) **Остаточний результат** подається у вигляді значень величин, що визначають довірчий інтервал, і відносної похибки:

$$x = (\tilde{x} \pm \Delta x)_{\alpha}; \quad \delta\% = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\% . \quad (1.6)$$

Примітка: Якщо розрахована абсолютна похибка буде значно менше за похибку вимірювань приладу, то за абсолютну похибку приймається похибка вимірювального приладу (див. розділ 1.4). Якщо ці похибки сумірні, загальна похибка дорівнює їхній геометричній сумі (див.(1.19)).

1.3 Абсолютні й відносні похибки непрямих вимірювань

При визначенні похибки непрямих вимірювань, коли фізична величина розраховується за робочою формулою, насамперед необхідно одержати формули для похибки в кожному конкретному випадку. Похибки непрямих вимірювань відшукують за відомими похибкам прямих вимірювань величин, що визначають шукану величину.

У простому випадку, коли шукана величина обчислюється за **сумою** $x=a+b$, і при цьому величини a і b визначаються прямими вимірюваннями у вигляді довірчих інтервалів $a = (\tilde{a} \pm \Delta a)_{\alpha}$ і $b = (\tilde{b} \pm \Delta b)_{\alpha}$, тоді $x = \tilde{a} \pm \Delta a + \tilde{b} \pm \Delta b = (\tilde{a} + \tilde{b}) \pm (\Delta a + \Delta b)$. Таким чином, *середнє значення* величини винаходиться як сума (або різниця) середніх значень що складаються, а *абсолютна похибка* дорівнює сумі абсолютних похибок доданків:

$$\tilde{x} = \tilde{a} + \tilde{b} \quad \text{і} \quad \Delta x = (\Delta a + \Delta b)_{\alpha} .$$

Якщо ж вимірювана величина обчислюється як *функція декількох співмножників* (наприклад об'єм циліндра $V = \pi D^2 h/4$, де $D = \tilde{D} \pm \Delta D$ і $h = \tilde{h} \pm \Delta h$), то *середнє значення* знаходять за робочою формулою

$$\tilde{V} = \frac{\pi \tilde{D}^2}{4} \cdot \tilde{h} , \quad (1.7)$$

а формулу для визначення абсолютної похибки можна одержати в описаний нижче спосіб.

1) Задану робочу формулу спочатку логарифмують за основою натурального логарифма:

$$\ln V = \ln \pi + 2 \ln D + \ln h - \ln 4 . \quad (1.8)$$

2) Диференціюють отриманий вираз:

$$\frac{dV}{V} = 2 \frac{dD}{D} + \frac{dh}{h} \quad (\text{оскільки } d \ln 4 = 0 \text{ і } d \ln \pi \approx 0) . \quad (1.9)$$

3) Вважаючи, що похибки є невеликі, замінюють знак диференціала d на знак абсолютної похибки Δ й істинні значення величин - на середні:

$$\frac{\Delta V}{\tilde{V}} = 2 \frac{\Delta D}{\tilde{D}} + \frac{\Delta h}{\tilde{h}} . \quad (1.10)$$

4) Статично незалежні величини складаються геометрично, тому відносна похибка шуканої величини визначається як геометрична сума окремих похибок:

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{\tilde{V}} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta D}{\tilde{D}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\tilde{h}}\right)^2}. \quad (1.11)$$

5) Знаходять абсолютну похибку непрямих вимірювань об'єму циліндра:

$$\Delta V = \delta_V \cdot \tilde{V}. \quad (1.12)$$

6) **Остаточний результат** записують у вигляді довірчого інтервалу і відносної похибки:

$$V = (\tilde{V} \pm \Delta V)_{\alpha}; \quad \delta_V \% = \delta_V \cdot 100\%. \quad (1.13)$$

1.4 Похибки, внесені вимірювальними приладами

Крім випадкових похибок, точність вимірювання визначається найменшою мірою, до якої можна робити вимірювання з впевненістю в правильності результату. Максимальна похибка (*точність приладу*), якої припускаються прилади, зазвичай наноситься на сам прилад.

Точність електровимірювальних приладів визначається класом точності, значення якого вказують на шкалі приладу. *Клас точності* – це округлена відносна похибка, що її припускається прилад на границі шкали, округлена до наперед заданого (див. нижче) значення:

$$\beta = \left\{ \frac{\Delta x}{x_{\max}} \cdot 100 \right\}, \quad (1.14)$$

де Δx - абсолютна похибка приладу; $x_{\max}$ - границя шкали приладу.

Існує дев'ять класів точності електровимірювальних приладів, а, отже, дев'ять значень, до яких округлюється виражена у відсотках відносна похибка приладу:

0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,5	4,0
------	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

За класом точності студент повинен уміти визначити **абсолютну похибку**, внесену приладом. Наприклад, якщо клас точності дорівнює 0,5 у вольтметра з границею шкали 150 В, це означає, що

$$0,5 = \frac{\Delta u}{150 \text{ В}} \cdot 100, \quad \text{оскільки} \quad \beta = \frac{\Delta u}{u_{\max}} \cdot 100, \quad (1.15)$$

звідки

$$\Delta u = \frac{\beta \cdot u_{\max}}{100}, \quad \text{чи} \quad \Delta u = \frac{0,5 \cdot 150 \text{ В}}{100} = 0,75 \text{ В}. \quad (1.16)$$

Припустима абсолютна похибка приладу є однакою при будь-яких відхиленнях стрілки приладу. Тому при менших відхиленнях стрілки відносна помилка δ_u стає більшою. У нашому прикладі при відхиленні стрілки на половину шкали (тобто на 75 В) відносна похибка вимірювань становитиме

$$\delta_u \% = \frac{\Delta u}{u} \cdot 100\% = \frac{0,75 \text{ В}}{75 \text{ В}} \cdot 100\% = 1\%, \quad (1.17)$$

а при відхиленні на 10 В

$$\delta_u \% = \frac{\Delta u}{u} \cdot 100\% = \frac{0,75B}{10B} \cdot 100\% = 7,5\%, \quad (1.18)$$

тоді як на границі шкали в 150 В відносна похибка дорівнює класу точності $\delta_u \% = \beta = 0,5\%$.

Таким чином, для одержання якомога менших відносних помилок при користуванні електровимірювальними приладами треба обирати прилади з такою границею шкали, щоб відхилення стрілки приладу були не меншими, чим на половину шкали.

Якщо величина випадкової похибки Δx_B , розрахованої за формулою (1.4) у розділі 1.2, виявиться сумірною з величиною похибки приладу Δx_{II} , то для $\alpha=0,95$, як абсолютну похибку вимірювання треба взяти величину

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_B)^2 + (\Delta x_{II})^2}. \quad (1.19)$$

1.5. Правила округлення

Насамперед уточнімо терміни.

Для зручності читання числа розбивають на класи (одиниці, тисячі, мільйони тощо). До кожного класу входять три *розряди* - одиниці, десятки, сотні.

Значущими цифрами даного числа називають цифри, починаючи зліва й закінчуючи останньою справа, включаючи внутрішні нулі. У наступних прикладах зазначена кількість значущих цифр (перша значуща цифра підкреслена):

5 423,47 - 6 значущих цифр;
0,000605 - 3 значущих цифри;
18,003 - 5 значущих цифр.

При запису приблизних чисел остання справа цифра вважається сумнівною, тобто її помилка не більша за 5 в наступному молодшому розряді. Цифри зліва від сумнівної вважаються правильними.

У фізиці зазвичай прийнято записувати число у вигляді «степеня десяти», тобто за допомогою показників степеня; наприклад, замість 36900 пишуть $3,69 \cdot 10^4$, а замість 0,0021 записують $2,1 \cdot 10^{-3}$. Одна з переваг такого запису полягає в тому, що він дозволяє чітко і ясно вказати число значущих цифр. Якщо відомо, наприклад, що точність запису становить три значущі цифри, то результат треба записати у вигляді $3,69 \cdot 10^4$, а якщо значущих цифр чотири, - то у вигляді $3,690 \cdot 10^4$. У числі 36900 при загальноприйнятому читанні ми вважаємо за значущі три цифри.

Після обчислення середнього значення й абсолютної похибки для запису довірчого інтервалу використовують **правила округлення**:

Спочатку округлюють **абсолютну похибку**, яка округлюється:

- до однієї значущої цифри, якщо перша значуща цифра дорівнює 3 чи більше, до двох значущих цифр, якщо перша значуща цифра дорівнює 1 чи 2;
 - завжди зі збільшенням на 1 останньої цифри, що зберігається, якщо наступна не дорівнює 0
- (без збільшення, якщо наступна цифра дорівнює 0).

Приклади округлення абсолютної похибки (розряд, до якого проводиться округлення, - підкреслено):

розряд округлення - десятки тисяч:

$$\Delta x = \underline{50} \ 999,99 \approx \underline{50} \ 000;$$

$$\Delta x = \underline{151} \ 000,01 \approx \underline{160} \ 000;$$

$$\Delta x = \underline{91} \ 000 \approx \underline{100} \ 000 = 1,0 \cdot 10^5;$$

розряд округлення - тисячні частки:

$$\Delta x = 0,02\underline{2}09 \approx 0,02\underline{2};$$

$$\Delta x = 0,00\underline{4}10 \approx 0,00\underline{5};$$

$$\Delta x = 0,0102 \approx 0,01\underline{0}.$$

Потім округлюють **середнє значення величини**, яке округлюється:

- до того розряду, до якого округлена абсолютна похибка;

- зі збільшенням на 1 останньої цифри, що зберігається, якщо наступна цифра більше за 5,

або якщо наступна дорівнює 5 та остання цифра, що зберігається, – непарна (без збільшення, якщо наступна цифра менше за 5, або наступна дорівнює 5 та остання цифра, що зберігається, – парна).

Приклади округлення середнього значення при округленій абсолютній похибці (розряд, до якого проводиться округлення, підкреслено):

округлення до десятків тисяч:

округлення до тисячних часток:

$$x = (4\underline{35} \ 087,9 \pm \underline{60} \ 000) \approx (4\underline{40} \ 000 \pm \underline{60} \ 000); \quad x = (24,54\underline{3}67 \pm 0,01\underline{3}) \approx (24,54\underline{4} \pm 0,01\underline{3});$$

$$x = (434 \ 987,9 \pm \underline{53} \ 000) \approx (4\underline{30} \ 000 \pm \underline{60} \ 000); \quad x = (24,54\underline{3}37 \pm 0,02\underline{3}) \approx (24,54\underline{3} \pm 0,02\underline{3});$$

$$x = (14\underline{25} \ 087 \pm \underline{202} \ 000) \approx (14\underline{20} \ 000 \pm \underline{210} \ 000); \quad x = (24,54\underline{1}57 \pm 0,00\underline{7}) \approx (24,54\underline{2} \pm 0,00\underline{7}).$$

1.6 Округлення в разі виконання математичних операцій над числами

При виконанні обчислень (непрямих вимірювань) треба керуватися практично необхідною точністю. Вести обчислення з точністю більшою, ніж це припускають дані задачі, безглуздо. Округлення величин перед виконанням операції проводять за звичайними правилами (див. вище); **при цьому**:

При додаванні й відніманні в доданках треба зберігати *на один розряд більше*, ніж у найменш точного доданка. Після виконання дії результат округлюється до розряду найбільш старшого з усіх молодших (до розряду старшої сумнівної цифри):

$$1,1 + 2,3\underline{4}418 + 3,2\underline{0}5945 \approx 1,1 + 2,34 + 3,21 = 6,65 \approx 6,6.$$

При *множенні й діленні* в результаті доцільно залишати стільки значущих цифр, скільки їх має співмножник з найменшим числом значущих цифр:

$$\frac{30,9 \cdot 1,8364}{2,412} \approx 23,526019 \approx 23,5.$$

При піднесенні до степеня, добуванні кореня, логарифмуванні в кінцевому результаті треба зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має початкове число:

$$11,38^2 = 129,5044 \approx 129,5;$$

$$\sqrt{5,12} = 2,262 \approx 2,26;$$

$$\lg 77,23 = 2,8878 \approx 2,888.$$

Примітка: При обчисленні проміжних результатів треба брати на одну цифру більше, ніж зазначено вище. В остаточному результаті ця “запасна” цифра відкидається при округленні.

1.7 Графічне подання результатів вимірювань

Коли треба простежити залежність однієї вимірюваної величини від іншої, наприклад, залежність опору провідника - від температури, струму через елемент - від напруги на ньому (вольт-амперна характеристика), результат вимірювань подається у вигляді графіка. Графік будується по таблиці значень виміряних величин.

