

**Державна служба спеціального зв'язку та захисту інформації України**  
**Адміністрація державної служби спеціального зв'язку та захисту**  
**інформації України**

**ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ім. О.С. ПОПОВА**

**Кафедра теорії електричного зв'язку ім. А.Г. Зюко**

**П.В. Іващенко**

## **ТЕОРІЯ ЗВ'ЯЗКУ**

**Модуль 3. *Теорія завадостійкості приймання сигналів електрозв'язку***

**Навчальний посібник**

**для студентів, що навчаються**

**за напрямом вищої освіти 6.050903 – Телекомунікації**

Одеса – 2012

**Іващенко П.В.** Теорія завадостійкості приймання сигналів електро-зв'язку: навч. посіб. з вивчення модуля 3 дисципліни Теорія зв'язку / П.В. Іващенко. – Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2012. – 84 с.

Навчальний посібник містить матеріали до вивчення модуля 3 дисципліни «Теорія зв'язку». Матеріали подано як конспект лекцій. Викладено теорію завадостійкості цифрових та аналогових систем передавання. Синтезовано схеми оптимальних демодуляторів одномірних та двовимірних сигналів, визначено їх завадостійкість Розглянуто причини відмінності завадостійкості оптимальних та реальних демодуляторів. Розглянуто приймання сигналів в каналах з завадами та в каналах з МСІ.

Навчальний посібник призначений для студентів, які навчаються за напрямом 6.050903 – Телекомунікації.

***Затверджено***

методичною радою  
академії зв'язку.  
Протокол № 16  
від 23.03.2012 р.

***Схвалено***

на засіданні кафедри теорії  
електричного зв'язку ім. А.Г. Зюко  
і ***рекомендовано до друку.***  
Протокол № 6 від 02.02. 2011 р.

## ЗМІСТ

|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Вступ.....                                                                                                  | 4  |
| 1. Загальна характеристика задач приймання сигналів.....                                                    | 5  |
| 2. Критерій оптимальності демодуляторів сигналів цифрової модуляції та правила рішення .....                | 7  |
| 3. Алгоритм оптимальної демодуляції сигналів цифрової модуляції (загальний випадок).....                    | 11 |
| 4. Узгоджений фільтр.....                                                                                   | 13 |
| 5. Застосування узгоджених фільтрів у демодуляторах сигналів АІМ-М .....                                    | 19 |
| 6. Корелятор .....                                                                                          | 22 |
| 7. Узгоджений фільтр при небілому шумі .....                                                                | 24 |
| 8. Узгоджена фільтрація радіоімпульсів.....                                                                 | 25 |
| 9. Оптимальні демодулятори одномірних смугових сигналів.....                                                | 27 |
| 10. Оптимальні демодулятори двовимірних смугових сигналів.....                                              | 28 |
| 11. Імовірність помилки при оптимальній демодуляції одномірних сигналів цифрової модуляції .....            | 31 |
| 12. Імовірність помилки при оптимальній демодуляції двовимірних сигналів цифрової модуляції .....           | 34 |
| 13. Системи відновлення несінного коливання.....                                                            | 37 |
| 14. Фазорізницева модуляція .....                                                                           | 41 |
| 15. Некогерентна демодуляція сигналів цифрової модуляції.....                                               | 45 |
| 16. Системи тактової синхронізації.....                                                                     | 48 |
| 17. Демодуляція в умовах міжсимвольної інтерференції .....                                                  | 50 |
| 18. Неоптимальні демодулятори.....                                                                          | 55 |
| 19. Демодуляція в каналах зі змінними параметрами .....                                                     | 57 |
| 20. Приймання цифрових сигналів у каналах із зосередженими по спектру й імпульсними завадами .....          | 63 |
| 21. Кількісна міра завадостійкості аналогових систем передавання. Критерій оптимальності демодулятора ..... | 67 |
| 22. Оптимальна лінійна фільтрація неперервних сигналів.....                                                 | 69 |
| 23. Порівняння завадостійкості оптимальних демодуляторів сигналів аналогових видів модуляції.....           | 73 |
| Рекомендації щодо самостійної роботи .....                                                                  | 81 |
| Перелік знань і умінь, які повинен набути студент під час вивчення модуля 3.                                | 83 |
| Література .....                                                                                            | 83 |

## ВСТУП

У навчальному посібнику викладені основи теорії завадостійкості систем передавання. Для перевірки засвоєння знань рекомендується використовувати переліки контрольних питань, розміщені наприкінці кожного підрозділу.

Вивчення матеріалу модуля 3 базується на знаннях, отриманих під час вивчення модуля 1 «Сигнали електрозв'язку» та модуля 2 «Основи теорії інформації та її використання в телекомунікаційних системах». З основ теорії інформації випливає, що основними ресурсами системи передавання є смуга пропускання каналу зв'язку та потужність сигналу на виході каналу. Ефективне використання ресурсів системи передавання забезпечується застосуванням «Теорії завадостійкості приймання сигналів електрозв'язку» (модуль 3) та «Основ теорії завадостійкого кодування в телекомунікаційних системах» (модуль 4).

Перелік знань і вмінь, необхідних для вивчення навчального матеріалу модуля 3, які повинен набути студент у процесі вивчення попередніх дисциплін, подано в табл. В.1.

Таблиця В.1 – Перелік вхідних знань і умінь

| Найменування       | Зміст                                                                                                                             | Попередня дисципліна                 |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| <b>З н а н н я</b> |                                                                                                                                   |                                      |
| <b>Вх.Зн. 1</b>    | Матриці, вектори, дії над ними (лінійна алгебра)                                                                                  | Вища математика                      |
| <b>Вх.Зн. 2</b>    | Методи обчислення похідної та інтегрування функцій                                                                                | Вища математика                      |
| <b>Вх.Зн. 3</b>    | Основні характеристики випадкових подій та величин (теорія ймовірностей)                                                          | Вища математика                      |
| <b>Вх.Зн. 4</b>    | Математичний опис випадкових сигналів: імовірнісні і числові характеристики, кореляційна функція, спектральна густина потужності  | Модуль 1 дисципліни «Теорія зв'язку» |
| <b>Вх.Зн. 5</b>    | Математичний опис та параметри сигналів цифрових видів модуляції (АІМ-М, АМ-М, ЧМ-М, ФМ-М, АФМ-М, КАМ-М)                          | Модуль 1 дисципліни «Теорія зв'язку» |
| <b>Вх.Зн. 6</b>    | Математичний опис та параметри сигналів аналогових видів модуляції (АМ, БМ, ОМ, ЧМ і ФМ)                                          | Модуль 1 дисципліни «Теорія зв'язку» |
| <b>У м і н н я</b> |                                                                                                                                   |                                      |
| <b>Вх.Ум. 1</b>    | Виконувати математичні операції над векторами                                                                                     | Вища математика                      |
| <b>Вх.Ум. 2</b>    | Виконувати диференціювання та інтегрування функцій за допомогою математичних довідників та комп'ютерних програм                   | Вища математика                      |
| <b>Вх.Ум. 3</b>    | Виконувати розрахунки спектрів періодичних та імпульсних сигналів                                                                 | Модуль 1 дисципліни «Теорія зв'язку» |
| <b>Вх.Ум. 4</b>    | Розраховувати та вимірювати параметри сигналів цифрових видів модуляції, зокрема, спектр та його ширину, числові характеристики   | Модуль 1 дисципліни «Теорія зв'язку» |
| <b>Вх.Ум. 5</b>    | Розраховувати та вимірювати параметри сигналів аналогових видів модуляції, зокрема, спектр та його ширину, числові характеристики | Модуль 1 дисципліни «Теорія зв'язку» |

## 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ ПРИЙМАННЯ СИГНАЛІВ

Розглядається система передавання (рис. 1.1). На вхід системи передавання надходить первинний сигнал  $b(t)$ . Модулятор перетворює первинний сигнал  $b(t)$  у модульований сигнал  $s(t)$  для передавання на відстань по лінії передавання. Вважається, що лінія передавання не спотворює сигнал  $s(t)$ . На вхід демодулятора надходить сума сигналу  $s(t)$  і завади  $n(t)$ :  $z(t) = s(t) + n(t)$ . Вважають, якщо спеціально не застережено, що завада  $n(t)$  – це АБГШ (точніше, шум білий у смузі пропускання лінії передавання). По сигналу  $z(t)$  демодулятор повинен відновити первинний сигнал  $\hat{b}(t)$ , що найменш відрізняється від підлягаючого передаванню сигналу  $b(t)$ . Під час демодуляції необхідно врахувати всі характеристики сигналу  $s(t)$  і завади  $n(t)$ .

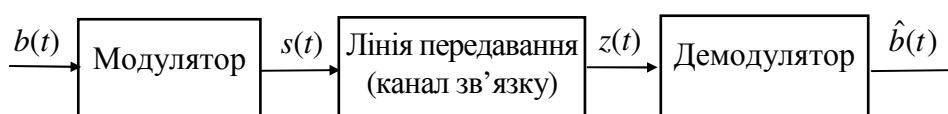


Рисунок 1.1 – Система передавання

Залежно від характеру первинного сигналу (цифровий чи аналоговий) системи передавання діляться на цифрові й аналогові. У цих системах по-різному виконуються модуляція й демодуляція, по-різному кількісно оцінюється точність відновлення первинного сигналу. Властивості й формування сигналів аналогових і цифрових видів модуляції розглянуті в модулі 1. У цьому модулі розглядаються задачі, що виникають при демодуляції сигналів:

- алгоритми (схеми) демодуляції сигналів;
- *завадостійкість систем передавання* – здатність системи передавання протистояти дії завад.

У **цифрових системах передавання** сигнал  $s(t)$  – це послідовність канальних символів, які відображають первинний цифровий сигнал і надходять на вхід каналу зв'язку через тактовий інтервал  $T$ :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_i^{(k)}(t - kT), \quad (1.1)$$

де  $s_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$  – канальні символи;

$M = 2^n$  – кількість канальних символів;

$n$  – кількість біт, що передаються одним канальним символом;

$s_i^{(k)}(t - kT)$  –  $i$ -й канальний символ, що передається на  $k$ -му тактовому інтервалі.

Під час демодуляції невідомими є номери  $i$  канальних символів. Відомими є канальні символи (форма імпульсів, їхня частота (частоти), їхні фази, тактовий інтервал, моменти відліку тактових інтервалів). Кожний канальний символ  $s_i(t)$ , якщо це зручно, позначається як  $s_i$ .

Демодулятор повинен *розрізняти канальні символи* – виносити рішення про номери переданих канальних символів і видати рішення бітами відповідно до модуляційного коду.

Будемо вважати, що демодулятор виносить рішення  $\hat{s}_j$  про переданий каналний символ на кожному тактовому інтервалі незалежно від рішень на інших тактових інтервалах. Такий спосіб демодуляції називається поелементним прийманням. При поелементному прийманні роботу демодулятора розглядають на окремих тактових інтервалах, наприклад, при  $k = 0$  сигнал, що демодулюється, має вигляд

$$z(t) = s_i^{(0)}(t) + n(t). \quad (1.2)$$

Тут номер каналного символу невідомий, і демодулятор повинен *винести рішення* про номер  $i$ . Оскільки, на вхід демодулятора надходить спотворений завадою сигнал, то рішення про передані каналні символи будуть містити помилки. Помилка каналного символу – це рішення демодулятора  $\hat{s}_j$  після надходження на вхід демодулятора символу  $s_i$  при  $j \neq i$ . Помилки з'являються випадково через випадковий характер завади. Невірне рішення демодулятора про каналний символ приводить до появи на виході демодулятора одного або більше невірних біт (залежно від модуляційного коду). Імовірність помилки біта  $p$  є кількісною мірою *завадостійкості* цифрової системи передавання. Імовірність помилки біта  $p$  поряд зі швидкістю сигналу  $R$  є основною характеристикою цифрової системи передавання.

В *аналогових системах передавання* сигнал описується інформаційним і неінформаційними параметрами. Інформаційний параметр сигналу, що відображає підлягаючий передаванню сигнал  $b(t)$ , є реалізацією якогось випадкового процесу й описується статистичними характеристиками цього процесу. Неінформаційні параметри сигналу вважаються відомими, тому що вони, як правило, не змінюються з часом або змінюються досить повільно й можуть бути виміряні демодулятором.

Відновлення первинного сигналу в аналогових системах передавання в теорії зв'язку розглядають як задачу *відновлення повідомлення*. При розробці алгоритмів (схем) демодуляторів потрібно опиратися на якийсь критерій точності відновлення первинного сигналу, який чисельно характеризує відхилення відновленого сигналу від сигналу, що передається, наприклад, *середній квадрат похибки* (під похибкою розуміють різницю між відновленим сигналом  $\hat{b}(t)$  і переданим  $b(t)$ ). Середній квадрат похибки є кількісною мірою *завадостійкості* аналогової системи передавання.

Під час обговорення демодуляції крім задач розрізнення сигналів і відновлення повідомлення часто розглядають третю задачу – *виявлення сигналу*. Суть цієї задачі полягає в наступному: демодулятор повинен винести рішення – чи є на його вході якийсь сигнал відомої форми або ж на вхід надходить тільки завада. Цю задачу будемо розглядати як окремий випадок задачі розрізнення сигналів, коли система передавання двійкова й один із сигналів тотожно дорівнює нулю.

### **Контрольні питання**

1. Що є кількісною мірою завадостійкості цифрових систем передавання?
2. Що таке поелементне приймання цифрових сигналів?
3. Що є кількісною мірою завадостійкості аналогових систем передавання?

## 2. КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ ДЕМОДУЛЯТОРІВ СИГНАЛІВ ЦИФРОВОЇ МОДУЛЯЦІЇ ТА ПРАВИЛА РІШЕННЯ

Можна запропонувати величезну кількість алгоритмів демодуляції сигналу (1.2). Кожен з алгоритмів демодуляції повинен ураховувати повністю або частково вихідні дані: опис каналних символів  $s_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ ; апіорні ймовірності каналних символів  $P(s_i)$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ ; статистичні характеристики завади  $n(t)$ , зокрема, густину ймовірності  $p(n)$ .

Наше завдання – *знайти алгоритми оптимальної демодуляції*, вважаючи, що *критерієм оптимальності є мінімум повної ймовірності помилки рішення демодулятора відносно каналного символу*. Для мінімізації ймовірності помилки біта на виході демодулятора за умови мінімуму ймовірності помилки рішення відносно каналного символу оптимізують модуляційний код.

Очевидно, що мінімум повної ймовірності помилки рішення демодулятора відносно каналного символу буде при винесенні рішення за максимумом апостеріорної ймовірності каналного символу  $P(s_i/z)$ . Правило *максимуму апостеріорної ймовірності* формулюється так: демодулятор виносить рішення про передавання символу  $\hat{s}_i$ , якщо виконується система з  $M - 1$  нерівностей:

$$P(s_i/z) > P(s_j/z), \quad j = 0, 1, \dots, M - 1; j \neq i. \quad (2.1)$$

Далі скористаємося формулою Байєса

$$P(s_i/z) = \frac{P(s_i)p(z/s_i)}{p(z)}, \quad (2.2)$$

де  $p(z)$  – безумовна густина ймовірності сигналу  $z(t)$ ;

$p(z/s_i)$  – умовна густина ймовірності сигналу  $z(t)$  за умови, що  $z(t) = s_i(t) + n(t)$ .

Тут припускається, що апіорні ймовірності каналних символів  $P(s_i)$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$  і густина ймовірності завади  $p(n)$  дозволяють розрахувати умовні густини ймовірності  $p(z/s_i)$ . Звичайно, у системах передавання каналні символи рівноймовірні, тобто

$$P(s_i) = 1/M, \quad i = 0, \dots, M - 1. \quad (2.3)$$

З урахуванням цього перепишемо систему нерівностей (2.1), виключивши із запису безумовну густину ймовірності  $p(z)$ , що входить у праву й ліву частини й не залежить від індексу:

$$p(z/s_i) > p(z/s_j), \quad j = 0, 1, \dots, M - 1; j \neq i. \quad (2.4)$$

Система нерівностей (2.4) виражає *правило максимуму правдоподібності*, що формулюється так: демодулятор виносить рішення про передавання символу  $\hat{s}_i$ , якщо максимальна умовна густина ймовірності сигналу  $z(t)$  за умови, що  $z(t) = s_i(t) + n(t)$ . Умовні густини ймовірності називають також *функціями правдоподібності*.

Відзначимо, що правило максимуму правдоподібності застосовують для побудови демодуляторів, якщо каналні символи рівноймовірні (у цьому випадку реалізується правило максимуму апостеріорної ймовірності) або апіорні ймовірності каналних символів невідомі.

Для переходу від правила рішення (2.4) до алгоритму демодуляції варто скористатися поданням сигналів і завад у багатомірному просторі. Повним описом множини каналних символів  $s_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$  є їхнє подання в  $N$ -мірному просторі (див. модуль 1). Там розглянуті сигнали одномірні ( $N = 1$ ) і двовимірні ( $N = 2$ ), які найчастіше використовуються. Для наочності опису використовувалися сигнальні сузір'я.

Реалізація суми сигналу й завади  $z(t)$ , що подається на вхід демодулятора, – співвідношення (1.2) – також може бути представлена в багатомірному просторі, утвореному базисними ортонормованими функціями  $\{\psi_k(t)\}$ , які використовуються для опису та формування каналних символів  $s_i(t)$ :

$$s_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{ik} \psi_k(t), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (2.5)$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \psi_k(t), \quad (2.6)$$

$$z_k = \int_0^{T_s} z(t) \psi_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.7)$$

де  $z_k$  – коефіцієнти розкладання сигналу, що демодулюється;

$T_s$  – тривалість каналних символів;

$(0, T_s)$  – інтервал ортогональності.

Коефіцієнти  $z_k$  є випадковими гауссовими некорельованими величинами. Тому умовні густини ймовірності  $p(z/s_i)$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$  є  $N$ -мірними розподілами, що визначаються добутками  $N$  одномірних розподілів. Права й ліва частини нерівностей (2.4) перепишуться

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - a_{ik})^2\right) > \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - a_{jk})^2\right), \quad (2.8)$$

$$j = 0, 1, \dots, M - 1; j \neq i,$$

де  $\sigma$  – середньоквадратичне відхилення (СКВ) коефіцієнтів  $z_k$ .

Перевірці нерівностей (2.8) еквівалентна перевірка нерівностей

$$\sum_{k=0}^{N-1} (z_k - a_{ik})^2 < \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - a_{jk})^2, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1; j \neq i. \quad (2.9)$$

Суми в співвідношенні (2.9) є не що інше, як квадрати віддалей між сигналом, що демодулюється, і каналними символами в  $N$ -мірному просторі. Останнє співвідношення виражає правило максимуму правдоподібності для оптимальної демодуляції: рішення про номер каналного символу виноситься на

користь того сигналу, віддаль між яким і сигналом, що демодулюється, мінімальна. Зазначимо, що немає необхідності добування кореня квадратного з лівої й правої частин нерівності (2.9), можна порівнювати й квадрати віддалей.

*Правило роботи демодулятора* можна трактувати так:

- простір сигналів розбивається на  $M$  областей, що не перетинаються, з іменами  $s_i$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ ; кожна область  $s_i$  – це сукупність точок, які ближчі до символу  $s_i(t)$ , ніж до інших символів;
- демодулятор виносить рішення про передавання символу  $s_i(t)$ , якщо точка  $z(t)$  в  $N$ -мірному просторі попадає в область  $s_i$ .

*Примітки.* 1. Критерій мінімуму повної ймовірності помилки рішення демодулятора в російськомовній літературі називається також *критерієм ідеального спостерігача* (термін уведений В.О. Котельниковим).

2. Якщо помилки рішень демодулятора по-різному небажані для різних канальних символів, то використовується *критерій мінімуму середнього ризику* (критерій мінімуму повної ймовірності помилки рішення демодулятора припускає, що всі помилки однаково небажані).

3. Якщо демодулятор вирішує завдання виявлення сигналу відомої форми (типова задача в радіолокації), то використовується *критерій Неймана-Пірсона*.