1) Перед побудовою графіка треба обрати масштаб по осях x і y . Ці масштаби обирають довільно, незалежно один від одного, але так, щоби графік не був занадто розтягнутий чи навпаки занадто дрібний. Для цього за таблицею виміряних значень величин доцільно визначити мінімальні й максимальні значення як зображуваної функції, так і аргументу, й розподілити інтервали подаваних величин на всю відпущену розмірами аркуша довжину осей x і y (як це показано нижче на рис. 1.1).

2) Отримані інтервали розбивають масштабними поділками зазвичай кратними 5, 10, 50, 100, ... одиницям вимірюваної величини. У кінців осей пишуть літерні позначення й одиниці виміру зображуваних величин.

3) Далі на графік наносять експериментальні точки. Криву на графіку треба проводити не просто з'єднуючи точки одну з одною, а обираючи переважний напрямок серед точок. Крива повинна проходити так, щоби за можливістю однакове число точок було розташовано над кривою і під нею. Розкид крапок відносно кривої зумовлений наявністю похибок вимірювань (похибки, якщо вони відомі, на графіку наносяться у вигляді вертикальних відрізків). Чим менші є похибки вимірювань, тим точніше точки визначають криву. Грубі прорахунки дадуть точки, далеко розташовані від кривої.

Приклад. Потрібно побудувати залежність сили струму в коливальному контурі від частоти зовнішньої ЕРС (амплітудно-частотну характеристику) за даними таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 - Приклад завдання функції в табличному вигляді

ν , кГц	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I , мА	35	60	50	100	130	200	170	110	90	60

Нехай ми вже маємо осі координат, накреслені на всю довжину, відпущену розмірами рисунка (див. рис. 1.1).

1) З таблиці 1.2. видно, що частота коливальних набирає значень з інтервалу $\nu \in (10; 20)$ кГц, а сила струму в коливальному контурі $I \in (40; 200)$ мА.

2) Таким чином, всю наявну довжину осі абсцис (див. рис. 1.1.) розбиваємо на 10 поділок (починаючи з 10 і закінчуючи 20 кГц), а всю довжину осі ординат - на 20 поділок (починаючи від 0 і закінчуючи 200 мА). У кінців осей пишемо літерні позначення величин, що відкладаються, і одиниці їхнього виміру (I , мА та ν , кГц).

3) Далі на графік наносимо точки відповідно до даних таблиці. А потім, обираючи переважний напрямок серед точок, будуємо криву. Похибки вимірювань указуємо вертикальним відрізком у масштабі відповідної осі. Промахи легко вилючити після побудови графіка.

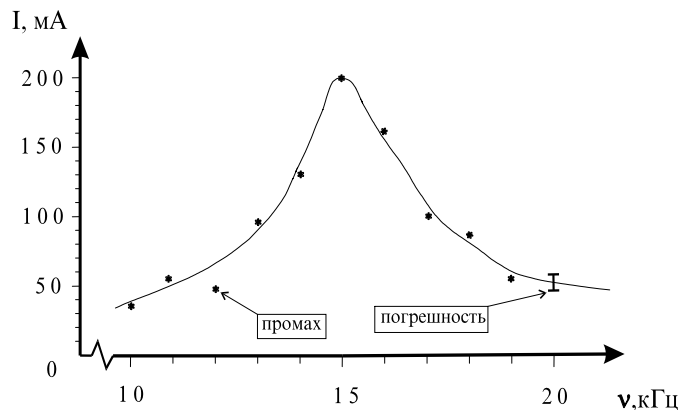


Рисунок 1.1 - Приклад побудови графіка функції

2 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Робота № 1-1 Визначення об'єму тіл правильної геометричної форми

- Мета роботи:** 1) Навчитися користуватися приладами для визначення лінійних розмірів тіл.
2) Опанувати методи розрахунку похибок прямих і непрямих вимірювань.

Прилади і приладдя: Штангенциркуль, мікрометр, тіла правильної геометричної форми.

Загальні відомості

Для визначення об'єму тіл треба визначити геометричний тип тіла і скласти

формулу розрахунку об'єму, враховуючи що в остаточному вигляді об'єм повинен бути виражений через безпосередньо вимірювані величини, тобто через лінійні розміри тіла.

Для визначення лінійних розмірів тіл у даній роботі використовуються штангенциркуль і мікрометр.

Штангенциркуль (рис. 2.1) розраховано на вимірювання довжин 150 - 300 мм з точністю до 0,1 чи 0,05 мм. Відлік з точністю до 1 мм роблять по

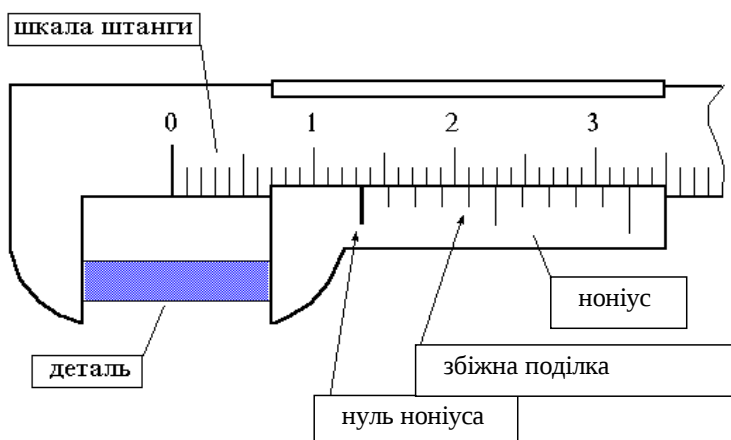


Рисунок 2.1 - Схема будови штангенциркуля.

лінійній шкалі штанги. Для уточнення вимірюваної довжини слугує лінійний ноніус, поділки якого нанесено на рухливу рамку штангенциркуля.

Ціна поділки шкали штанги дорівнює 1 мм. Нульовий штрих ноніуса при щільно стиснених губках збігається з нульовою поділкою шкали штанги, внаслідок чого відлік цілого числа міліметрів провадять за положенням нуля ноніуса (на рис. 2.1 - це 13 мм).

Частки міліметра відраховують за допомогою ноніуса. Найчастіше зустрічаються штангенциркулі, в яких ноніус являє собою відрізок довжиною 19 мм, розбитий на 10 поділок (див. рис. 2.1) так, що довжина одного відрізка ноніуса виявляється рівною 1,9 мм. Якщо зсунути рамку штангенциркуля так, що перша (після нульової) поділка ноніуса (1,9 мм) збіжиться з поділкою 2 мм основної шкали штанги, то відстань між губками буде 0,1 мм. Якщо зсунути рамку так, що друга (після нульової) поділка збіжиться з поділкою 4 мм шкали штанги, то відстань між губками буде 0,2 мм. Таким чином, число десятих часток міліметра дорівнює числу поділок ноніуса від нульової до сполученої з будь-якою поділкою шкали штанги (на рисунку це четверта поділка, тобто 0,4 мм). Це правило відліку десятих часток міліметра є справедливе, якщо нуль ноніуса перебуває між двома будь-якими поділками шкали штанги (на рис. 2.1 - між тринадцятою і чотирнадцятою).

Примітка. При вимірюваннях не має значення, з якою поділкою основної шкали збіглася поділка ноніуса. Важливий є лише порядковий номер поділки ноніуса.

Приклад. На рис. 2.1 при вимірюванні деталі нуль ноніуса опинився між 13-ою і 14-ою поділками основної шкали, а 4-та поділка (після нульової) ноніуса збіглася з певною поділкою основної шкали. Це означає, що довжина деталі (відстань між губками штангенциркуля) дорівнює $13 \text{ мм} + 0,4 \text{ мм} = 13,4 \text{ мм}$.

Аналогічно провадять вимірювання штангенциркулем, у якого довжина шкали ноніуса дорівнює 39 мм й поділена не на 10, а на 20 поділок. Але при цьому порядковий номер поділки (після нульової), що збіглася з певною поділкою основної шкали, помножують не на 0,1 мм, а на 0,05 мм.

Точність вимірювання штангенциркулем дорівнює частці від ділення ціни поділки основної шкали на число поділок ноніуса, наприклад, для штангенциркуля, зображеного на рис. 2.1, $\Delta = 1 \text{ мм} / 10 \text{ поділок} = 0,1 \text{ мм}$.

Мікрометр (рис. 2.2) застосовують для вимірювань з точністю до 0,01 мм. Основна лінійна шкала мікрометра нанесена на жорстко з'єднаний зі скобою циліндр, в який угвинчено мікрометричний гвинт, одному оберту якого відпо-

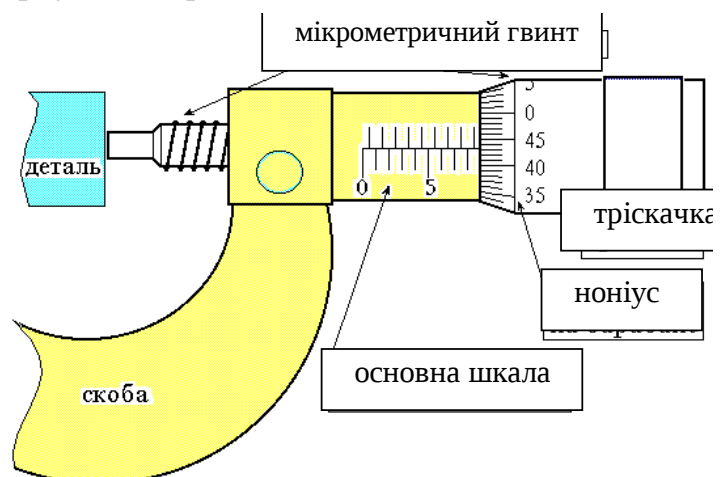


Рисунок 2.2 - Схема будови мікрометра

відає поступальний зсув його на 0,5 мм.

Голівка мікрометричного гвинта виконана у вигляді барабана, що і відкриває одну поділку основної шкали в 0,5 мм при одному оберті гвинта при вигвинчуванні. На барабан нанесена кругова шкала ноніуса з 50 поділками так, що один оберт мікрометричного гвинта (котрий зсуває гвинт на 0,5 мм) відповідає 50 поділкам ноніуса.

Вимірювання проводять у такий спосіб: вимірювану деталь затискають у скобу мікрометричним гвинтом, обертаючи його за тріскачку, щоб опорна площина гвинта притискалася до вимірюваного предмета з певним зусиллям, не деформуючи його. Тріскачка являє собою шайбу з накаткою, розташовану на кінці мікрометричного гвинта. При досягненні необхідного зусилля притискання тріскачка починає прослизати й тріскотіти. За положенням краю барабана на основній горизонтальній шкалі відраховують довжину з точністю до півміліметра (на рис. 2.2- це 8,5 мм). До цього значення додають соті частки міліметра, відлічені по круговій шкалі ноніуса, нанесеній на барабан (на рис. 2.2 - це 0,43 мм). Таким чином, довжина деталі, зображеної на рис. 2.2, дорівнює $8,5 \text{ мм} + 0,43 \text{ мм} = 8,93 \text{ мм}$.

При непрямому вимірюванні об'єму циліндричного тіла в даній лабораторній роботі кожна величина, що входить у формулу об'єму, повинна бути виміряна кілька разів (діаметр циліндра - по декількох напрямних, а висота - по декількох твірних). При цьому для зменшення відносної похибки кінцевого результату висоту треба вимірювати штангенциркулем, а діаметр - мікрометром.

Порядок виконання роботи

1 Підготувати до виконання роботи протокол (див. Додаток): записати тему роботи, мету, оформити домашнє завдання тощо.

2 Вивчити будову вимірювальних приладів і їхні дані занести в таблицю приладів протоколу.

3 Визначити діаметр d і висоту h циліндра, виконавши по п'ять вимірювань ($n = 5$) кожної величини. Отримані дані внести в таблицю вимірювань протоколу.

4 Статистично обробити результати прямих вимірювань (див. розділ 1.2 даних вказівок):

- Обчислити середні арифметичні значення за (1.1) величин $\tilde{d}$ і $\tilde{h}$.
- Обчислити відхилення від середнього кожного вимірювання (1.3) Δd_i і Δh_i .
- Піднести їх до квадрата і просумувати для кожної величини окремо, одержавши $\sum_{i=1}^5 (\Delta d_i)^2$ і $\sum_{i=1}^5 (\Delta h_i)^2$.
- За заданими викладачем надійністю α і числом вимірювань $n = 5$ визначити за таблицею 1.1 коефіцієнт Стюдента $t_{\alpha, n}$.
- За формулою Стюдента (1.4) розрахувати абсолютну похибку обох величин Δd і Δh .
- Розрахувати відносні похибки (1.5) δ_d і δ_h .