**Приклад 2.1.** Знайдемо правило рішення оптимальної демодуляції одномірного ( $N = 1$ ) сигналу АІМ-2, у якого канальні символи описуються

$$s_i(t) = a_i A(t), \quad i = 0, 1, \quad (2.10)$$

де  $A(t)$  – імпульс із певними часовими й спектральними характеристиками, максимальне значення якого й енергія рівні 1;

$a_i$  – коефіцієнти, що відображають переданий біт:  $a_1 = a$ ,  $a_0 = -a$ ; число  $a$  визначає енергії канальних символів.

Функція  $A(t)$  відіграє роль базисної функції  $\psi_0(t)$  при поданні сигналу  $s_i(t)$  в одновірному просторі.

На вхід демодулятора на конкретному тактовому інтервалі (наприклад,  $k = 0$ ) надходить

$$z(t) = a_i A(t) + n(t). \quad (2.11)$$

Знайдемо коефіцієнт подання сигналу  $z(t)$  у базисі  $A(t)$

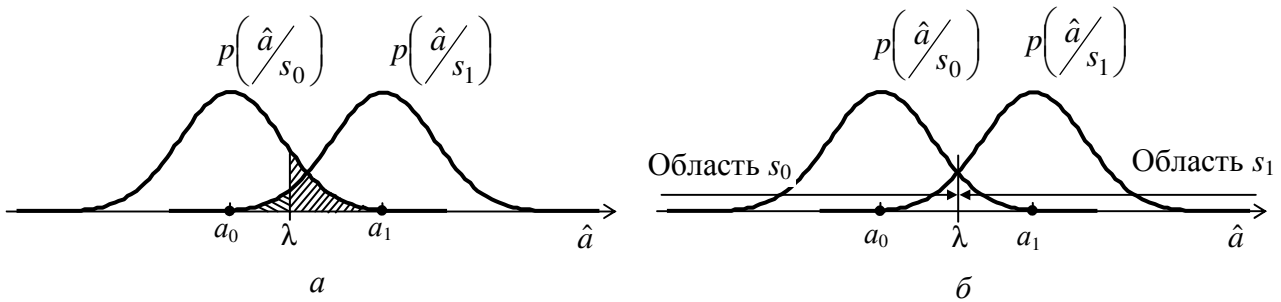
$$z_0 = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) A(t) dt = a_i + \zeta. \quad (2.12)$$

де  $\zeta$  – випадкова величина з гауссовим розподілом імовірностей, тому що вона є результатом лінійного перетворення завади з гауссовим розподілом.

Відповідно до виразу (2.9) для відновлення двійкового символу, переданого на даному тактовому інтервалі, *необхідно порівняти віддалі*  $z_0 - a_1$  і  $z_0 - a_0$  і *винести рішення на користь меншої з них*: якщо  $z_0 - a_1 < z_0 - a_0$ , то  $\hat{b}_i = 1$ , а якщо  $z_0 - a_1 > z_0 - a_0$ , то  $\hat{b}_i = 0$ .

Із співвідношення (2.12) видно, що  $z_0$  є не чим іншим, як оцінкою  $\hat{a}$  коефіцієнта  $a_i$ . Обговоримо правило винесення рішення на основі порівняння умовних густин імовірностей (2.4) (правило максимальної правдоподібності): демодулятор виносить рішення про передавання каналного символу  $\hat{s}_1$ , якщо  $p(\hat{a}/s_1) > p(\hat{a}/s_0)$ , і рішення  $\hat{s}_0$ , якщо  $p(\hat{a}/s_1) < p(\hat{a}/s_0)$ .

На рис. 2.1 показане сигнальне сузір'я AIM-2 і умовні густини ймовірності оцінки коефіцієнта, що описує сигнал, що демодулюється. Із цього рисунка видно, що замість порівняння умовних густин імовірностей рішення можна виносити за результатом порівняння оцінки  $\hat{a}$  із граничним значенням  $\lambda$  за правилом: якщо  $\hat{a} > \lambda$ , те передавався символ  $s_1(t)$ , а якщо  $\hat{a} < \lambda$ , те передавався символ  $s_0(t)$ .



**Рисунок 2.1** – Сигнальне сузір'я AIM-2 й умовні густини ймовірності оцінки  $\hat{a}$ :  
 а – неоптимальне установлення границі; б – оптимальне установлення границі

Імовірність помилки при передаванні  $s_1(t)$

$$P_{\text{пом}}(s_1) = \int_{-\infty}^{\lambda} p(\hat{a}/s_1) d\hat{a}. \quad (2.13)$$

Аналогічно визначається ймовірність помилки при передаванні  $s_0(t)$

$$P_{\text{пом}}(s_0) = \int_{\lambda}^{\infty} p(\hat{a}/s_0) d\hat{a}. \quad (2.14)$$

Безумовна ймовірність помилки сигналу й біта

$$p = P(s_1)P_{\text{пом}}(s_1) + P(s_0)P_{\text{пом}}(s_0) = 0,5[P_{\text{пом}}(s_1) + P_{\text{пом}}(s_0)]. \quad (2.15)$$

З рис. 2.1, а видно, що ймовірності у квадратних дужках дорівнюють площам заштрихованих областей. Легко бачити, що сумарна площа буде мінімальною, коли *границя областей* буде посередині між  $a_1$  і  $a_0$ :

$$\lambda = 0,5(a_1 + a_0). \quad (2.16)$$

Таке значення  $\lambda$  показане на рис. 2.1, б. Видно, що при цьому  $P_{\text{пом}}(s_1) = P_{\text{пом}}(s_0)$ . Там же показано розбивку простору сигналів (у цьому прикладі числової осі) на області сигналів: область значень  $\hat{a}$ , де  $p(\hat{a}/s_1) > p(\hat{a}/s_0)$ , є областю символу  $s_1$ , а область значень  $\hat{a}$ , де  $p(\hat{a}/s_1) < p(\hat{a}/s_0)$ , є областю символу  $s_0$ .

*Примітка.* З рис. 2.1 видно, що ймовірність помилки залежить від значення СКВ  $\sigma$  оцінки  $\hat{a}$  – чим менше СКВ, тим менша ймовірність помилки. Нижче буде показано, що обчислення оцінки за алгоритмом (2.12) забезпечує мінімум значення СКВ оцінки.

### Контрольні питання

1. Сформулюйте критерій оптимальності демодуляторів сигналів цифрової модуляції.
2. Сформулюйте правило рішення за максимумом апостеріорної ймовірності.
3. Сформулюйте правило рішення за максимумом правдоподібності.
4. З якою метою проводять розбивку простору сигналів на області сигналів?

## 3. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЇ ДЕМОДУЛЯЦІЇ СИГНАЛІВ ЦИФРОВОЇ МОДУЛЯЦІЇ (ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК)

Отримане вище правило максимуму правдоподібності відображено у вигляді *схеми оптимального демодулятора*  $M$ -позиційних сигналів (рис. 3.1). Окремі блоки схеми виконують наступні функції:

1. Визначення координат сигналу  $z(t)$  у просторі каналних символів на основі співвідношення (2.7).

2. Визначення квадратів віддалей між  $z(t)$  і  $s_i(t)$  у просторі каналних символів на основі співвідношення

$$d^2(z, s_i) = \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - a_{ik})^2, \quad i = 0, 1, \dots, M-1. \quad (3.1)$$

3. Порівняння квадратів віддалей (або віддалей), визначення номера  $j$ , якому відповідає мінімальне значення  $d^2(z, s_j)$ , видача рішення  $\hat{s}_j$ .

4. Подання каналного символу  $s_j$  бітами відповідно до модуляційного коду.

На наступному тактовому інтервалі перераховані дії повторюються.

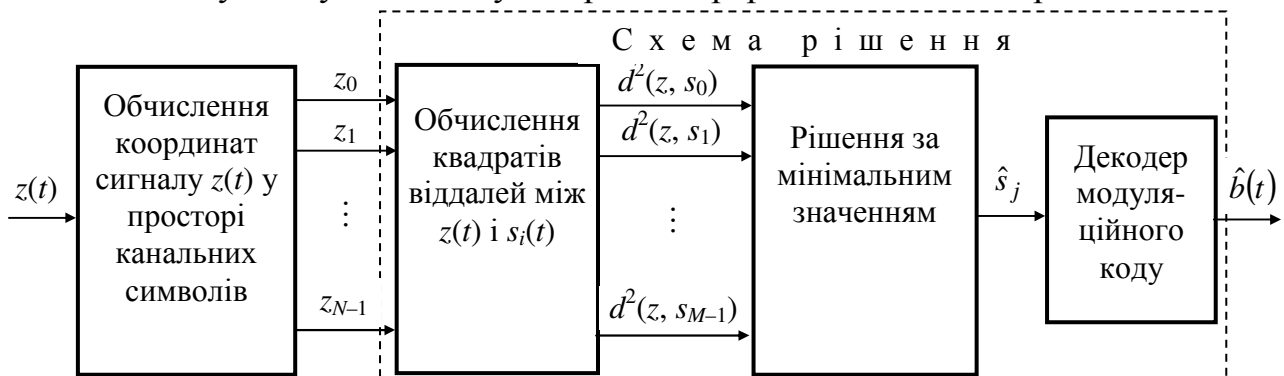


Рисунок 3.1 – Оптимальний демодулятор  $M$ -позиційного сигналу

Схема оптимального демодулятора (рис. 3.1) може використовуватися для демодуляції сигналу довільного заданого виду модуляції – види модуляції відрізняються значеннями  $N$  і  $M$ , формою каналних символів. Обмеження одне

– каналні символи рівномірні, але це обмеження на практиці, звичайно, виконується.

Залежно від виду модуляції, завдяки врахуванню властивостей каналних символів, по-різному можуть обчислюватися координати сигналу  $z(t)$  у просторі каналних символів. Це різноманітність способи побудови демодуляторів, чому буде присвячене значне місце в наступних розділах. Інші блоки демодулятора: обчислення квадратів віддалей між  $z(t)$  і  $s_i(t)$ , рішення по мінімальній віддалі, декодування рішення на основі модуляційного коду є стандартними для демодулятора, і надалі будуть об'єднані в один блок, називаний «схема рішення».

Обчислення координат сигналу  $z(t)$  у просторі каналних символів на основі співвідношення (2.7) може бути виконано схемами кореляторів (рис. 3.2). Схема корелятора містить генератор сигналу  $\psi_k(t)$  – точної копії  $k$ -ї базисної функції каналних символів, помножувач й інтегратор зі скиданням – у момент закінчення сигналу  $\psi_k(t)$  береться відлік, а інтегратор приводиться в нульовий стан, щоб бути готовим до оброблення наступного сигналу. Назва «корелятор» пов'язана з тим, що *схема обчислює значення функції взаємної кореляції між сигналами  $z(t)$  і  $\psi_k(t)$ .*

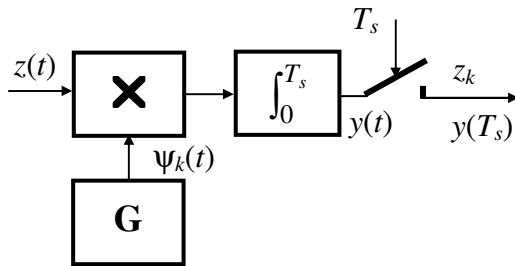


Рисунок 3.2 – Обчислення коефіцієнта  $z_k$  корелятором

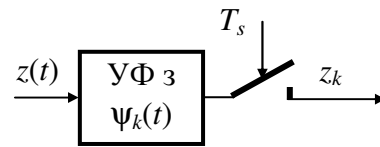


Рисунок 3.3 – Обчислення коефіцієнта  $z_k$  узгодженим фільтром

Обчислення, яке відповідає співвідношенню (2.10), може бути виконано лінійним електричним колом зі спеціально підбраною імпульсною реакцією  $g_k(t)$ . У загальному випадку вихідний сигнал  $y(t)$  і вхідний сигнал  $z(t)$  лінійного електричного кола зв'язані співвідношенням, що називається інтегралом Дюамеля

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (3.2)$$

де  $g(t)$  – імпульсна реакція кола.

Нехай

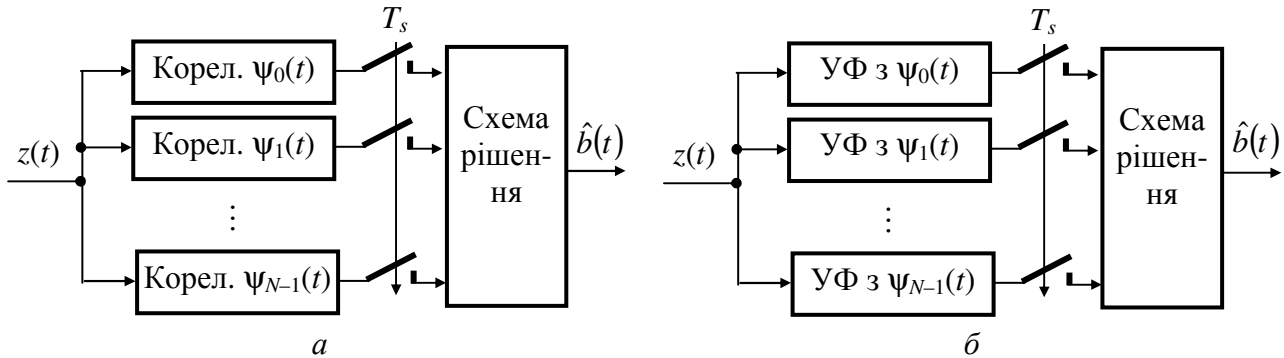
$$g_k(t) = \psi_k(T_s - t). \quad (3.3)$$

Оскільки, сигнал  $\psi_k(t)$  існує на інтервалі  $(0, T_s)$ , то на цьому ж інтервалі існує функція  $\psi_k(T_s - t)$ . Тому межами інтегрування є 0 і  $T_s$ . Будемо шукати значення  $y_k(T_s)$

$$y_k(T_s) = \int_0^{T_s} z(\tau)\psi_k(T_s - T_s + \tau)d\tau = \int_0^{T_s} z(t)\psi_k(t)dt = z_k. \quad (3.4)$$

Лінійне електричне коло з імпульсною реакцією (3.3) називається *фільтром, узгодженим із сигналом  $\psi_k(t)$*  (імпульсна реакція є дзеркальним відображенням сигналу).

Таким чином, обчислення коефіцієнтів розкладання сигналу  $z(t)$  може бути виконане за допомогою кореляторів або узгоджених фільтрів (рис. 3.3). Відповідно схема демодулятора буде містити  $N$  кореляторів або  $N$  узгоджених фільтрів і схему рішення (рис. 3.4).



**Рисунок 3.4** – Оптимальні демодулятори: *а* – на основі кореляторів;  
*б* – на основі узгоджених фільтрів

### Контрольні питання

1. Перечисліть функції, що виконуються окремими блоками схеми оптимального демодулятора.
2. Як обчислити координати сигналу  $z(t)$  у просторі каналних символів?
3. За яким правилом працює схема рішення оптимального демодулятора?

## 4. УЗГОДЖЕНИЙ ФІЛЬТР

У розд. 3 введено поняття «узгоджений фільтр» (УФ) як пристрій для обчислення коефіцієнта подання сигналу, що демодулюється, в ортонормованому базисі. УФ знаходить більш широке застосування в апаратурі систем передавання. Тому нижче розглядається УФ із загальних позицій.

Є лінійний чотириполіусник (фільтр) з передатною функцією  $H(j\omega)$ . На його вхід подається сума детермінованого імпульсного сигналу  $s(t)$  і завади  $n(t)$ :  $z(t) = s(t) + n(t)$ . На виході чотириполіусника має місце сума відгуків на сигнал і заваду  $y(t) = y_s(t) + y_n(t)$ . До виходу чотириполіусника підімкнено дискретизатор для взяття відліку в момент  $t_0$  (рис. 4.1). Цей пристрій використовується для ослаблення завади й взяття відліку з метою визначення амплітудного значення імпульсу  $s(t)$ .



**Рисунок 4.1** – Увімкнення чотириполіусника і дискретизатора

Фільтр називається *узгодженим із сигналом  $s(t)$* , якщо при подачі на його вхід суми сигналу  $s(t)$  і завади  $n(t)$  на його виході в певний момент часу  $t_0$  має місце максимальне відношення миттєвої потужності сигналу  $y_s^2(t_0)$  до середньої потужності шуму  $P_{n \text{ вих.}}$ .

Узгоджений фільтр (УФ) використовується не тільки для максимального ослаблення завади, але й для виконання деяких інших важливих перетворень сигналів і завад. Тому розглянемо *властивості УФ*.

1. Знайдемо *комплексну передатну функцію*  $УФ H(j\omega)$ . Сигнал  $s(t)$  заданий, а завада  $n(t)$  – білий шум зі спектральною густиною потужності  $N_0/2$ .

Нехай

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.1)$$

спектральна густина сигналу  $s(t)$ . Тоді спектральна густина вихідного сигналу  $y_s(t)$  визначається

$$S_{\text{вих}}(j\omega) = S(j\omega)H(j\omega). \quad (4.2)$$

Відлікове значення сигналу  $y_s(t_0)$  визначимо як зворотне перетворення Фур'є від  $S_{\text{вих}}(j\omega)$  для моменту часу  $t_0$

$$y_s(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega. \quad (4.3)$$

Потужність шуму на виході фільтра (середній квадрат відліку шуму  $y_n(t_0)$ ) визначаються

$$P_{n \text{ вих}} = \overline{y_n^2(t_0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.4)$$

Запишемо відношення миттєвої потужності сигналу  $y_s^2(t_0)$  до середньої потужності шуму  $P_{n \text{ вих}}$  у відліковий момент

$$\rho = \frac{\left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right]^2}{\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (4.5)$$

Будемо шукати передатну функцію  $H(j\omega)$ , за якої має місце максимальне значення чисельника в співвідношенні (4.5). Скористаємося тим, що інтеграл у чисельнику – скалярний добуток двох функцій  $S^*(j\omega)$  і  $H(j\omega)e^{j\omega t_0}$  ( $S^*(j\omega)$  – функція, комплексно спряжена з функцією  $S(j\omega)$ ). Скалярний добуток функцій максимальний, якщо функції збігаються з точністю до довільного позитивного коефіцієнта  $c$ , тобто  $H(j\omega)e^{j\omega t_0} = c \cdot S^*(j\omega)$ . Виходить, максимум чисельника (4.5) має місце при передатній функції

$$H(j\omega) = c \cdot S^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (4.6)$$

Після підстановки виразу (4.6) у співвідношення (4.5) отримаємо

$$\rho = \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left[ c^2 \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \right]^2}{\frac{c^2}{2\pi} \cdot \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega} = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (4.7)$$

Тут використано, що енергія сигналу  $s(t)$  визначається

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.8)$$

Бачимо, що при виконанні співвідношення (4.6) забезпечується не тільки максимум чисельника відношення сигнал/шум (4.5), але й максимум цього відношення (значення  $\rho$  не залежить від конкретного виду передатної функції  $H(j\omega)$ , що входить у знаменник). Таким чином, задача визначення передатної функції УФ  $H(j\omega)$  розв'язана.

2. Співвідношення (4.7) визначає максимально можливе відношення сигнал/шум на виході фільтра у відліковий момент. Це відношення прийнято називати піковим

$$\rho_{\text{пik}} = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (4.9)$$

Визначимо *виграш у відношенні сигнал/шум*, що показує, у скільки разів збільшується відношення сигнал/шум при фільтрації УФ,

$$g_{\text{УФ}} = \frac{\rho_{\text{пik}}}{P_s/P_n} = \frac{2E_s \cdot P_n}{N_0 \cdot P_s} = \frac{2P_s T_s N_0 F_{\text{ш}}}{N_0 \cdot P_s} = 2F_{\text{ш}} T_s, \quad (4.10)$$

де  $F_{\text{ш}}$  – шумова смуга завади на вході фільтра;

$T_s$  – тривалість сигналу  $s(t)$ ;

$P_s$  і  $P_n$  – середні потужності сигналу й завади на вході фільтра.

З виразу (4.10) видно, що за певних співвідношень між шумовою смугою завади й тривалістю сигналу виграш може набувати великих значень.

3. Знайдемо *амплітудно-частотну й фазочастотну характеристики* УФ. Передатна функція будь-якого лінійного електричного кола визначає її АЧХ і ФЧХ:

$$H(j\omega) = H(\omega) \exp(j\varphi(\omega)), \quad (4.11)$$

де  $H(\omega)$  – АЧХ кола,  $\varphi(\omega)$  – ФЧХ кола.