• Записати остаточний результат у вигляді чисельних значень величин, правильно виконавши округлення цих величин (див. розділ 1.5): $d = (\tilde{d} \pm \Delta d)_{\alpha}$; $h = (\tilde{h} \pm \Delta h)_{\alpha}$.

5 Обчислити середнє значення об'єму циліндра $\tilde{V}$ (зробити непряме вимірювання об'єму - див. (1.7)).

6 Обчислити відносну δ_V і абсолютну ΔV похибки непрямого вимірювання об'єму (див. розділ 1.3):

• Вивести формулу розрахунку відносної похибки об'єму (1.11).

• Обчислити відносну похибку об'єму циліндра δ_V за відомими похибками діаметра і висоти.

• Обчислити абсолютну похибку вимірювання об'єму ΔV за (1.12).

7 Записати остаточний результат у вигляді чисельних значень величин, правильно виконавши округлення величин (див. розділ 1.5): $V = (\tilde{V} \pm \Delta V)_{\alpha}$; $\delta_V \%$.

8 Остаточнo оформити протокол виконання роботи: записати висновок, підписати протокол (див. Додаток до даних методичних вказівок) і дати на підпис викладачеві.

Контрольні запитання

- 1 Як побудовано штангенциркуль і як ним робити вимірювання?
- 2 Як побудовано мікрометр і як ним робити вимірювання?
- 3 Як розрахувати величини, що визначають довірчий інтервал?
- 4 Що називається відносною похибкою?
- 5 Як розрахувати абсолютну і відносну похибки прямих вимірювань?
- 6 Як розрахувати абсолютну і відносну похибки непрямих вимірювань?
- 7 Основні правила округлення похибок і середніх значень вимірюваних величин.

Робота № 1-2 Визначення основних параметрів обертального руху твердого тіла

Мета роботи: 1) Вивчити основні закони обертального руху.

2) Визначити кутову швидкість, кутове прискорення і момент інерції маховика.

Прилади і приладдя: Секундомір, мікрометр, лінійка, маятник Максвелла.

Загальні відомості

1) Рівняння, що описують поступальний рух тіла (фізичний зміст величин, що входять у дані рівняння, розглядається в пункті 3 цього розділу)

При описі поступального руху тіла уздовж координатної осі x складають рівняння руху тіла в проекціях на цю вісь:

$$\sum (F_i)_x = F_1 + F_2 + F_3 = m \cdot a, \quad (2.1)$$

де $\sum (F_i)_x$ - сума сил, що діють на тіло в проекції на цю вісь;

m - маса тіла;

a - прискорення тіла уздовж осі.

З рівняння руху виражають прискорення a , що його підставляють у кінематичні рівняння поступального руху щодо відповідної осі:
для переміщення

$$S(t) = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} ; \quad (2.2)$$

для швидкості

$$v(t) = v_0 + a \cdot t , \quad (2.3)$$

де v_0 - початкова швидкість поступального руху;

t - час руху .

2) Рівняння, що описують обертальний рух твердого тіла (фізичний зміст величин, що входять у дані рівняння, розглядається в наступному пункті цієї роботи)

При описі обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі, що проходить через точку O , складають рівняння обертального руху щодо цієї осі:

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + M_O(\vec{F}_3) = \varepsilon \cdot I_O , \quad (2.4)$$

де $\sum M_O(\vec{F}_i)$ - сума моментів усіх сил щодо осі обертання, що проходить через точку O ;

I_O - момент інерції тіла щодо відповідної осі;

ε - кутове прискорення.

З рівняння руху виражають кутове прискорення ε , що підставляють у кінематичні рівняння обертального руху:

для кута повороту

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} ; \quad (2.5)$$

для кутової швидкості

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \cdot t , \quad (2.6)$$

де ω_0 - початкова кутова швидкість; t - час обертання.

3) Величини, що описують поступальний та обертальний рухи і зв'язок між ними

- **Сила:** $\vec{F}$ - міра інтенсивності взаємодії тіл.



Рисунок 2.3 - До визначення моменту сили

- **Момент сили** відносно точки O :
 $M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot d_O$ - обертальна здатність сили,
дорівнює добутку модуля цієї сили F (рис. 2.3) на плече сили d_O (найменшу відстань від лінії дії сили до точки O).

- **Маса:** m - міра інертності тіла.
- **Момент інерції:** I - міра інертності тіла при його обертанні навколо фіксованої осі.

Для точкового тіла масою m , яка обертається навколо осі на відстані r від неї, $I_T = m \cdot r^2$ (видно, що розмірність моменту інерції $\text{кг} \cdot \text{м}^2$). Для твердих тіл довільної форми його обчислюють як суму таких же добутків: $I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$. Для деяких

симетричних тіл моменти інерції розраховані, наприклад, у диска масою m і радіусом R момент інерції щодо осі диска дорівнює $I_D = \frac{m \cdot R^2}{2}$. Для тіл складної форми моменти інерції визначають з експерименту, що й необхідно зробити в даній роботі.

Теорема Штейнера: Якщо момент інерції щодо осі, що проходить через центр мас тіла, дорівнює I_C , то момент інерції стосовно будь-якої осі, що знаходиться на відстані r від неї,

$$I = I_C + m \cdot r^2.$$

- **Переміщення:** $\vec{S}$ - вектор, що поєднує початкове і кінцеве положення тіла.
- **Кут повороту:** φ - кутове переміщення тіла при обертанні.
- **Швидкість уздовж осі:** $v = S'$ - похідна за часом від переміщення уздовж відповідної осі.

- **Кутова швидкість:** $\omega = \varphi'$ - похідна від кутового переміщення за часом.

За кутовою швидкістю можна визначити лінійну швидкість руху точки (що знаходиться на відстані r від осі обертання) (рис. 2.4):

$$v = \omega \cdot r. \quad (2.7)$$

- **Прискорення уздовж осі:** $a = v'$ - похідна за часом від швидкості уздовж відповідної осі.

- **Кутове прискорення:** $\varepsilon = \omega'$ - похідна від кутової швидкості за часом.

За кутовим прискоренням і кутовою швидкістю можна визначити лінійні прискорення (рис. 2.5):

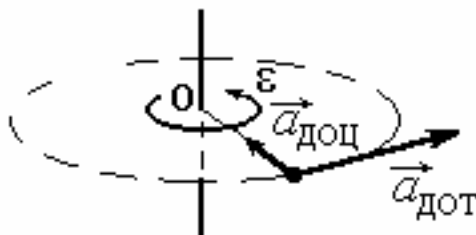


Рисунок 2.5 - До визначення кутового прискорення

$$a_{\text{доц}} = \frac{v^2}{r}; \quad (2.8)$$

дотичне

$$a_{\text{дот}} = \varepsilon \cdot r, \quad (2.9)$$

де v - лінійна швидкість руху по траєкторії; r - радіус траєкторії (відстань від осі обертання).

- **Кінетична енергія** тіла масою m , що рухається поступально зі швидкістю v :

$$E_{\text{кин}} = \frac{m \cdot v^2}{2}. \quad (2.10)$$

- **Кінетична енергія** тіла с моментом інерції I , що обертається з кутовою швидкістю ω ,

$$E_{\text{кин}} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \quad (2.11)$$

4) Опис установки і методика вимірювань

Маятник Максвелла являє собою маховик, насаджений на тонкий вал (рис. 2.6).

Маятник підвішується за допомогою двох ниток, що входять в отвори, розташовані поблизу кінців вала. Якщо нитки водночас намотувати на вал, то маятник буде підніматися.

Піднятий на висоту H маятник можна відпустити - і він почне падати. При цьому потенційна енергія піднятого маятника в міру його падіння переходить у кінетичну. При досягненні щонайнижчої точки (коли нитки цілком розмотані) кінетична енергія обертання маятника (а, отже, і швидкість обертання) буде максимальною, - і маятник за інерцією буде продовжувати обертання, намотуючи нитки на вал і знову піднімаючись. При цьому кінетична енергія буде переходити в потенційну, поки маятник не досягне найвищої точки підйому тощо.

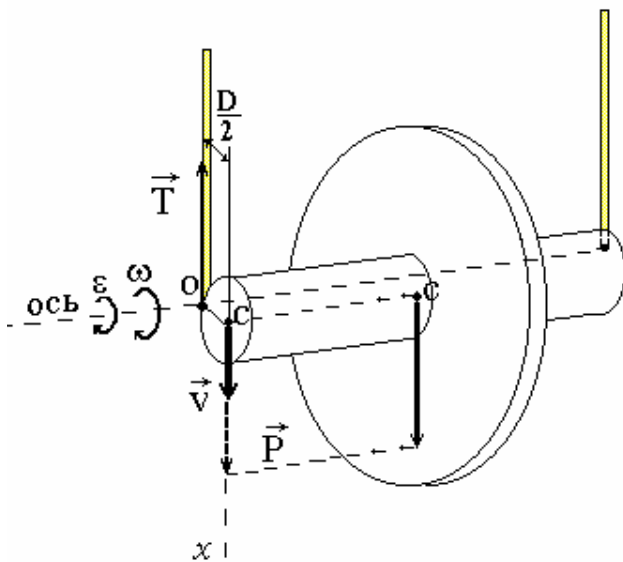


Рисунок 2.6 - Схема будови маятника Максвелла

У даній задачі втратами енергії нехтують і вважають, що щоразу кінетична енергія дорівнює потенційній (закон збереження енергії).

Рух маятника представляється як обертання навколо миттєвої осі, що проходить через точку O дотику нитки і вала. При цьому центр мас його рухається поступально зі швидкістю $\vec{v}$.

Обертальний рух навколо осі, яка проходить через точку O дотику нитки і вала, відбувається під дією моменту сили ваги $\vec{P}$ щодо цієї осі $M_O(P)$. Тоді рівняння обертального руху (див.

(2.4)) матиме вигляд

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = P \cdot \frac{D}{2} = \varepsilon \cdot I_O, \quad (2.12)$$

де $D/2$ - плече сили $\vec{P}$ щодо осі O ; I_O - момент інерції маятника щодо осі O ; ε - кутове прискорення.

Поступальний рух центра мас здійснюється уздовж осі x під дією сили ваги $\vec{P}$ і сили натягу $\vec{T}$ нитки. Тоді рівняння поступального руху (див. (2.1)) матиме вигляд

$$\sum (F_i)_x = P - T = m \cdot a. \quad (2.13)$$

Для визначення кутової швидкості й кутового прискорення запишемо *кінематичні рівняння* (див. вище) у момент часу t :

- поступального руху з нульовою початковою швидкістю:
для переміщення уздовж осі x (див. (2.2)):

$$H = \frac{a \cdot t^2}{2}, \quad (2.14)$$

для швидкості уздовж осі x (див. (2.3)):

$$v = a \cdot t; \quad (2.15)$$

- обертального руху с нульовою початковою кутовою швидкістю:
для повного кутового переміщення навколо осі O за час t (2.5)

$$\varphi = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad (2.16)$$

для кутової швидкості (2.6)

$$\omega = \varepsilon \cdot t. \quad (2.17)$$

З рівняння (2.14) виражаємо прискорення центра мас С:

$$a = \frac{2 \cdot H}{t^2}, \quad (2.18)$$

а з (2.17) - кутову швидкість обертання

$$\omega = \varepsilon \cdot t. \quad (2.19)$$

Дотичне прискорення центра мас пов'язано з кутовою швидкістю співвідношенням (2.9):

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (2.20)$$

де $r=D/2$ - відстань від осі обертання до центра мас, звідки (з урахуванням (2.18)) дістаємо

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{4 \cdot H}{D \cdot t^2}, \quad (2.21)$$

а отже

$$\omega = \varepsilon \cdot t = \frac{4 \cdot H}{D \cdot t}. \quad (2.22)$$

З рівняння обертального руху (2.12) виражаємо момент інерції маятника щодо осі обертання О (враховуючи $P = mg$):

$$I_O = \frac{P \cdot D}{2 \cdot \varepsilon} = \frac{mg \cdot D^2 \cdot t^2}{8 \cdot H}. \quad (2.23)$$

Порядок виконання роботи

1 Підготувати до виконання роботи протокол (див. Додаток): записати тему роботи, мету, оформити домашнє завдання, скласти таблицю вимірювальних приладів (мікрометр, лінійка, секундомір), зарисувати схему установки, записати робочі формули тощо.

2 Виміряти $n=5$ разів мікрометром діаметр вала в області намотування ниток (результат занести в таблицю вимірювань).

3 Приклавши лінійку до рами установки, зафіксувати поділку лінійки, проти якої знаходиться центр вала в нижньому положенні. Потім намотати нитки на вал і зафіксувати поділку лінійки, проти якої знаходиться центр вала у верхньому положенні (для одноманітності обчислень треба щоразу брати однакову відстань H між нижнім і верхнім положеннями вала маховика. Абсолютну похибку вимірювання прийняти рівною ціні поділки лінійки.