Подамо спектральну густину сигналу  $s(t)$  через модуль і аргумент

$$S(j\omega) = S(\omega) \exp(j\psi(\omega)), \quad (4.12)$$

де  $S(\omega)$  – амплітудний спектр сигналу,  $\psi(\omega)$  – фазовий спектр сигналу.

Після підстановки (4.11) і (4.12) в (4.6) отримаємо, що АЧХ УФ

$$H(\omega) = cS(\omega) \quad (4.13)$$

з точністю до довільного коефіцієнта збігається з амплітудним спектром сигналу, з яким фільтр узгоджений. Коефіцієнт передачі УФ більший на тих частотах, на яких більші складові сигналу  $s(t)$ .

Рівність аргументів лівої й правої частин (4.6) дає

$$\varphi(\omega) = -\psi(\omega) - \omega t_0, \quad (4.14)$$

що трактується так: ФЧХ УФ з точністю до лінійного доданка протилежна за знаком фазовому спектру сигналу, з яким фільтр узгоджений.

Для з'ясування фізичної сутності ФЧХ УФ розглянемо якусь складову сигналу частоти  $f_i$ :  $A_i \cos(2\pi f_i t + \psi_i)$ . Ця складова на виході УФ визначається:

$$A_i H(f_i) \cos(2\pi f_i t + \psi_i + \varphi(f_i)) = A_i H(f_i) \cos(2\pi f_i t + \psi_i - \psi_i - 2\pi f_i t_0).$$

Повна фаза коливання дорівнює  $2\pi f_i(t - t_0)$ . У момент  $t = t_0$  повна фаза коливання дорівнює нулю незалежно від частоти. У цей момент всі складові перебувають у фазі й при додаванні дають максимально можливе значення відгуку.

4. Знайдемо імпульсну реакцію УФ як зворотне перетворення Фур'є від передатної функції

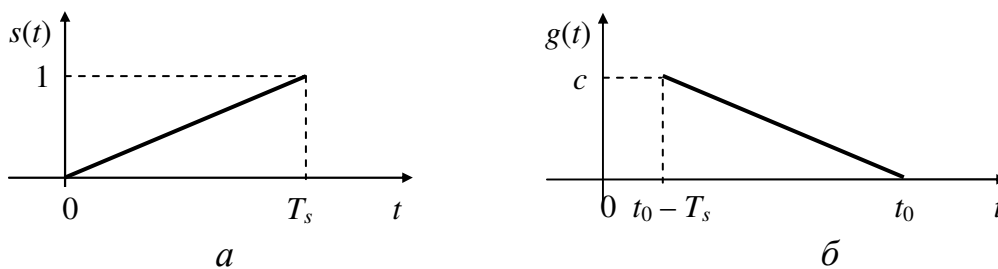
$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} dt = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(-j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} dt = \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t_0 - t)} dt = cs(t_0 - t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Бачимо, що імпульсна реакція УФ є дзеркальним відображенням сигналу, з яким фільтр узгоджений, відносно точки  $t_0$  у масштабі  $c$ .

**Приклад 4.1.** Побудуємо графік імпульсної реакції фільтра, узгодженого із сигналом

$$s(t) = \begin{cases} 1 - t/T_s, & 0 \leq t \leq T_s, \\ 0, & t < 0, \quad t > T_s. \end{cases}$$

Умовою фізичної реалізації лінійного електричного кола є вимога до її імпульсної реакції:  $g(t) \equiv 0$  для значень  $t < 0$ . З рис. 4.2 видно, що для виконання цієї умови необхідно накласти вимогу на момент відліку:  $t_0 \geq T_s$ , де  $T_s$  – тривалість сигналу  $s(t)$ .



**Рисунок 4.2** – Графіки: *a* – сигналу;  
*б* – імпульсної реакції фільтра, узгодженого з сигналом

5. Нехай на вході УФ діє довільний сигнал  $z(t)$ . Відгук фільтра визначається інтегралом Дюамеля

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)g(t-\tau)d\tau = c \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)s(t_0-t+\tau)d\tau = cK_{zs}(t-t_0), \quad (4.16)$$

де  $K_{zs}(\tau)$  – функція взаємної кореляції сигналів  $z(t)$  і  $s(t)$ .

З виразу (4.16) випливає, що *форма сигналу на виході УФ визначається функцією взаємної кореляції вхідного сигналу й сигналу, з яким фільтр узгоджений*, а саме, вона повторює функцію взаємної кореляції в масштабі  $c$  і зміщена вправо на  $t_0$ .

Якщо в співвідношенні (4.16) припустити, що  $c = 1$  і  $t_0 = T_s$ , то легко переконатися, що  $y(T_s)$  дає значення скалярного добутку сигналів  $z(t)$  і  $s(t)$ . Ця властивість УФ використовувалась вище для визначення коефіцієнтів розкладання – співвідношення (3.4).

6. Нехай на вхід УФ подається сигнал, з яким фільтр узгоджений. Тоді на підставі (4.16) запишемо

$$y(t) = cK_s(t-t_0), \quad (4.17)$$

де  $K_s(\tau)$  – функція кореляції сигналу  $s(t)$ .

Таким чином, *якщо на вхід УФ подається сигнал, з яким фільтр узгоджений, то відгук фільтра визначається функцією кореляції сигналу*, а саме, вона повторює функцію кореляції сигналу в масштабі  $c$  і зміщена вправо на  $t_0$ .

**Вправа 4.1.** Проілюструємо розглянуті властивості УФ на прикладі фільтра, узгодженого з прямокутним імпульсом амплітуди  $A$  і тривалості  $T_s$ . Нехай  $c = 1/A$  і  $t_0 = T_s$ . Імпульсна реакція фільтра, узгодженого з П-імпульсом, має П-подібну форму, амплітуду 1 і тривалість  $T_s$ , тобто імпульсна реакція збігається із сигналом (рис. 4.3, а).

Спектральна густина П-імпульсу визначається перетворенням Фур'є

$$S_n(j\omega) = \int_0^{T_s} Ae^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} [e^{-j\omega T_s} - 1] = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega T_s}{2} \cdot e^{-j\omega T_s/2}. \quad (4.18)$$

На основі співвідношення (4.6) отримаємо вираз для передатної функції фільтра, узгодженого з П-імпульсом, якщо  $c = 1/A$  і  $t_0 = T_s$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} [1 - e^{-j\omega T_s}]. \quad (4.19)$$

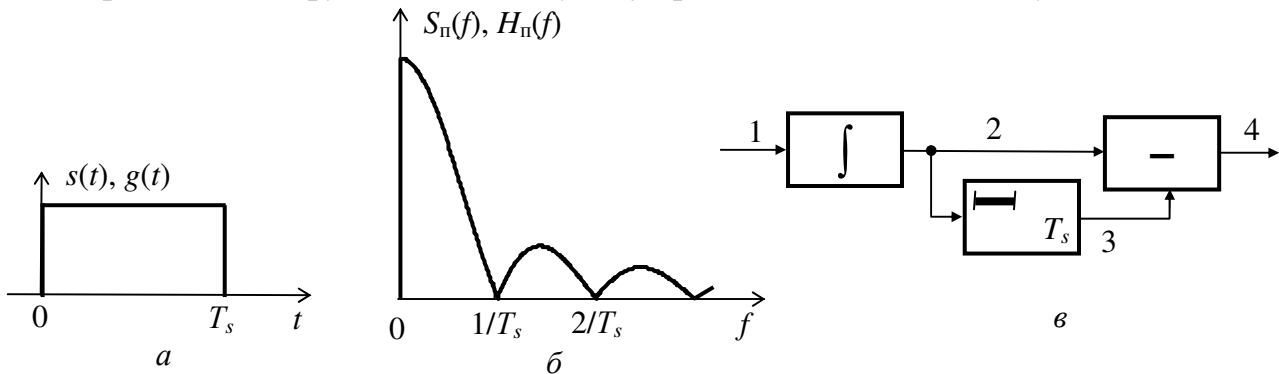
Із цього співвідношення випливає, що схема фільтра, узгодженого з П-імпульсом, складається з інтегратора (з передатною функцією  $1/j\omega$ ), пристрою затримки на час  $T_s$  (з передатною функцією  $\exp(-j\omega T_s)$ ) і віднімача (рис. 4.3, в). На цьому рисунку цифрами позначені окремі точки схеми для обговорення її роботи.

Легко одержати вираз для АЧХ фільтра, узгодженого з П-імпульсом. Остаточний вираз для АЧХ після переходу до змінної  $f$  має вигляд функції  $\sin(x)/x$

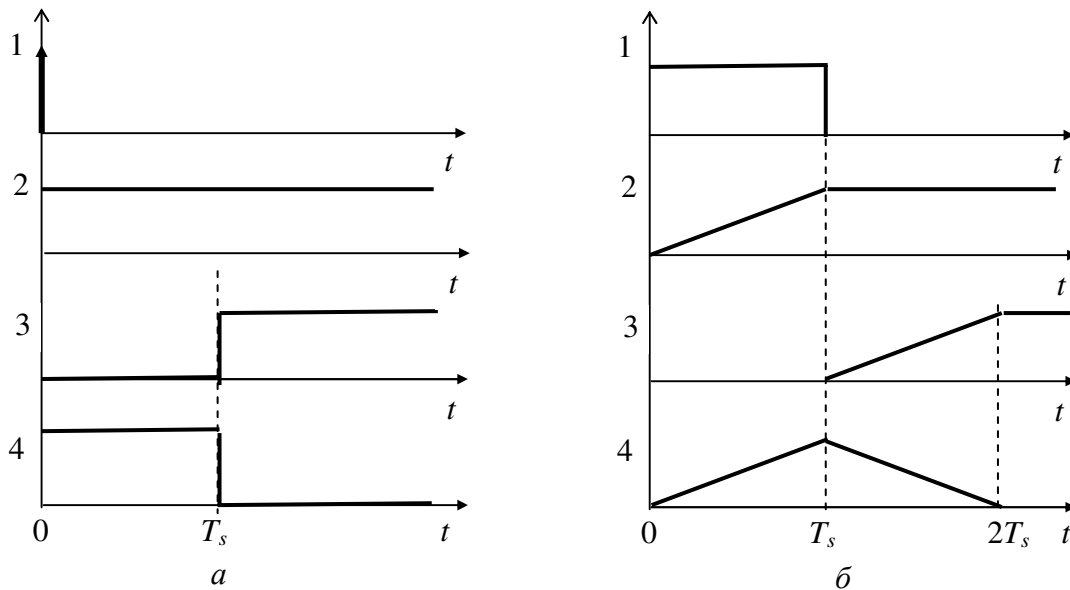
$$H_{\Pi}(f) = T_s \frac{\sin \pi f T_s}{\pi f T_s}. \quad (4.20)$$

АЧХ УФ і амплітудний спектр сигналу показані на рис 4.3, б.