4 Відпустити маховик, що знаходиться у верхньому положенні, - і водночас включити секундомір. Коли вал досягне нижнього положення, - зупинити секундомір і зафіксувати час руху вала t . Дослід зробити 5 разів для однієї й тієї ж висоти H . Здобуті дані внести в таблицю вимірювань протоколу.

5 Статистично обробити результати прямих вимірювань (див. розділ 1.2 даних вказівок):

- Розрахувати середні арифметичні значення (1.1) величин $\tilde{D}$ і $\tilde{t}$.
- Обчислити відхилення від середнього кожного вимірювання (1.3).
- Піднести їх до квадрата і скласти, діставши окремо $\sum_{i=1}^5 (\Delta D_i)^2$ і

$$\sum_{i=1}^5 (\Delta t_i)^2.$$

• За заданою викладачем надійністю α і числом вимірювань $n = 5$ визначити за таблицею 1.1 коефіцієнт Стюдента $t_{\alpha, n}$.

• За формулою Стюдента (1.4) розрахувати абсолютну похибку величин ΔD і Δt .

• Розрахувати відносні похибки (1.5) δ_D і δ_t .

• Записати остаточний результат у вигляді чисельних значень величин, виконавши округлення величин (розділ 1.5): $D = (\tilde{D} \pm \Delta D)_\alpha$.

6 Розрахувати середнє значення кутового прискорення ε , кутової швидкості ω і моменту інерції I за робочими формулами (2.21) - (2.23).

7 Обчислити відносні й абсолютні похибки непрямих вимірювань (див. розділ 1.3):

• Вивести формули розрахунку відносних похибок кутового прискорення ε , кутової швидкості ω і моменту інерції I .

• Розрахувати відносні похибки вимірюваних непрямих величин ε , ω і I за відомими похибками безпосередньо вимірюваних величин D , H і t .

• Розрахувати абсолютні похибки непрямих вимірюваних величин.

8 Записати остаточний результат у вигляді чисельних значень величин, виконавши округлення величин (див. розділ 1.5):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\tilde{\varepsilon} \pm \Delta \varepsilon)_\alpha; & \delta_\varepsilon \% &= \Delta \varepsilon / \tilde{\varepsilon} \cdot 100\%; \\ \omega &= (\tilde{\omega} \pm \Delta \omega)_\alpha; & \delta_\omega \% &= \Delta \omega / \tilde{\omega} \cdot 100\%; \\ I &= (\tilde{I} \pm \Delta I)_\alpha; & \delta_I \% &= \Delta I / \tilde{I} \cdot 100\%. \end{aligned}$$

9 Остаточнo оформити протокол виконання роботи: записати висновок, підписати протокол (див. Додаток) і дати на підпис викладачеві.

Контрольні запитання

1 Що називається кутовою швидкістю? Кутовим прискоренням? Моментом сили? У яких одиницях вони вимірюються?

2 Як пов'язані лінійні швидкості та прискорення точок обертового тіла з кутовими?

3 Що таке момент інерції матеріальної точки? Тіла? Від чого він залежить? У яких одиницях він вимірюється?

4 Скласти рівняння руху маятника Максвелла і кінематичні рівняння обертання та поступального руху центра мас.

5 Вивести робочі формули розрахунку кутового прискорення, кутової швидкості та моменту інерції в даній роботі.

6 Вивести формули розрахунку відносних і абсолютних похибок кутового прискорення, кутової швидкості та моменту інерції в даній роботі.

ДОДАТОК

Зразок оформлення протоколу виконання лабораторної роботи

1) Лабораторна робота № 1-1. **Тема:** Визначення об'єму тіл правильної геометричної форми

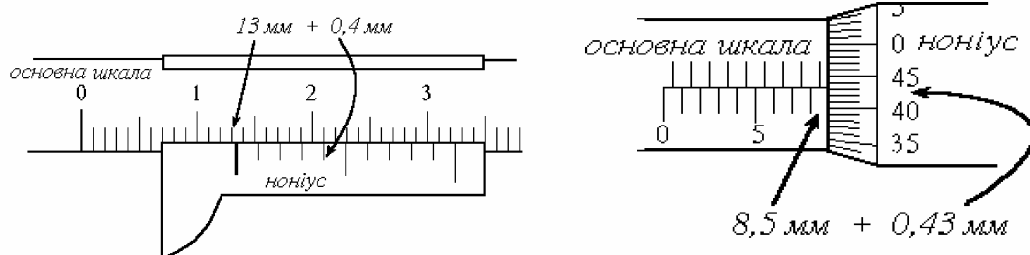
2) **Мета роботи:** - навчитися користуватися штангенциркулем і мікрометром;

- опанувати методи розрахунку похибок прямих і непрямих вимірювань.

Домашнє завдання.

3) **Схема приладу чи установки**

Схема відліку висоти за допомогою штангенциркуля та мікрометра:



4) **Прилади:**

№	Найменування	Тип	Заводський номер	Границя шкали	Ціна поділки	Похибка [клас точності]
1	Штангенциркуль	Навчальний	T11185	135 мм	0,1 мм	0,1 мм
2	Мікрометр	Технічний	03348	50 мм	0,01 мм	0,01 мм

Приладдя: циліндричні тіла різних розмірів.

5) **Робочі формули:**

Непряме вимірювання об'єму циліндра за відомими висотою та діаметром будемо провадити за формулою:

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h;$$

де $\pi = 3,14$; d - діаметр циліндра; h - висота циліндра.

6) **Вимірювання:**

Таблиця результатів **прямих вимірювань**

№	d_i , мм	Δd_i , мм	$(\Delta d_i)^2$, мм ²	h_i , мм	Δh_i , мм	$(\Delta h_i)^2$, мм ²
1	9,31	0,01	10^{-4}	25,4	0	0
2	9,29	-0,01	10^{-4}	25,3	-0,1	10^{-2}
3	9,32	0,02	$4 \cdot 10^{-4}$	25,5	0,1	10^{-2}
4	9,30	0	0	25,4	0	0
5	9,28	-0,02	$4 \cdot 10^{-4}$	25,3	-0,1	10^{-2}
$\tilde{d} = 9,30$		$\sum_{i=1}^5 (\Delta d_i)^2 =$	$10 \cdot 10^{-4}$	$\tilde{h} = 25,4$	$\sum_{i=1}^5 (\Delta h_i)^2 =$	$3 \cdot 10^{-2}$

В таблиці середні арифметичні значення обчислювались таким чином:

$$\tilde{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=5} d_i; \quad \tilde{d} = \frac{1}{5} \cdot (9,31 + 9,29 + 9,32 + 9,30 + 9,28) = 9,30 \text{ мм};$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=5} h_i; \quad \tilde{h} = \frac{1}{5} \cdot (25,4 + 25,3 + 25,5 + 25,4 + 25,3) = 25,4 \text{ мм}.$$

7) Статистична обробка результатів

7.а) Прями вимірювання

Чисельні значення відхилень від середнього, занесені в таблицю, обчислювались за формулами

$$\Delta d_i = \tilde{d} - d_i; \quad \Delta h_i = \tilde{h} - h_i.$$

Потім вони підносяться до квадрата і складаються (останній стовпець таблиці):

$$\sum_{i=1}^5 (\Delta d_i)^2 = 10^{-3} \text{ мм}^2; \quad \sum_{i=1}^5 (\Delta h_i)^2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ мм}^2,$$

тому у формулу Стюдента при обчисленні абсолютних похибок підставлялися відразу значення цих сум:

$$\Delta d = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2}{n \cdot (n-1)}}; \quad \Delta d = 2,77 \cdot \sqrt{\frac{10^{-3}}{5 \cdot 4}} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ мм};$$

$$\Delta h = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta h_i)^2}{n \cdot (n-1)}}; \quad \Delta h = 2,77 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 4}} = 4 \cdot 10^{-1} \text{ мм},$$

де при розрахунках враховано, що при надійності $\alpha = 0,95$ і кількості вимірювань $n = 5$ коефіцієнт Стюдента $t_{0,95;5} = 2,77$ (див. табл. 1.1).

Відносні похибки:

$$\delta_d = \frac{\Delta d}{\tilde{d}} \cdot 100\%; \quad \delta_d = \frac{0,02}{9,30} \cdot 100\% = 0,2 \%;$$

$$\delta_h = \frac{\Delta h}{\tilde{h}} \cdot 100\%; \quad \delta_h = \frac{0,4}{25,4} \cdot 100\% = 1,6 \%.$$

Остаточний результат прямих вимірювань:

$$d = (9,30 \pm 0,02)_{0,95} \text{ мм}; \quad \delta_d = 0,2 \%;$$

$$h = (25,4 \pm 0,4)_{0,95} \text{ мм}; \quad \delta_h = 1,6 \%.$$

7.б) Непрямі вимірювання

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h; \quad V = \frac{3,14 \cdot (9,3)^2}{4} \cdot 25,4 = 1724 \text{ мм}^3.$$

За робочою формулою дістаємо співвідношення для обчислення відносної похибки об'єму :

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{\tilde{V}} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta d}{\tilde{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\tilde{h}}\right)^2} = \sqrt{(2\delta_d)^2 + (\delta_h)^2};$$

$$\delta_V = \sqrt{(2 \cdot 0,002)^2 + (0,016)^2} = 1,6 \cdot 10^{-2}.$$

Абсолютна похибка вимірювання об'єму:

$$\Delta V = \delta_V \cdot \tilde{V} ; \Delta V = 1,65 \cdot 10^{-2} \cdot 1\,724 = 28,4 \text{ мм}^3.$$

8) **Результат:**

Об'єм циліндра $V = (1\,724 \pm 29)_{0.95} \text{ мм}^3 ; \delta_V \% = 1,7 \% .$

9) **Висновок:** Основну похибку у непряме вимірювання об'єму вносить величина, вимірювана штангенциркулем, тобто менш точним приладом.

Роботу виконав: (підпис)

Роботу прийняв: _____

ЧАСТИНА 2

1 ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.1 Физические величины и их измерение

Изучаемые физикой законы окружающего мира выражаются в форме математических уравнений, связывающих различные физические величины. **Физической величиной** обычно называют какое-либо *свойство* тела или физического процесса, которое может быть *определено количественно* путем измерений. **Измерить физическую величину** - это значит сравнить ее с однородной величиной, принятой за единицу.

Измерения физических величин разделяют на прямые и косвенные.

Прямым измерением называется способ, при котором сама величина сравнивается с эталоном. Прямые измерения дают непосредственно значения физической величины. При **косвенных** измерениях физическая величина вычисляется с помощью формул, в которые подставляют результаты прямых измерений.

Всякое измерение, как бы тщательно оно ни было произведено, неизбежно сопровождается погрешностями. Поэтому в задачу любого измерения входит нахождение не только самой измеряемой величины, но и ее погрешности.

Погрешности бывают трех типов:

1) **Грубые**, или промахи, характеризуются аномально большой величиной и возникают при пользовании неисправными приборами, вследствие ошибки экспериментатора и т.д. Результат измерения, которое содержит промах, исключается, и данное измерение надо повторить.

2) **Систематическими** называются погрешности одного знака, обусловленные одной и той же причиной и при многократных измерениях имеющие одно и то же значение, т.е. систематически повторяющиеся. Такие погрешности трудно, но можно учесть, т.е. устранить. Например, если стрелка амперметра при отсутствии тока установлена не на нуле, а на каком-то другом делении, то, вычитая каждый раз значение этого деления из показаний амперметра, мы избавимся от этой систематической погрешности.

3) **Случайными** называются погрешности, вызванные множеством независимых причин, действующих в каждом отдельном измерении различным образом, поэтому устранить такие погрешности не удастся. К примеру, на измерение малых токов с помощью чувствительного микроамперметра влияют сотрясения прибора, колебания температуры окружающей среды, наличие внешнего магнитного поля и т.д. При каждом измерении степень влияния таких факторов на показания микроамперметра будет различной, поэтому результаты измерений каждый раз будут отличаться. Случайные погрешности с помощью дополнительных мер можно свести к минимуму (например, поместив микроамперметр в термостат), но полностью устранить их невозможно, и, чтобы их учесть, результаты измерений должны подвергаться статистической обработке.

1.2 Статистическая обработка результатов прямых измерений

Нахождение значения физической величины x по результатам проведенных измерений производится в следующей последовательности

1) Проводят **n измерений** физической величины x , в результате которых получают ряд значений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

2) Вычисляют наиболее вероятное значение измеряемой величины, которым является **среднее арифметическое** из результатов отдельных измерений:

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.1)$$

Среднее значение измеряемой величины $\tilde{x}$ приближается к истинному x при очень большом числе измерений. При конечном числе измерений n это выполняется не точно и результат измерений представляется в виде **доверительного интервала** $(\tilde{x} - \Delta x) \leq x \leq (\tilde{x} + \Delta x)$ в котором будет находиться искомая величина x с вероятностью α , которая называется **доверительной вероятностью**, или **надёжностью**. Доверительная вероятность показывает, какая доля (часть) измерений при большом их числе попадает в доверительный интервал.

Для расчета **абсолютной погрешности** Δx , определяющей нижнюю и верхнюю границы доверительного интервала, необходимо выполнить следующие действия.

3) Находят **отклонения** результатов каждого измерения **от среднего** значения:

$$\Delta x_1 = \tilde{x} - x_1; \quad \Delta x_2 = \tilde{x} - x_2; \quad \dots; \quad \Delta x_n = \tilde{x} - x_n. \quad (1.2)$$

Возводят каждое из них в квадрат и вычисляют сумму квадратов отклонений от среднего

$$\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2. \quad (1.3)$$

4) Задаются доверительной вероятностью измеряемой величины α .

5) По значениям доверительной вероятности α и числу измерений n из таблиц (см. табл.1.1 на стр.4) находят значение **коэффициента Стьюдента** $t_{\alpha,n}$. (Например, при надёжности $\alpha = 0.95$ и числе измерений $n = 5$ получаем $t_{0.95,5} = 2,77$.)

6) Определяют **абсолютную погрешность** по формуле Стьюдента:

$$\Delta x = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (1.4)$$

Видно, что абсолютная погрешность Δx (а значит, и ширина доверительного интервала) тем меньше, чем меньше коэффициент Стьюдента, который, в свою очередь, можно уменьшить увеличением числа измерений n , заданием меньшей доверительной вероятности α или уменьшением погрешностей отдельных измерений.

7) Рассчитывают **относительную погрешность**, также характеризующую точность измерений:

$$\delta = \frac{\Delta x}{\tilde{x}}. \quad (1.5)$$

8) **Окончательный результат** представляется в виде значений величин, определяющих доверительный интервал и относительной погрешности:

$$x = (\tilde{x} \pm \Delta x)_{\alpha}; \quad \delta\% = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\%. \quad (1.6)$$

Примечание: Если рассчитанная абсолютная погрешность окажется меньше погрешности измерений прибора, то за абсолютную погрешность принимается погрешность измерительного прибора (см. раздел 1.4).

1.3 Абсолютные и относительные погрешности косвенных измерений

При определении погрешности косвенных измерений, т. е. когда их величина рассчитывается по рабочей формуле, прежде всего необходимо получить формулы для погрешности в каждом конкретном случае. Погрешности косвенных измерений определяются по известным погрешностям прямых измерений величин, определяющих искомую величину.

В простом случае, когда искомая величина определяется суммой $x = a + b$, и при этом величины a и b определяются прямыми измерениями в виде доверительных интервалов $a = (\tilde{a} \pm \Delta a)_{\alpha}$ и $b = (\tilde{b} \pm \Delta b)_{\alpha}$, тогда $x = \tilde{a} \pm \Delta a + \tilde{b} \pm \Delta b = (\tilde{a} + \tilde{b}) \pm (\Delta a + \Delta b)$. Таким образом, среднее значение величины находится как сумма (или разность) средних значений слагаемых, а абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\tilde{x} = \tilde{a} + \tilde{b} \quad \text{и} \quad \Delta x = (\Delta a + \Delta b)_{\alpha}.$$

Если же измеряемая величина вычисляется как функция нескольких множителей (например объем цилиндра $V = \pi D^2 h / 4$, где $D = \tilde{D} \pm \Delta D$ и $h = \tilde{h} \pm \Delta h$), то среднее значение находят по рабочей формуле:

$$\tilde{V} = \frac{\pi \tilde{D}^2}{4} \cdot \tilde{h}, \quad (1.7)$$

а формулу для определения абсолютной погрешности можно получить следующим образом:

1) Заданную рабочую формулу сначала логарифмируют по основанию натурального логарифма:

$$\ln V = \ln \pi + 2 \ln D + \ln h - \ln 4. \quad (1.8)$$

2) Дифференцируют полученное выражение:

$$\frac{dV}{V} = 2 \frac{dD}{D} + \frac{dh}{h}, \quad (\text{так как } d \ln 4 = 0 \text{ и } d \ln \pi = 0). \quad (1.9)$$

3) Считая, что погрешности невелики, заменяют знак дифференциала d на знак абсолютной погрешности Δ и истинные значения величин - на средние:

$$\frac{\Delta V}{\tilde{V}} = 2 \frac{\Delta D}{\tilde{D}} + \frac{\Delta h}{\tilde{h}}. \quad (1.10)$$

4) Статически независимые величины складываются геометрически, поэтому относительная погрешность искомой величины определяется как геометрическая сумма отдельных погрешностей:

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{\tilde{V}} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta D}{\tilde{D}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\tilde{h}}\right)^2} . \quad (1.11)$$

5) Находят *абсолютную погрешность* косвенных измерений объема цилиндра:

$$\Delta V = \delta_V \cdot \tilde{V} . \quad (1.12)$$

6) **Окончательный результат** записывают в виде доверительного интервала и относительной погрешности:

$$V = (\tilde{V} \pm \Delta V)_{\alpha}; \quad \delta_V \% = \delta_V \cdot 100\% . \quad (1.13)$$

1.4 Погрешности, вносимые измерительными приборами

Помимо случайных погрешностей, точность измерения определяется наименьшей мерой, до которой можно производить измерения с уверенностью в правильности результата. Максимальная погрешность (*точность прибора*), допускаемая приборами, обычно наносится на сам прибор.

Точность электроизмерительных приборов определяется классом точности, значение которого указано на шкале прибора. *Класс точности* – это округлённая относительная погрешность, которую допускает прибор на пределе шкалы, округлённая до вперед заданного (см. ниже) значения:

$$\beta = \left\{ \frac{\Delta x}{x_{\max}} \cdot 100 \right\}, \quad (1.14)$$

где Δx - абсолютная погрешность прибора; $x_{\max}$ - предел шкалы прибора.

Существует *девять классов точности электроизмерительных приборов*, а значит, девять значений, до которых округляется выраженная в процентах относительная погрешность прибора:

0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,5	4,0
------	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

По классу точности студент должен уметь определить **абсолютную погрешность**, вносимую прибором. Например, если класс точности равен 0,5 у вольтметра с пределом шкалы 150 В, это означает, что

$$0,5 = \frac{\Delta u}{150 \text{ В}} \cdot 100, \quad \text{так как} \quad \beta = \frac{\Delta u}{u_{\max}} \cdot 100, \quad (1.15)$$

откуда

$$\Delta u = \frac{\beta \cdot u_{\max}}{100}, \quad \text{или} \quad \Delta u = \frac{0,5 \cdot 150 \text{ В}}{100} = 0,75 \text{ В}. \quad (1.16)$$

Допустимая абсолютная погрешность прибора *одинакова* при любых отклонениях стрелки прибора. Поэтому при меньших отклонениях стрелки относительная ошибка δ_u оказывается больше. В нашем примере при отклонении стрелки на половину шкалы (т.е. на 75 В) относительная погрешность измерений составит

$$\delta_u \% = \frac{\Delta u}{u} \cdot 100\% = \frac{0,75B}{75B} \cdot 100\% = 1\% , \quad (1.17)$$

а при отклонении на 10 В:

$$\delta_u \% = \frac{\Delta u}{u} \cdot 100\% = \frac{0,75B}{10B} \cdot 100\% = 7,5\%, \quad (1.18)$$

в то время, как на пределе шкалы в 150 В относительная погрешность равна классу точности $\delta_u \% = \beta = 0,5\%$. Таким образом, для получения возможно меньших относительных ошибок при пользовании электроизмерительными приборами надо выбирать приборы с таким пределом шкалы, чтобы отклонения стрелки прибора были не меньшими, чем на половину шкалы.

Если величина случайной погрешности Δx_C , рассчитанной по формуле (1.4) в разделе 1.2, окажется сравнимой с величиной погрешности прибора Δx_{II} , то для $\alpha=0,95$ в качестве абсолютной погрешности измерения следует взять величину

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_C)^2 + (\Delta x_{II})^2} \quad (1.19)$$

1.5 Правила округления

Прежде всего уточним термины. Для удобства чтения числа разбивают на классы (единицы, тысячи, миллионы и т.д.). В каждый класс входит три *разряда* - единицы, десятки сотни.

Значащими цифрами данного числа называют цифры, начиная с первой слева отличной от нуля и кончая последней, включая внутренние нули. В следующих

5	3	6	8	2	5	3	7	4	,	2	8	5	9	5	4	] Число		
↓			↓			↓			↓			М						
СОТНИ			ДЕСЯТКИ			МИЛЛИОНЫ			СОТНИ			ДЕСЯТКИ			ЕДИНИЦЫ			] его разряды
МИЛЛ.			ТЫС.			ЕДИН.			ДОЛИ			МИЛЛИОННЫЕ						
															] его классы			

примерах указано число значащих цифр (первая значащая цифра подчеркнута):

5 423,47 - 6 значащих цифр;
 0,000605 - 3 значащих цифры;
18,003 - 5 значащих цифр.

При записи приблизительных чисел последняя справа цифра считается сомнительной, то есть её погрешность считается не больше 5 в следующем младшем разряде. Цифры слева от сомнительной считаются правильными.

В физике принято записывать число в виде «степени десяти», то есть с помощью показателей степени; например, вместо 36900 пишут $3,69 \cdot 10^4$, а вместо 0,0021 записывают $2,1 \cdot 10^{-3}$. Такая запись числа позволяет чётко указать количество значащих цифр. Если известно, например, что точность записи составляет три значащих цифры, то результат надо записать в виде $3,69 \cdot 10^4$, а ес-

ли значащих цифр четыре, - это в виде $3,690 \cdot 10^4$. В числе 36900 при общепринятом чтении мы считаем три значащие цифры.

После вычисления среднего значения и абсолютной погрешности для записи доверительного интервала используют **правила округления**:

Сначала округляют **абсолютную погрешность**, которая округляется:

- до одной значащей цифры, если первая значащая цифра равна 3 или больше,

до двух значащих цифр, если первая значащая цифра равна 1 или 2;

- всегда с увеличением на 1 последней сохраняемой цифры, если последующая не равна 0

(без увеличения, если последующая цифра равна 0).

Примеры округления абсолютной погрешности (разряд, до которого производится округление, - подчеркнут):

разряд округления - десятки тысяч:

$$\Delta x = \underline{50} \ 999,99 \approx \underline{50} \ 000;$$

$$\Delta x = \underline{51} \ 000,01 \approx \underline{60} \ 000;$$

$$\Delta x = \underline{91} \ 000 \approx \underline{100} \ 000;$$

разряд округления - тысячные доли:

$$\Delta x = 0,02\underline{2}09 \approx 0,02\underline{2};$$

$$\Delta x = 0,01\underline{2}10 \approx 0,01\underline{3};$$

$$\Delta x = 0,01 \approx 0,01\underline{0}.$$

Затем округляют **среднее значение величины**, которое округляется:

- до того разряда, до которого округлялась абсолютная погрешность;

- с увеличением на 1 последней сохраняемой цифры, если последующая цифра больше 5,

или если следующая равна 5, а последняя сохраняемая цифра, – нечётная

(без увеличения, если последующая цифра меньше 5, или следующая равна 5, а последняя сохраняемая цифра, – чётная).