На рис. 4.4, а показані процеси, що мають місце в УФ при подачі на його вхід  $\delta$ -функції. На виході схеми спостерігається імпульсна реакція. На рис. 4.4, б показані процеси, що мають місце в УФ при подачі на його вхід імпульсу, з яким фільтр узгоджений. На виході схеми спостерігається відгук, що збігається з кореляційною функцією П-імпульсу тривалістю  $T_s$  (див. модуль 1).



**Рисунок 4.3** – Характеристики фільтра, узгодженого з П-імпульсом:  
а – імпульсна реакція; б – АЧХ; в – схема фільтра



**Рисунок 4.4** – Часові діаграми, що ілюструють роботу фільтра, узгодженого з П-імпульсом

### Контрольні питання

1. Що є критерієм оптимальності узгодженого фільтра?
2. Перелічіть властивості узгодженого фільтра.
3. Як визначається пікове відношення сигнал/шум на виході узгодженого фільтра?

## 5. ЗАСТОСУВАННЯ УЗГОДЖЕНИХ ФІЛЬТРІВ У ДЕМОДУЛЯТОРАХ СИГНАЛІВ АІМ-М

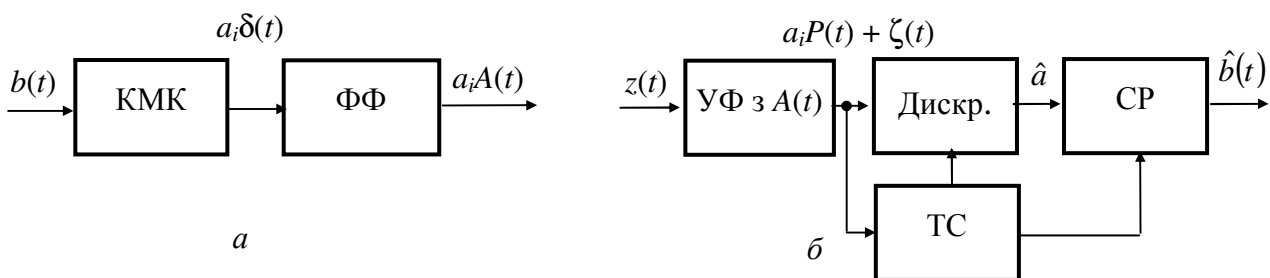
Розглянемо спільно *схеми модулятора й демодулятора сигналів АІМ-М* (рис. 5.1). Схема модулятора будується на основі опису канальних символів сигналів АІМ-М

$$s_i(t) = a_i A(t), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (5.1)$$

де  $A(t)$  – імпульс із певними частотними й часовими характеристиками;  
 $a_i$  – коефіцієнт, що відображає передані біти.

На схемі КМК – кодер модуляційного коду, що виробляє коефіцієнти  $a_i$  на основі вхідного цифрового сигналу – на кожному тактовому інтервалі блоку з  $n = \log_2 M$  біт ставиться у відповідність коефіцієнт  $a_i$ . Цей коефіцієнт подається на вхід формуючого фільтра (ФФ) сигналом  $a_i \delta(t)$ . ФФ формує імпульс  $a_i A(t)$ .

Схема демодулятора побудована на основі матеріалу попередніх розділів. На вхід узгодженого фільтра надходить сума сигналу й завади  $a_i A(t) + n(t)$ . Узгоджений фільтр послабляє заваду, і на його виході має місце корисний сигнал  $a_i P(t)$  і завада  $\zeta(t)$ . Дискретизатор бере відлік і видає оцінку  $\hat{a}$  коефіцієнта  $a_i$ . Максимальне значення імпульсу  $P(t)$  у момент відліку дорівнює 1, тому  $\hat{a} = a_i + \zeta$  (оцінку  $\hat{a}$  можна розглядати як коефіцієнт  $z_0$  подання сигналу  $z(t)$  в одновірному просторі відносно базисної функції  $A(t)$ ). Дискретизатор управляється послідовністю імпульсів від схеми тактової синхронізації (ТС), що забезпечує взяття відліків у моменти максимального відношення сигнал/шум. На основі отриманої від дискретизатора оцінки  $\hat{a}$  схема рішення (СР) виносить рішення про номер переданого канального символу й видає рішення двійковими символами відповідно до модуляційного коду.



**Рисунок 5.1** – Схеми: *a* – модулятор сигналів АІМ-М;  
*б* – демодулятор сигналів АІМ-М

Оскільки формуючий фільтр збуджується  $\delta$ -функцією, то амплітудний спектр імпульсу  $A(t)$  дорівнює АЧХ ФФ

$$S_A(f) = H_{\text{ФФ}}(f). \quad (5.2)$$

Амплітудний спектр імпульсу  $P(t)$  визначається

$$S_P(f) = S_A(f) \cdot H_{\text{УФ}}(f), \quad (5.3)$$

де  $H_{\text{УФ}}(f)$  – АЧХ фільтра, узгодженого з імпульсом  $A(t)$ .

Імпульс на виході УФ  $P(t)$  повинен задовольняти умові відсутності міжсимвольної інтерференції (МСІ), тому вимагатимемо, щоб спектр  $S_P(f)$  був спектром Найквіста  $N(f)$ :

$$S_P(f) = N(f). \quad (5.4)$$

Скористаємося властивістю УФ: його АЧХ збігається з амплітудним спектром сигналу, з яким він узгоджений (при  $c = 1$ )

$$H_{\text{УФ}}(f) = S_A(f). \quad (5.5)$$

Враховуючи рівності (5.2)...(5.5) доходимо висновку, що

$$H_{\text{ФФ}}(f) = H_{\text{УФ}}(f) = \sqrt{N(f)}. \quad (5.6)$$

Говорять, що АЧХ ФФ й УФ описуються залежністю «корінь квадратний зі спектра Найквіста».

Звичайно, спектр Найквіста описують залежністю «піднятий косинус»

$$N(f) = \begin{cases} T, & 0 \leq |f| \leq (1 - \alpha)f_{\text{н}}, \\ 0,5T \left[ 1 + \sin \left( \frac{\pi}{2\alpha} \left( 1 - \frac{|f|}{f_{\text{н}}} \right) \right) \right], & (1 - \alpha)f_{\text{н}} < |f| < (1 + \alpha)f_{\text{н}}, \\ 0, & |f| \geq (1 + \alpha)f_{\text{н}}, \end{cases} \quad (5.7)$$

де  $T$  – тактовий інтервал;

$f_{\text{н}} = 1/(2T)$  – частота Найквіста;

$\alpha$  – коефіцієнт скату спектра.

Залежність «корінь квадратний зі спектра Найквіста» описується

$$\sqrt{N(f)} = \begin{cases} \sqrt{T}, & |f| \leq (1 - \alpha)f_{\text{н}}, \\ \sqrt{T} \sin \left[ \frac{\pi}{4\alpha} \left( 1 + \alpha - \frac{|f|}{f_{\text{н}}} \right) \right], & (1 - \alpha)f_{\text{н}} < |f| < (1 + \alpha)f_{\text{н}}, \\ 0, & |f| \geq (1 + \alpha)f_{\text{н}}. \end{cases} \quad (5.8)$$

На рис. 5.2 показані залежності  $N(f)$  і  $\sqrt{N(f)}$  при  $\alpha = 0,4$ . З рис. 5.2, б видно, що формуючий та узгоджений фільтри є фільтрами нижніх частот, але зі спеціальною АЧХ. Якщо в якості ФФ і УФ використовувати фільтри Баттерворта, Чебишева й ін., синтезовані з метою наближення їх АЧХ до П-подібної, то не буде виконуватись умова відсутності МСІ.

Вираз для імпульсу  $A(t)$  можна одержати як зворотне перетворення Фур'є від залежності  $\sqrt{N(f)}$ , вважаючи, що фазовий спектр тотожно дорівнює нулю:

$$A(t) = \frac{\pi}{8\alpha + 2\pi(1 - \alpha)} \left\{ \frac{8\alpha}{\pi(1 - (8\alpha f_{\text{н}} t)^2)} \cdot [\cos(2\pi(1 + \alpha)f_{\text{н}} t) + 8\alpha f_{\text{н}} t \cdot \sin(2\pi(1 - \alpha)f_{\text{н}} t)] + 2(1 - \alpha) \frac{\sin(2\pi(1 - \alpha)f_{\text{н}} t)}{2\pi(1 - \alpha)f_{\text{н}} t} \right\}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (5.9)$$