Примеры округления среднего значения при округленной абсолютной погрешности (разряд, до которого производится округление, подчеркнут):

округление до десятков тысяч:

округление до тысячных долей:

$$x = (\underline{435} \ 087,9 \pm \underline{60} \ 000) \approx (\underline{440} \ 000 \pm \underline{60} \ 000); \quad x = (24,54\underline{3}67 \pm 0,01\underline{2}2) \approx (24,54\underline{4} \pm 0,01\underline{3});$$

$$x = (\underline{434} \ 987,9 \pm \underline{53} \ 000) \approx (\underline{430} \ 000 \pm \underline{60} \ 000); \quad x = (24,54\underline{3}37 \pm 0,02\underline{30}) \approx (24,54\underline{3} \pm 0,02\underline{3});$$

$$x = (\underline{405} \ 087 \pm \underline{202} \ 000) \approx (\underline{410} \ 000 \pm \underline{210} \ 000); \quad x = (24,54\underline{0}57 \pm 0,01\underline{0}) \approx (24,54\underline{1} \pm 0,01\underline{0}).$$

1.6 Округление в случае математических операций над числами

При выполнении вычислений (косвенных измерений) следует руководствоваться практически необходимой точностью. Вести вычисления с точностью большей, чем этого допускают данные задачи, бессмысленно. Округление величин перед выполнением операции производят по обычным правилам (см. выше); **при этом**:

При сложении и вычитании в слагаемых следует сохранять на один разряд больше, чем у наименее точного слагаемого. После выполнения действия результат округляется до разряда наиболее старшего из всех младших:

$$1,1 + 2,3\underline{4}418 + 3,20\underline{5}945 \approx 1,1 + 2,34 + 3,21 = 6,65 \approx 6,7.$$

При умножении и делении в сомножителях и в самом результате целесообразно оставлять столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом значащих цифр:

$$\frac{30,9 \cdot 1,8364}{2,412} \approx 23,526019 \approx 23,5.$$

При возведении в степень, извлечении корня, нахождении логарифма в конечном результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень число:

$$11,38^2 = 129,5044 \approx 129,5 ;$$

$$\sqrt{5,12} = 2,262 \approx 2,26 ;$$

$$\lg 77,23 = 2,8878 \approx 2,888 .$$

В физике обычно принято записывать число в виде «степени десяти», т. е. с помощью показателей степени; например, вместо 36900 пишут $3,69 \cdot 10^4$, а вместо 0,0021 записывают $2,1 \cdot 10^{-3}$. Одно из преимуществ такой записи состоит в том, что она позволяет чётко и ясно указать число значащих цифр. Если известно, например, что точность записи составляет три значащие цифры, то результат следует записать в виде $3,69 \cdot 10^4$, а если значащих цифр четыре, - то в виде $3,690 \cdot 10^4$.

Примечание: При вычислении промежуточных результатов следует брать на одну цифру больше, чем указано выше. В окончательном результате эта “запасная” цифра отбрасывается при округлении конечного результата.

1.7 Графическое представление результатов измерений

Когда требуется проследить зависимость одной измеряемой величины от другой, например, зависимость сопротивления проводника - от температуры, тока через элемент - от напряжения на нем (вольт-амперная характеристика) результат измерений представляется в виде графика. График строится по таблице значений измеренных величин.

1) Перед построением графика следует выбрать масштаб по осям x и y . Эти масштабы выбирают произвольно, независимо друг от друга, но так, чтобы график не был слишком растянутым или, наоборот, слишком мелким. Для этого по таблице значений измеренных величин целесообразно определить минимальные и максимальные значения как изображаемой функции, так и аргумента, и распределить интервалы представляемых величин на всю отпущенную размерами листа длину осей x и y (как это показано ниже на рис. 1.1).

2) Полученные интервалы разбивают масштабными делениями, обычно кратными 5, 10, 50, 100, ... единицам измеряемой величины. У концов осей пишут буквенные обозначения и единицы измерения изображаемых величин.

3) Далее на график наносят экспериментальные точки. Кривую на графике следует проводить не просто соединяя точки друг с другом, а выбирая преимущественное направление среди точек. Кривая должна проходить так, чтобы по возможности одинаковое число точек находилось над кривой и под ней. Разброс точек относительно кривой обусловлен наличием ошибок измерений (ошибки, если они известны, на графике наносятся в виде вертикальных отрез-

ков). Чем меньше ошибки измерений, тем точнее точки определяют кривую. Грубые просчеты дадут точки, далеко расположенные от кривой.

Пример. Требуется построить зависимость силы тока в колебательном контуре от частоты внешней ЭДС (амплитудно-частотную характеристику) по данным табл. 1.2.

Пусть мы уже имеем оси координат, вычерченные во всю длину, отпущенную размерами рисунка (см. рис. 1.1).

Таблица 1.2 - Пример задания функции в табличном виде

ν , кГц	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I , мА	35	60	50	100	130	200	170	110	90	60

1) Из таблицы 1.2 видно, что частота колебаний принимает значения из интервала $\nu \in (10; 20)$ кГц, а сила тока в колебательном контуре $I \in (40; 200)$ мА.

2) Таким образом, всю имеющуюся длину оси абсцисс (см. рис. 1.1) разбиваем на 10 делений (начиная с 10 кГц и заканчивая 20 кГц), а всю длину оси ординат - на 20 делений (начиная от 0 и заканчивая 200 мА). У концов осей пишем буквенные обозначения откладываемых величин и единицы их измерения (I , мА и ν , кГц).

3) Далее на график наносим точки в соответствии с данными таблицы. А затем, выбирая преимущественное направление среди точек, строим кривую. Погрешность измерений указываем вертикальным отрезком в масштабе соответствующей оси. Промахи легко исключить после построения графика.

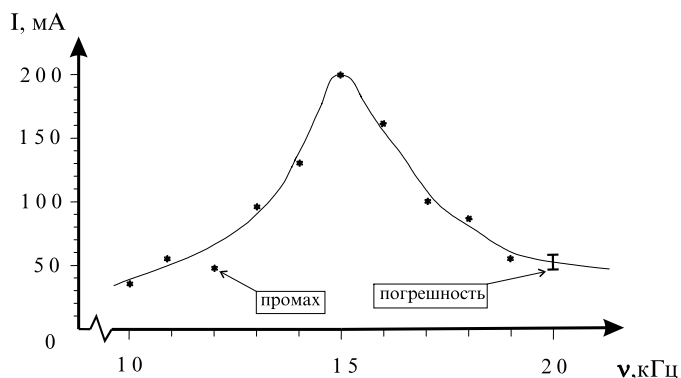


Рисунок 1.1 - Пример построения графика функции

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Работа № 1-1 Определение объема тел правильной геометрической формы

Цель работы: 1) Научиться пользоваться приборами для определения линейных размеров тел.

2) Изучить методы расчета погрешностей прямых и косвенных измерений.

Приборы и принадлежности: Штангенциркуль, микрометр, тела правильной геометрической формы.

Общие сведения

Для определения объема тел следует определить геометрический тип тела и составить формулу расчета объема, учитывая, что в окончательном виде объем

должен быть выражен через непосредственно измеряемые величины, т. е. через линейные размеры тела.

Для определения линейных размеров тел в данной работе используются штангенциркуль и микрометр.

Штангенциркуль (рис. 2.1) рассчитан на измерение длин, не превышающих 150 - 300 мм с точностью до 0,1 или 0,05 мм. Отсчет с точностью до 1 мм производят по линейной шкале штанги.

Для уточнения измеряемой длины служит линейный *нониус*, деления которого нанесены на подвижную рамку штангенциркуля.

Цена деления шкалы штанги обычно равна 1 мм. Нулевой штрих нониуса при плотно сомкнутых губках совпадает с нулевым делением шкалы штанги, вследствие чего, *отсчет целого числа миллиметров производится по положению нуля нониуса* (на рис. 2.1 это 13 мм).

Доли миллиметра отсчитывают с помощью нониуса. Чаще всего встречаются штангенциркули, у которых нониус представляет собой отрезок длиной 19 мм, разбитый на 10 делений (см. рис. 2.1) так, что длина одного отрезка нониуса оказывается равной 1,9 мм.

Если сдвинуть рамку штангенциркуля так, что первое (после нулевого) деление нониуса (1,9 мм) совпадет с делением 2 мм основной шкалы штанги, то расстояние между губками будет 0,1 мм. Если сдвинуть рамку так, что второе (после нулевого) деление совпадет с делением 4 мм шкалы штанги, то расстояние между губками будет 0,2 мм. Таким образом, *число десятых долей миллиметра равно числу делений нониуса от нулевого до совмещенного с любым делением шкалы штанги* (на рисунке это четвертое деление, т. е. 0,4 мм). Это правило отсчета десятых долей миллиметра справедливо, если ноль нониуса находится между двумя любыми делениями шкалы штанги (на рис. 2.1. - между тринадцатым и четырнадцатым).

Примечание: При измерениях не играет роли, с каким делением основной шкалы совпало деление нониуса. Важен лишь порядковый номер деления нониуса.

Пример. На рис. 2.1 при измерении детали ноль нониуса оказался между 13-м и 14-м делениями основной шкалы и 4-е деление (после нулевого) нониуса совместились с каким-то делением основной шкалы. Это значит, что длина детали (расстояние между губками штангенциркуля) соответствует $13 \text{ мм} + 0,4 \text{ мм} = 13,4 \text{ мм}$.

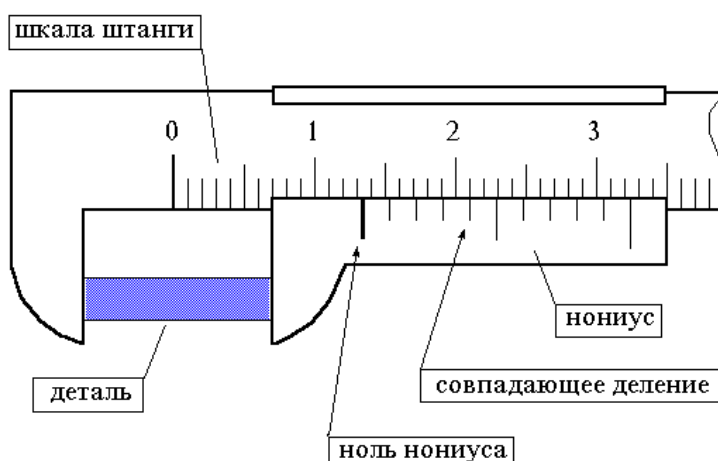


Рисунок .2.1 - Схема устройства штангенциркуля

Аналогично проводят измерения штангенциркулем, у которого длина шкалы нониуса равна 39 мм и разделена не на 10, а на 20 делений. Но при этом порядковый номер деления (после нулевого), совместившегося с каким-то делением

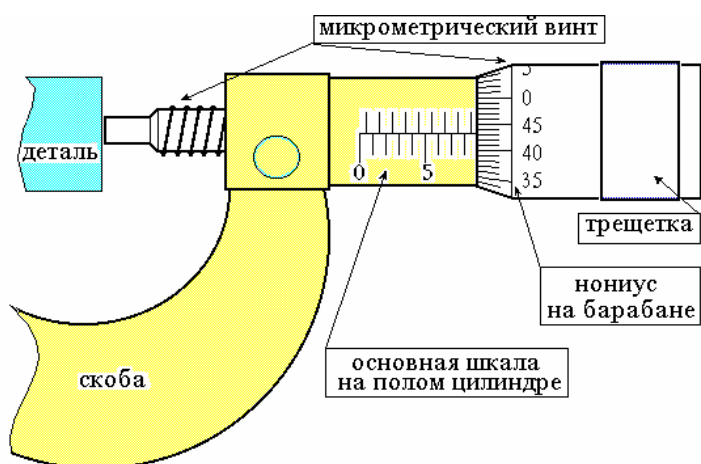


Рисунок 2.2 - Схема устройства микрометра

основной шкалы, умножают не на 0,1 мм, а на 0,05 мм. Точность измерения штангенциркулем равна частному от деления цены деления основной шкалы на число делений нониуса, например, для штангенциркуля, изображенного на рисунке, $\Delta = 1 \text{ мм}/10 \text{ делений} = 0,1 \text{ мм}$.

Микрометр (рис. 2.2) применяют для измерений с точностью до 0,01 мм. Основная линейная шкала микрометра нанесена на жестко соединенный со скобой

полый цилиндр, в который ввинчен микрометрический винт, одному обороту которого соответствует поступательное смещение его на 0,5 мм.

Головка микрометрического винта выполнена в виде барабана, который и открывает одно деление основной шкалы в 0,5 мм при одном обороте винта при вывинчивании. На барабан нанесена круговая шкала нониуса в 50 делений так, что один оборот микрометрического винта (смещающий винт на 0,5 мм) соответствует 50 делениям нониуса.

Измерения производят следующим образом: измеряемую деталь зажимают в скобу микрометрическим винтом, вращая его за трещотку, чтобы опорная плоскость винта прижималась к измеряемому предмету с определенным усилием, не деформируя его. Трещотка представляет собой шайбу с накаткой, расположенную на конце микрометрического винта. При достижении необходимого усилия прижима трещотка начинает проскальзывать и трещать. По положению края барабана на основной горизонтальной шкале отсчитывают длину с точностью до полумиллиметра (на рис. 2.2 - это 8,5 мм). К этому значению прибавляют сотые доли миллиметра, отсчитанные по круговой шкале нониуса, нанесенной на барабан (на рис. 2.2 - это 0,43 мм). Таким образом, длина детали, изображенной на рис. 2.2 равна $8,5 \text{ мм} + 0,43 \text{ мм} = 8,93 \text{ мм}$.

При косвенном измерении объема цилиндрического тела в данной лабораторной работе каждая величина, входящая в формулу объема, должна быть измерена несколько раз (диаметр основания по нескольким направляющим, а высота - по нескольким образующим). При этом для уменьшения относительной погрешности конечного результата больший размер следует измерять штангенциркулем, а меньший - микрометром.

Порядок выполнения работы:

1 Подготовить к выполнению работы протокол (см. Приложение): записать тему работы, цель, оформить домашнее задание и т.д.

2 Изучить устройство измерительных приборов и их данные занести в таблицу приборов протокола.

3 Определить диаметр d и высоту h цилиндра, выполнив по пять измерений ($n = 5$) каждой величины. Полученные данные внести в таблицу измерений протокола.

4 Статистически обработать результаты прямых измерений (см. раздел 1.2 настоящих указаний):

- Рассчитать средние арифметические значения величин $\tilde{d}$ и $\tilde{h}$ по (1.1).
- Вычислить отклонения от среднего каждого измерения Δd_i и Δh_i по (1.3).
- Возвести их в квадрат и просуммировать для каждой величины в отдельности, получив $\sum_{i=1}^5 (\Delta d_i)^2$ и $\sum_{i=1}^5 (\Delta h_i)^2$.

• По заданной преподавателем надежности α и числу измерений $n = 5$ определить по таблице 1.1 коэффициент Стьюдента $t_{\alpha, n}$.

• По формуле Стьюдента (1.4) рассчитать абсолютную погрешность обеих величин Δd и Δh .

- Рассчитать относительные погрешности δ_d и δ_h по формуле (1.5).
- Записать окончательный результат в виде численных значений величин, правильно выполнив округления этих величин (см. раздел 1.5): $d = (\tilde{d} \pm \Delta d)_{\alpha}$; $h = (\tilde{h} \pm \Delta h)_{\alpha}$.

5 Рассчитать среднее значение объема цилиндра $\tilde{V}$ (произвести косвенное измерение объема см. (1.7)).

6 Вычислить относительную δ_V и абсолютную ΔV погрешности косвенного измерения объема (см. раздел 1.3):

- Вывести формулу расчета относительной погрешности объема (1.11).
- Рассчитать относительную погрешность объема цилиндра δ_V по известным погрешностям диаметра и высоты.
- Рассчитать абсолютную погрешность измерения объема ΔV (1.12).

9 Записать окончательный результат в виде численных значений величин, правильно выполнив округления величин (см. раздел 1.5): $V = (\tilde{V} \pm \Delta V)$; $\delta_V \%$.

10 Окончательно оформить протокол выполнения работы: записать вывод, подписать протокол (см. Приложение к данным методическим указаниям) и дать на подпись преподавателю.

Контрольные вопросы

- 1 Как устроен штангенциркуль и как им производить измерения?
- 2 Как устроен микрометр и как им производить измерения?
- 3 Как рассчитать величины, определяющие доверительный интервал?
- 4 Что называется относительной погрешностью?
- 5 Как рассчитать абсолютную и относительную погрешности прямых измерений?

6 Как рассчитать абсолютную и относительную погрешности косвенных измерений?

7 Основные правила округления погрешностей и средних значений измеряемых величин.

Работа № 1-2 Определение основных параметров вращательного движения твердого тела

Цель работы: 1) Изучить основные законы вращательного движения.

2) Определить угловую скорость, угловое ускорение и момент инерции маховика.

Приборы и принадлежности: Секундомер, микрометр, линейка, маятник Максвелла.

Общие сведения

1) Уравнения, описывающие поступательное движение тела (физический смысл величин, входящих в данные уравнения, рассматривается в пункте 3 настоящего раздела).

При описании поступательного движения тела вдоль координатной оси x составляют уравнение движения тела в проекциях на эту ось:

$$\sum (F_i)_x = F_1 + F_2 + F_3 = m \cdot a, \quad (2.1)$$

где $\sum (F_i)_x$ - сумма сил, действующих на тело в проекции на эту ось;

m - масса тела;

a - ускорение тела вдоль оси.

Из уравнения движения выражают ускорение a , которое подставляют в кинематические уравнения поступательного движения относительно соответствующей оси:

для перемещения

$$S(t) = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}; \quad (2.2)$$

для скорости

$$v(t) = v_0 + a \cdot t, \quad (2.3)$$

где v_0 - начальная скорость поступательного движения;

t - время движения.

2) Уравнения, описывающие вращательное движение твердого тела (физический смысл величин, входящих в данные уравнения, рассматривается в следующем пункте этой работы)

При описании движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O , составляют уравнение вращательного движения относительно этой оси:

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + M_O(\vec{F}_3) = \varepsilon \cdot I_O, \quad (2.4)$$

где $\sum M_O(\vec{F}_i)$ - сумма моментов всех сил относительно оси вращения, проходящей через точку O ;

I_O - момент инерции тела относительно соответствующей оси;

ε - угловое ускорение.

Из уравнения движения выражают угловое ускорение ε , которое подставляют в кинематические уравнения вращательного движения:
для угла поворота

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}; \quad (2.5)$$

для угловой скорости

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \cdot t, \quad (2.6)$$

где ω_0 - начальная угловая скорость; t - время вращения.

3) Величины, описывающие поступательное и вращательное движения и связь между ними

- Сила: $\vec{F}$ - мера интенсивности взаимодействия тел.
- Момент силы относительно точки O :

$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot d_O$ - вращательная способность силы, равная произведению модуля этой силы F на плечо силы d_O ;

- Плечо силы относительно точки O : d_O - это кратчайшее расстояние от линии действия силы до точки O (рис. 2.3).

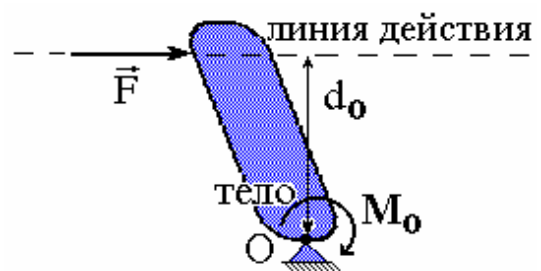


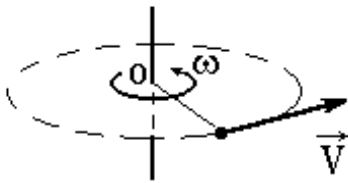
Рисунок 2.3 - К определению момента силы

- Масса: m - мера инертности тела.
- Момент инерции: I - мера инертности тела при его вращении вокруг фиксированной оси. Для точечного тела массой m вращающегося вокруг оси на расстоянии r от нее, $I_T = m \cdot r^2$ (видно, что размерность момента инерции $\text{кг} \cdot \text{м}^2$). Для твердых тел произвольной формы его вычисляют как сумму таких же произведений: $I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$. Для некоторых симметричных тел моменты инерции рассчиты-

таны, например, у диска массой m и радиусом R момент инерции относительно оси диска $I_D = \frac{m \cdot R^2}{2}$. Для тел сложной формы моменты инерции находят из эксперимента, что и необходимо сделать в настоящей работе.

Теорема Штейнера: Если момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела равен I_C , то момент инерции относительно любой оси, находящейся на расстоянии r от нее, $I = I_C + m \cdot r^2$.

- Перемещение: $\vec{S}$ - вектор, соединяющий начальное и конечное положения тела.
- Угол поворота: φ - угловое перемещение тела при вращении.
- Скорость вдоль оси: $v = S'$ - производная по времени от перемещения вдоль соответствующей оси.
- Угловая скорость: $\omega = \varphi'$ - производная от углового перемещения по времени.



По угловой скорости можно определить линейную скорость движения точки (находящейся на расстоянии r от оси вращения) (рис. 2.4):

$$v = \omega \cdot r. \quad (2.7)$$

- Ускорение вдоль оси: $a = v'$ - производная по времени от скорости вдоль соответствующей оси.

- Угловое ускорение: $\varepsilon = \omega'$ - производная от угловой скорости по времени.

По угловому ускорению и угловой скорости можно определить линейные ускорения (рис. 2.5):

центростремительное

$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{r}, \quad (2.8)$$

касательное

$$a_{\text{к}} = \varepsilon \cdot r, \quad (2.9)$$

где v - линейная скорость движения по траектории; r - радиус траектории.

- Кинетическая энергия тела массой m , движущегося поступательно со скоростью v ,

$$E_{\text{кин}} = \frac{m \cdot v^2}{2}. \quad (2.10)$$

- Кинетическая энергия тела с моментом инерции I , вращающегося с угловой скоростью ω ,

$$E_{\text{кин}} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \quad (2.11)$$

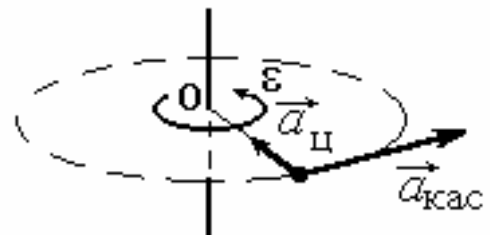


Рисунок 2.5 - К определению углового ускорения.

4) Описание установки и методика измерений

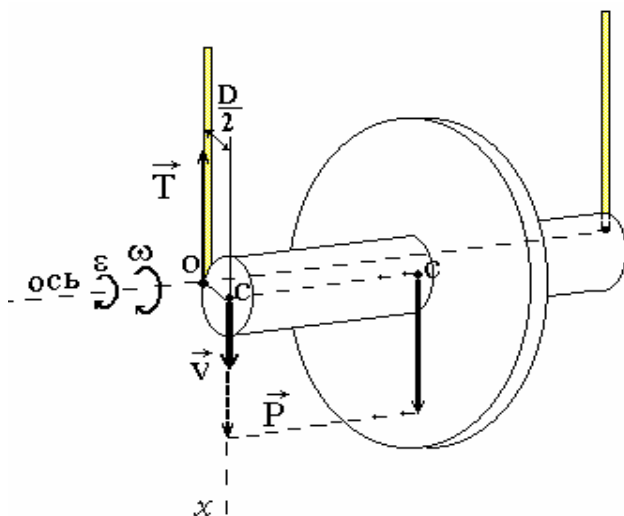


Рисунок 2.6 - Схема маятника Максвелла

Маятник Максвелла представляет собой маховик, насаженный на тонкий вал (см. рис. 2.6).

Маятник подвешивается при помощи двух нитей, которые входят в отверстия, имеющиеся вблизи концов вала. Если нити одновременно наматывать на вал, то маятник будет подниматься.

Поднятый на высоту H маятник можно отпустить - и он начнет падать. При этом потенциальная энергия поднятого маятника по мере его падения переходит в кинетическую. При достижении наинизшей точки (когда нити полностью размотаны) кинетическая

энергия вращения маятника (а значит и скорость вращения) будет максимальной - и маятник по инерции будет продолжать вращение, наматывая нити на вал и снова поднимаясь. При этом кинетическая энергия будет переходить в потенциальную, пока он не достигнет наивысшей точки подъема и т. д. В данной задаче потерями энергии пренебрегают и считают, что каждый раз кинетическая энергия равна потенциальной (закон сохранения энергии).

Движение маятника представляется как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O касания нити и вала. При этом центр масс его движется поступательно со скоростью $\vec{v}$.

Вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O касания нити и вала, происходит под действием момента силы тяжести $\vec{P}$ относительно этой оси $M_O(P)$. Тогда уравнение вращательного движения (см. (2.4)) будет иметь вид:

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = P \cdot \frac{D}{2} = \varepsilon \cdot I_O, \quad (2.12)$$

где $D/2$ - плечо силы $\vec{P}$ относительно оси O ; I_O - момент инерции маятника относительно оси O ; ε - угловое ускорение.

Поступательное движение центра масс осуществляется вдоль оси x под действием силы тяжести $\vec{P}$ и силы натяжения $\vec{T}$ нити, тогда уравнение поступательного движения (см. (2.1)) будет иметь вид:

$$\sum (F_i)_x = P - T = m \cdot a. \quad (2.13)$$

Для нахождения угловой скорости и углового ускорения запишем *кинематические уравнения* (см. выше) в момент времени t :

- поступательного движения с нулевой начальной скоростью для перемещения вдоль оси x (см. (2.2)):

$$H = \frac{a \cdot t^2}{2}, \quad (2.14)$$

для скорости вдоль оси x (см. (2.3)):

$$v = a \cdot t; \quad (2.15)$$

- вращательного движения с нулевой начальной угловой скоростью для полного углового перемещения вокруг оси O за время t (2.5)

$$\varphi = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad (2.16)$$

для угловой скорости (2.6):

$$\omega = \varepsilon \cdot t. \quad (2.17)$$

Из уравнения (2.14) выражаем ускорение центра масс C :

$$a = \frac{2 \cdot H}{t^2}, \quad (2.18)$$

а из (2.17) - угловую скорость вращения

$$\omega = \varepsilon \cdot t. \quad (2.19)$$

Касательное ускорение центра масс связано с угловой скоростью соотношением (2.9):

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (2.20)$$

(где $r = D/2$ - расстояние от оси вращения до центра масс), откуда (с учетом выражения (2.18)) получаем

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{4 \cdot H}{D \cdot t^2}, \quad (2.21)$$

а значит,

$$\omega = \varepsilon \cdot t = \frac{4 \cdot H}{D \cdot t}. \quad (2.22)$$

Из уравнения вращательного движения (2.12) выражаем момент инерции маятника относительно оси вращения O (с учетом $P = mg$):

$$I_0 = \frac{P \cdot D}{2 \cdot \varepsilon} = \frac{mg \cdot D^2 \cdot t^2}{8 \cdot H}. \quad (2.23)$$

Порядок выполнения работы:

1 Подготовить к выполнению работы протокол (см. Приложение): записать тему работы, цель, оформить домашнее задание, составить таблицу измерительных приборов (микрометр, линейка, секундомер), зарисовать схему установки, записать рабочие формулы и т. д.