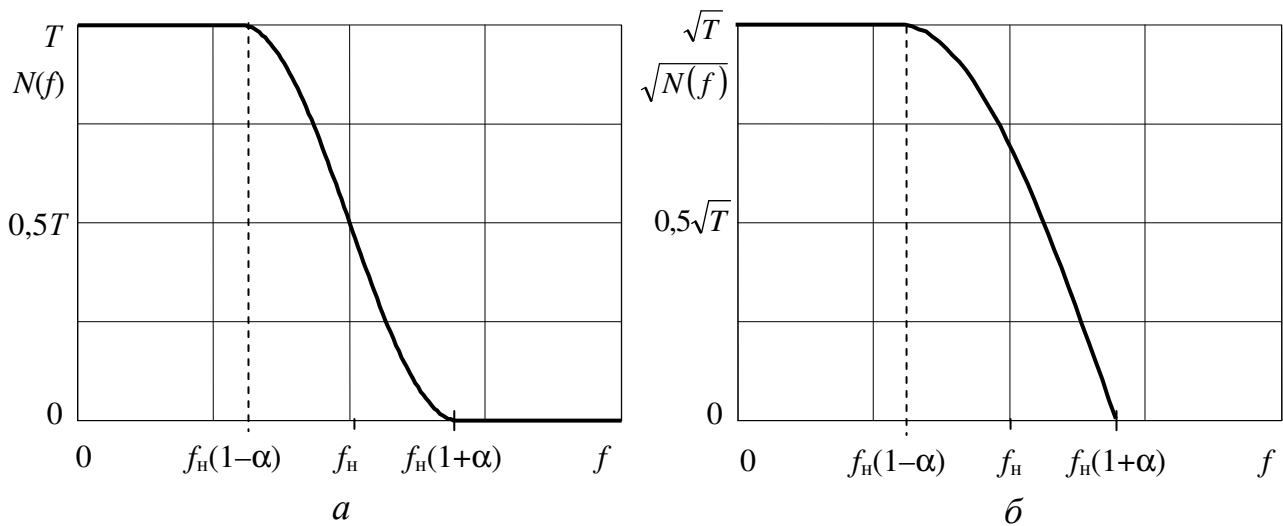


Рисунок 5.2 – Спектри: *a* – Найквіста; *б* – корінь зі спектра Найквіста

Функцію  $P(t)$  можна одержати як зворотне перетворення Фур'є від  $N(f)$ , вважаючи, що фазовий спектр тотожно дорівнює нулю:

$$P(t) = \frac{\sin 2\pi f_h t}{2\pi f_h t} \cdot \frac{\cos 2\pi \alpha f_h t}{1 - (4\alpha f_h t)^2}. \quad (5.10)$$

На рис. 5.3 показані графіки імпульсів  $A(t)$  і  $P(t)$  при  $\alpha = 0,4$ . Із графіка  $P(t)$  видно, що його амплітудне значення дорівнює 1. А це значить, що під час передавання імпульсу  $a_i A(t)$  відлік на виході дискретизатора дорівнює  $a_i$ . З рис. 5.3 видно, що імпульс  $P(t)$  набуває нульових значень при  $t = \pm kT$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), тобто задовольняє умові відліковості. Імпульс  $A(t)$  не набуває нульових значень при  $t = \pm kT$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

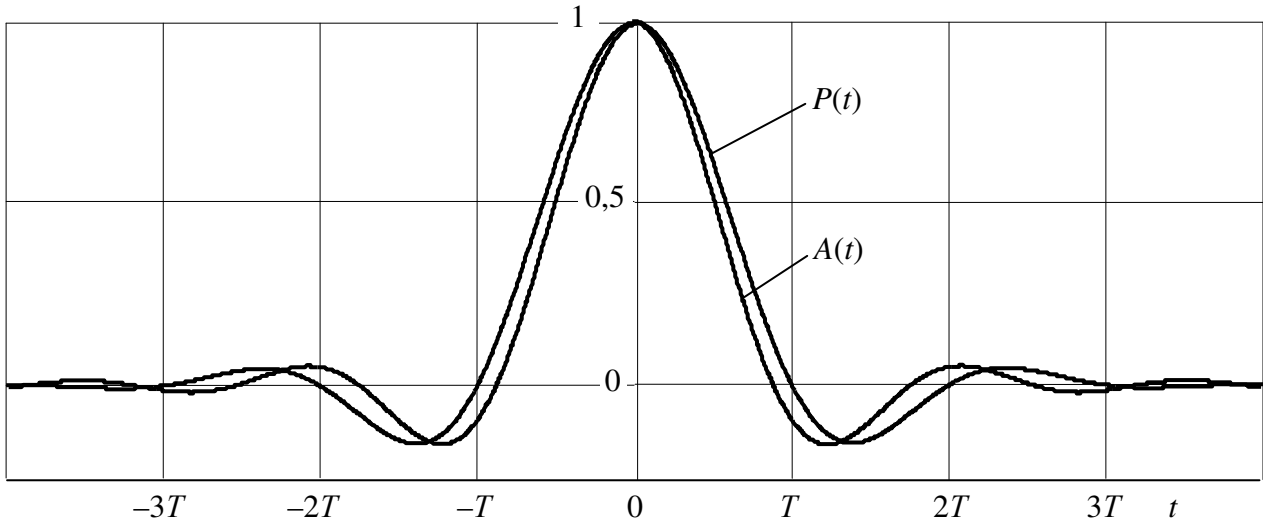


Рисунок 5.3 – Імпульси  $A(t)$  і  $P(t)$

Визначимо енергію імпульсу  $A(t)$ , що буде потрібним далі для аналізу,

$$E_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_A^2(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_A^2(f) df = 2 \int_0^{\infty} (\sqrt{N(f)})^2 df = 2 \int_0^{\infty} N(f) df = 1. \quad (5.11)$$

Результат отримано, виходячи з того, що інтеграл дорівнює площі під кривою, описуваною підінтегральною функцією (рис. 5.2, а). Оскільки функція  $N(f)$  має кососиметричний скат, то ця площа дорівнює площі прямокутника висотою  $T$  й основою  $f_n = 1/(2T)$ . Отримане значення дозволяє легко визначати енергію сигналу  $s_i(t) = a_i A(t)$ :

$$E_i = a_i^2. \quad (5.12)$$

Для подальшого аналізу буде потрібним також значення середньої потужності шуму на виході УФ, АЧХ якого описується залежністю  $\sqrt{N(f)}$ , за умови, що спектральна густина потужності шуму на вході УФ  $N_0/2$

$$P_{n \text{ вих}} = 2 \int_0^\infty \frac{N_0}{2} H_{\text{УФ}}^2(f) df = N_0 \int_0^\infty N(f) df = \frac{N_0}{2}. \quad (5.13)$$

Під час інтегрування використано той же підхід, що й при обчисленні інтегралу (5.11). Значення СКВ шуму на виході УФ дорівнює

$$\sigma = \sqrt{N_0/2}. \quad (5.14)$$

З огляду на (5.12) і (5.14) легко переконатися, що відношення сигнал/шум у момент відліку

$$\frac{a_i}{\sigma} = \sqrt{\frac{2E_i}{N_0}} \quad (5.15)$$

відповідає властивості узгодженого фільтра (4.9).

### **Контрольні питання**

1. Сформулюйте призначення формуючого і узгодженого фільтрів.
2. Сформулюйте призначення тактової синхронізації.
3. Як визначається СКВ шуму на виході УФ?

## **6. КОРЕЛЯТОР**

При аналізі властивостей узгоджених фільтрів було встановлено зв'язок між вихідним сигналом  $y(t)$  і вхідним сигналом  $z(t)$  – співвідношення (4.16). Припустимо, що  $c = 1$ ,  $t_0 = T_s$  і за цих умов із співвідношення (4.16) визначимо  $y(T_s)$ . При цьому врахуємо, що сигнал  $s(t)$  існує на інтервалі  $(0, T_s)$ :

$$y(T_s) = \int_0^{T_s} z(t)s(t)dt. \quad (6.1)$$

З останнього співвідношення випливає, що можна виконати оптимальне оброблення сигналу з завадою  $z(t) = s(t) + n(t)$  схемою, робота якої описується цим співвідношенням. Пристрій, робота якого описується співвідношенням (6.1), називається *корелятором*, він розглядався в розд. 3.

На рис. 3.2 подана схема корелятора. Вона містить генератор сигналу  $s(t)$  – точної копії оброблюваного сигналу, перемножувач і інтегратор зі скиданням – у момент закінчення сигналу  $s(t)$  дискретизатором береться відлік, а інтегратор приводиться в нульовий стан, щоб бути готовим до оброблення наступного сигналу.

З опису схеми зрозуміло, що залишилися не показаними кола синхронізації генератора сигналу  $s(t)$ , кола керування дискретизатором і скиданням інтегратора.

Еквівалентність оброблення сигналу з завадою узгодженим фільтром і корелятором полягає в тому, що в обох випадках

$$\rho_{\text{вих}} = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (6.2)$$

Проте процеси, що мають місце в схемах узгодженого фільтра й корелятора, різні. Проілюструємо це на прикладі оброблення радіоімпульсу  $s(t)$  (рис. 6.1, а). На виході узгодженого фільтра спостерігається відгук у вигляді кореляційної функції сигналу  $s(t)$  (рис. 6.1, б). З виходу фільтра береться відлік  $y_s(T_s)$ . На рис. 6.1, в показані сигнал на виході інтегратора зі скиданням корелятора  $y_s(t)$  і відлікове значення з виходу корелятора  $y_s(T_s)$ . Незважаючи на те, що процеси різні, на виходах обох схем відношення сигнал/шум однакові

$$\frac{y(T_s)}{\sigma} = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}, \quad (6.3)$$

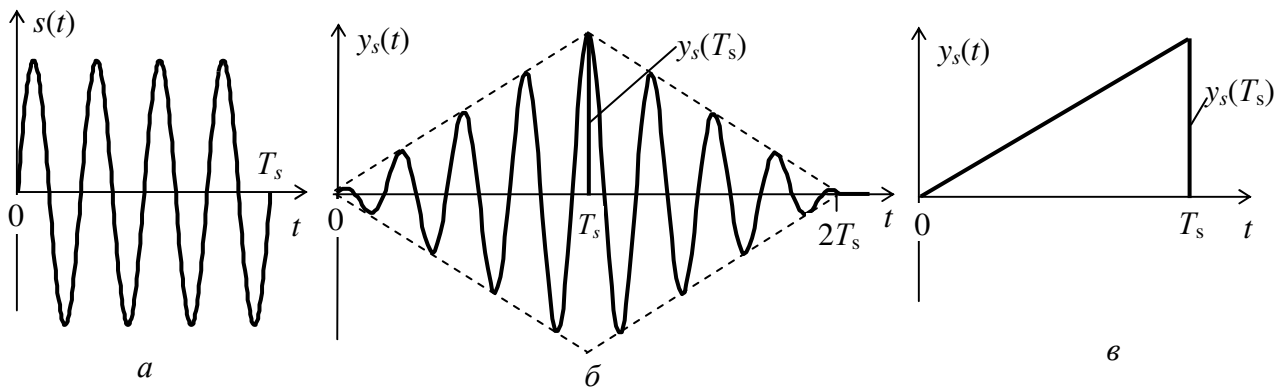
де  $\sigma$  – СКВ відліку  $y(t)$ .