2 Измерить пять раз микрометром диаметр вала в области намотки нитей (результат занести в таблицу измерений).

3 Приложив линейку к раме установки, зафиксировать деление линейки, против которого находится центр вала в нижнем положении. Затем намотать нити на вал и зафиксировать деление линейки, против которого находится центр вала в верхнем положении (для единообразия вычислений следует каждый раз брать одинаковое расстояние H между нижним и верхним положениями вала маховика. Абсолютную погрешность измерения принять равной цене деления линейки).

4 Отпустить находящийся в верхнем положении маховик и одновременно включить секундомер. Когда вал достигнет нижнего положения, - остановить секундомер и зафиксировать время движения вала t . Опыт проделать пять раз для одной и той же высоты H . Полученные данные внести в таблицу измерений протокола.

5 Статистически обработать результаты прямых измерений (см. раздел 1.2 настоящих указаний):

- Рассчитать средние арифметические значения (1.1) величин $\tilde{D}$ и $\tilde{t}$.
- Вычислить отклонения от среднего каждого измерения (1.3).
- Возвести их в квадрат и просуммировать для каждой величины в отдельности, получив $\sum_{i=1}^5 (\Delta D_i)^2$ и $\sum_{i=1}^5 (\Delta t_i)^2$.
- По заданной преподавателем надежности α и числу измерений $n = 5$ определить по таблице 1.1 коэффициент Стьюдента $t_{\alpha, n}$.
- По формуле Стьюдента (1.4) рассчитать абсолютную погрешность величин ΔD и Δt .
- Рассчитать относительные погрешности (1.5) δ_D и δ_t .

• Записать окончательный результат в виде численных значений величин, выполнив округления величин (раздел 1.5): $D = (\tilde{D} \pm \Delta D)_{\alpha, n}$.

6 Рассчитать среднее значение углового ускорения ε , угловой скорости ω и момента инерции I по рабочим формулам (2.21)-(2.23) (произвести косвенные измерения).

7 Вычислить *относительные и абсолютные погрешности косвенных измерений* (см. раздел 1.3):

• Вывести формулы расчета относительных погрешностей углового ускорения ε , угловой скорости ω и момента инерции I .

• Рассчитать относительные погрешности измеряемых косвенно величин ε , ω , и I по известным погрешностям непосредственно измеряемых величин D , H и t .

• Рассчитать абсолютные погрешности косвенно измеряемых величин.

8 Записать окончательный результат в виде численных значений величин, выполнив округления величин (см. раздел 1.5):

$$\varepsilon = (\tilde{\varepsilon} \pm \Delta \varepsilon)_{\alpha}; \quad \delta_{\varepsilon} \% = \Delta \varepsilon / \tilde{\varepsilon} \cdot 100\%;$$

$$\omega = (\tilde{\omega} \pm \Delta \omega)_{\alpha}; \quad \delta_{\omega} \% = \Delta \omega / \tilde{\omega} \cdot 100\%;$$

$$I = (\tilde{I} \pm \Delta I)_{\alpha}; \quad \delta_I \% = \Delta I / \tilde{I} \cdot 100\%.$$

9 Окончательно оформить протокол выполнения работы: записать вывод, подписать протокол (см. Приложение) и дать на подпись преподавателю.

Контрольные вопросы

1 Что называется угловой скоростью? Угловым ускорением? Моментом силы? В каких единицах они измеряются?

2 Как связаны линейные скорости и ускорения точек вращающегося тела с угловыми?

3 Что такое момент инерции материальной точки? Тела? От чего он зависит? В каких единицах он измеряется?

4 Составить уравнения движения маятника Максвелла и кинематические уравнения вращения и поступательного движения центра масс.

5 Вывести рабочие формулы расчета углового ускорения, угловой скорости и момента инерции в данной работе.

6 Вывести формулы расчета относительных и абсолютных погрешностей углового ускорения, угловой скорости и момента инерции в данной работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Образец оформления протокола выполнения лабораторной работы

1) Лабораторная работа № 1-1. **Тема:** Определение объема тел правильной геометрической формы.

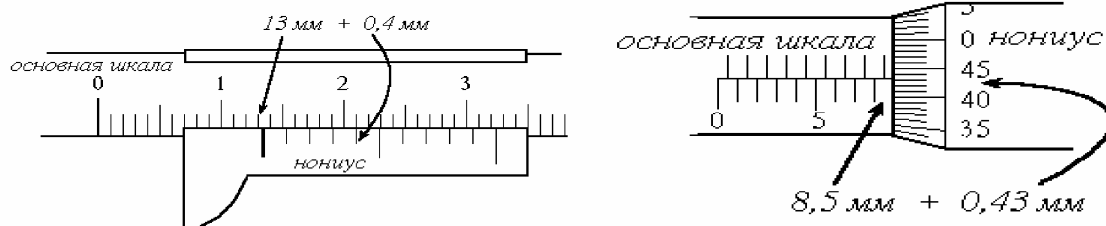
2) **Цель работы:** - Научиться пользоваться штангенциркулем и микрометром.

- Изучить методы расчета погрешностей прямых и косвенных измерений.

Оформленное домашнее задание.

3) **Схема прибора или установки**

Схема отсчета с помощью штангенциркуля и микрометра:



4) Приборы

№ п/п	Наименование	Тип	Заводской номер	Предел шкалы	Цена деления	Абсолютная погрешность [класс точности]
1	Штангенциркуль	Учебный	T11185	135 мм	0,1 мм	0,1 мм
2	Микрометр	Технич.	03348	50 мм	0,01 мм	0,01 мм

Принадлежности: цилиндрические тела различных размеров.

5) Рабочие формулы

Косвенное измерение объема цилиндра по известным высоте и диаметру будем проводить по формуле

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h,$$

где $\pi = 3,14$; d - диаметр цилиндра; h - высота цилиндра.

6) Измерения:

- Таблица результатов **прямых измерений**

№	d_i , мм	Δd_i , мм	$(\Delta d_i)^2$, мм ²	h_i , мм	Δh_i , мм	$(\Delta h_i)^2$, мм ²
1	9,31	0,01	10^{-4}	25,4	0	0
2	9,29	-0,01	10^{-4}	25,3	-0,1	10^{-2}
3	9,32	0,02	$4 \cdot 10^{-4}$	25,5	0,1	10^{-2}
4	9,30	0	0	25,4	0	0
5	9,28	-0,02	$4 \cdot 10^{-4}$	25,3	-0,1	10^{-2}
$\tilde{d} = 9,30$		$\sum_{i=1}^5 (\Delta d_i)^2 =$	$10 \cdot 10^{-4}$	$\tilde{h} = 25,4$	$\sum_{i=1}^5 (\Delta h_i)^2 =$	$3 \cdot 10^{-2}$

В таблице средние арифметические значения вычислялись так:

$$\tilde{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=5} d_i; \quad \tilde{d} = \frac{1}{5} \cdot (9,31 + 9,29 + 9,32 + 9,30 + 9,28) = 9,30 \text{ мм};$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=5} h_i; \quad \tilde{h} = \frac{1}{5} \cdot (25,4 + 25,3 + 25,5 + 25,4 + 25,3) = 25,4 \text{ мм}.$$

7) Статистическая обработка результатов

7а) Прямые измерения

Численные значения отклонений от среднего, занесенные в таблицу, вычислялись по формулам:

$$\Delta d_i = \tilde{d} - d_i; \quad \Delta h_i = \tilde{h} - h_i.$$

Затем они возводились в квадрат и суммировались (последний столбец таблицы):

$$\sum_{i=1}^5 (\Delta d_i)^2 = 10^{-3} \text{ мм}^2; \quad \sum_{i=1}^5 (\Delta h_i)^2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ мм}^2,$$

так что в формулу Стьюдента при вычислении абсолютных погрешностей подставлялись сразу значения этих сумм:

$$\Delta d = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2}{n \cdot (n-1)}}; \quad \Delta d = 2,77 \cdot \sqrt{\frac{10^{-3}}{5 \cdot (4)}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ мм};$$

$$\Delta h = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta h_i)^2}{n \cdot (n-1)}}; \quad \Delta h = 2,77 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot (4)}} = 4 \cdot 10^{-1} \text{ мм},$$

где при расчетах учтено, что при надежности $\alpha = 0,95$ и количестве измерений $n = 5$ коэффициент Стьюдента $t_{0,95,5} = 2,77$ (см. таблица 1.1).

Относительные погрешности:

$$\delta_d = \frac{\Delta d}{\tilde{d}} \cdot 100\%; \quad \delta_d = \frac{0,02}{9,30} \cdot 100\% = 0,2 \%;$$

$$\delta_h = \frac{\Delta h}{\tilde{h}} \cdot 100\%; \quad \delta_h = \frac{0,4}{25,4} \cdot 100\% = 1,6 \%.$$

Окончательный результат прямых измерений:

$$d = (9,30 \pm 0,02)_{0,95} \text{ мм}; \quad \delta_d = 0,2 \%;$$

$$h = (25,4 \pm 0,4)_{0,95} \text{ мм}; \quad \delta_h = 1,6 \%.$$

7а) Косвенные измерения

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h; \quad V = \frac{3,14 \cdot (9,3)^2}{4} \cdot 25,4 = 1724 \text{ мм}^3.$$

По рабочей формуле получаем соотношение для вычисления относительной погрешности объема

$$\delta_v = \frac{\Delta V}{\tilde{V}} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta d}{\tilde{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\tilde{h}}\right)^2} = \sqrt{(2\delta_{\%})^2 + (\delta_p)^2};$$

$$\delta_v = \sqrt{(2 \cdot 0,002)^2 + (0,016)^2} = 1,65 \cdot 10^{-2}.$$

Абсолютная погрешность измерения объема

$$\Delta V = \delta_V \cdot \tilde{V} ; \Delta V = 1,65 \cdot 10^{-2} \cdot 1\,724 = 28,4 \text{ мм}^3.$$

8) **Результат**

Объем цилиндра $V = (1\,724 \pm 29)_{0.95} \text{ мм}^3$; $\delta_V \% = 1,7 \%$.

9) **Вывод:** Основную погрешность в косвенное измерение объема вносит величина, измеренная штангенциркулем, т. е. менее точным прибором.

Работу выполнил: /подпись/

Работу принял: _____

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Кальнев Н.А. Методические указания по курсу физики "Механика". Одесса: ОЭИС, 1991.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высшая школа, 1990.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: Высшая школа, 1989.
- 4 Кортнев А.В. Практикум по физике. М.: Высшая школа, 1965.

ЗМІСТ:

1 ТЕОРІЯ ПОХИБОК

1.1 Фізичні величини і їхні вимірювання.....	3
1.2 Статистична обробка результатів прямих вимірювань.....	4
1.3 Абсолютні й відносні похибки непрямих вимірювань.....	5
1.4 Похибки, внесені вимірювальними приладами.....	6
1.5 Правила округлення.....	7
1.6 Округлення у випадку математичних операцій над числами.....	9
1.7 Графічне подання результатів вимірювань.....	9

2 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

2.1 Робота № 1-1. Визначення об'єму тіл правильної геометричної форми..	11
2.2 Робота № 1-2. Визначення основних параметрів обертального руху твердого тіла.....	14

ДОДАТОК	20
ЧАСТИНА 2.....	23
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	44

Навчально-методичне видання
Метрологічна обробка результатів технічних вимірювань
Методичний посібник до лабораторних робіт з фізики № 1-1, 1-2

Укладачі: доцент Коробіцин Б.В., доцент Горбачов В.Е.
Комп'ютерне редагування - Трушкін А.В.
Відп. редактор І.М.Вікулін
Редактор І.В.Ращупкіна