Співвідношення (6.2) і (6.3) вірні для корелятора, якщо час оброблення сигналу корелятором дорівнює тривалості сигналу. Інша ситуація має місце під час оброблення імпульсів з істотно обмеженим спектром, наприклад, імпульсів Найквіста. У цьому випадку тривалість імпульсу може набувати значення  $T_s = (8...20)T$ , де  $T$  – тривалість тактового інтервалу. При демодуляції сигналів цифрової модуляції час оброблення корелятором не може бути більшим за  $T$ .

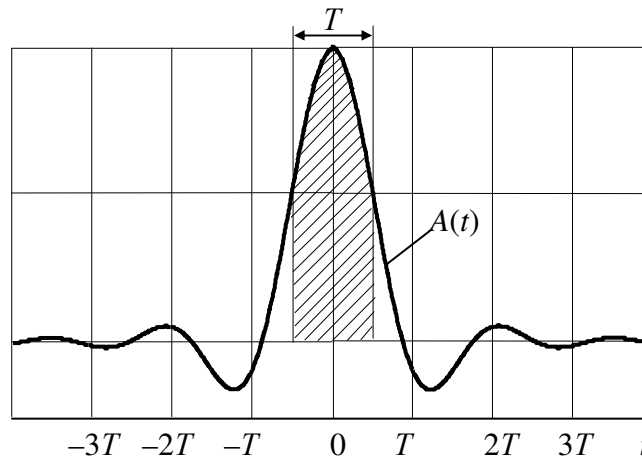
На рис. 6.2 показано імпульс  $A(t)$ . Заштрихована площа під кривою  $A(t)$  на інтервалі  $(-T/2, T/2)$  показує результат інтегрування корелятором – при обробленні імпульсу не використовуються значення імпульсу на інтервалах  $(-\infty, -T/2)$  і  $(T/2, \infty)$ . Тому відношення сигнал/шум на виході корелятора менше, ніж при обробленні узгодженим фільтром. Час оброблення узгодженим фільтром дорівнює тривалості його імпульсної реакції, а вона дорівнює тривалості сигналу  $T_s$ , і всі значення сигналу використовуються при обробленні. З цієї причини корелятор застосовувався в демодуляторах сигналів цифрової модуляції, що використовували слабко фільтровані П-імпульси, коли тривалість сигналу практично дорівнювала тривалості тактового інтервалу. При використанні імпульсів з суттєво обмеженим спектром застосовуються узгоджені фільтри.

### **Контрольні питання**

1. Накресліть схему корелятора і поясніть його роботу.
2. У чому полягають еквівалентність і відмінність оброблення сигналу з завадою узгодженим фільтром і корелятором?



**Рисунок 6.1** – Сигнали: *а* – на вході пристроїв оброблення; *б* – на виході узгодженого фільтра; *в* – на виході інтегратора корелятора



**Рисунок 6.2** – Оброблення імпульсу корелятором

## 7. УЗГОДЖЕНИЙ ФІЛЬТР ПРИ НЕБІЛОМУ ШУМІ

Є сума сигналу й завади  $z(t) = s(t) + n(t)$ . Сигнал  $s(t)$  детермінований, завада  $n(t)$  характеризується спектральною густиною потужності  $G_n(\omega)$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ , яка не є постійною величиною. Необхідно знайти *передатну функцію фільтра*  $H(j\omega)$ , узгодженого з сигналом  $s(t)$ , тобто фільтр, що забезпечує максимальне відношення сигнал/завада у відліковий момент.

З розд. 4 відома передатна функція узгодженого фільтра при білому шумі:

$$H_0(j\omega) = c \cdot S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (7.1)$$

Скористаємось цим результатом. Пропустимо сигнал  $z(t)$  через *фільтр*, що *оббілює*, з передатною функцією  $H_1(j\omega)$ . Знайдемо АЧХ фільтра, що оббілює, який перетворить заваду з нерівномірним спектром у білий шум:

$$G_n(\omega) |H_1(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \Rightarrow |H_1(j\omega)| = \sqrt{\frac{N_0}{2G_n(\omega)}}, \quad (7.2)$$

де  $N_0/2$  – питома потужність білого шуму.

Нехай  $S(j\omega)$  – спектральна густина сигналу  $s(t)$ . Після фільтра, що оббілює, спектральна густина корисного сигналу  $s_1(t)$  визначається  $S(j\omega)H_1(j\omega)$ . На основі співвідношення (7.1) запишемо передатну функцію фільтра, узгодженого з сигналом  $s_1(t)$

$$H_2(j\omega) = c \cdot S^*(j\omega)H_1^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (7.3)$$

Каскадно з'єднані фільтр, що оббілює, і фільтр, узгоджений з сигналом  $s_1(t)$ , утворюють узгоджений фільтр при небілому шумі з передатною функцією

$$H_{\text{нб}}(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot c \cdot S^*(j\omega)H_1^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (7.4)$$

Після підстановки виразу для  $|H(j\omega)|^2$  зі співвідношення (7.2) отримаємо (множник  $N_0/2$  віднесемо до довільного коефіцієнта  $c$ ):

$$H_{\text{нб}}(j\omega) = c \cdot \frac{S^*(j\omega)}{G_n(\omega)} e^{-j\omega t_0}. \quad (7.5)$$

З отриманого виразу видно, що значення АЧХ УФ при небілому шумі в порівнянні зі значеннями АЧХ УФ при білому шумі менша на тих частотах, де питома потужність завади більша. Вимоги до ФЧХ УФ при небілому шумі такі ж, як і вимоги до ФЧХ УФ при білому шумі.

Відзначимо, що реалізація УФ при небілому шумі не вимагає використання фільтра, що оббілює. Фільтр, що оббілює, необхідний для виконання викладень (7.2) – (7.5).

### **Контрольні питання**

1. Що таке фільтр, що оббілює,?
2. Запишіть і поясніть формулу АЧХ фільтра, що оббілює.

## **8. УЗГОДЖЕНА ФІЛЬТРАЦІЯ РАДІОІМПУЛЬСІВ**

У випадку смугових сигналів цифрової модуляції (АФМ-М, ФМ-М, КАМ-М й ін.) каналні символи будуються на основі імпульсу-переносника

$$s(t) = \sqrt{2}A(t)\cos 2\pi f_0 t. \quad (8.1)$$

Сигнал  $s(t)$  є смуговим. Його спектр зосереджений навколо частоти  $f_0$ . Необхідно виконати оптимальну фільтрацію сигналу  $s(t)$ , що надходить разом з завадою  $n(t)$ , і взяти відлік. Вважаємо, що завада – білий шум, його спектр зосереджений у смузі пропускання каналу зв'язку.

Перший спосіб виконання УФ – використати смуговий фільтр, АЧХ якого описується співвідношенням (4.13). Інженерна практика показала, що смугові фільтри мають невисоку точність реалізації.

Другий спосіб полягає у наступному: спочатку виконується *когерентне (синхронне) детектування суми сигналу й завади*  $z(t) = s(t) + n(t)$ , а потім – *фільтрація імпульсу  $A(t)$  з завадою низькочастотним узгодженим фільтром*

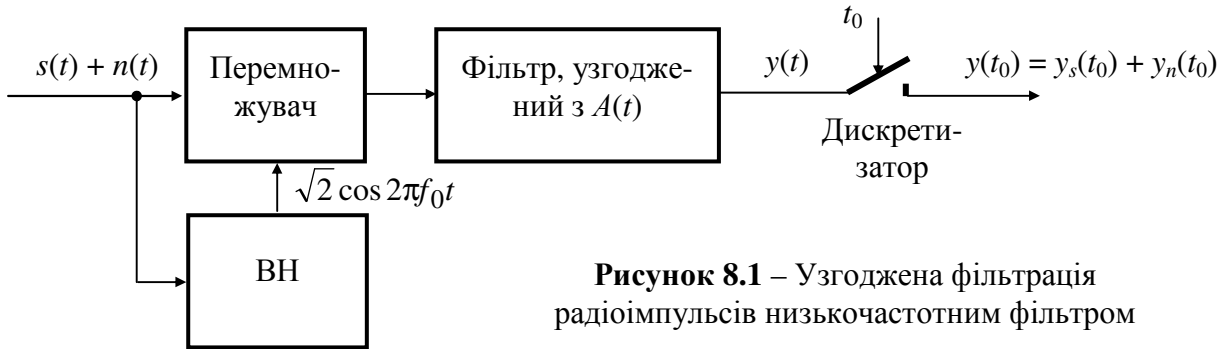
(рис. 8.1). Схема відновлення несінного коливання (ВН) виробляє коливання  $\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t$ , необхідне для роботи детектора.

Для аналізу проходження шуму через синхронний детектор смуговий шум представимо квадратурними складовими

$$n(t) = \sqrt{2} N_c(t) \cos 2\pi f_0 t + \sqrt{2} N_s(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (8.2)$$

де  $\sqrt{2} N_c(t)$  – амплітуда косинусної складової завади;

$\sqrt{2} N_s(t)$  – амплітуда синусної складової завади.



**Рисунок 8.1** – Узгоджена фільтрація радіоімпульсів низькочастотним фільтром

На виході перемножувача одержимо

$$u_{\text{пер}}(t) = [A(t) + N_c(t)] + [A(t) + N_c(t)] \cos 2\pi 2f_0 t. \quad (8.3)$$

Перший доданок у виразі (8.3) – низькочастотна складова, а другий доданок – сигнал балансної модуляції з частотою несінного коливання  $2f_0$ . У системах передавання частота несінного коливання істотно більша максимальної частоти спектра сигналу  $A(t)$ , і спектри двох доданків в (8.3) не перекриваються. Для одержання сигналу  $A(t)$  після перемножувача необхідно увімкнути ФНЧ, що пропускає  $A(t)$  і ослабляє  $A(t) \cos 2\pi 2f_0 t$ . Тобто, потрібен фільтр з частотою зрізу більшою, ніж максимальна частота в спектрі сигналу  $A(t)$ . Роль цього фільтра буде виконувати УФ, який виконує оптимальну фільтрацію сигналу  $A(t)$ . На виході УФ за рахунок імпульсу  $A(t)$  одержимо імпульс  $P(t)$  (розд. 5).

Обговоримо проходження шуму через синхронний детектор і узгоджений фільтр. Шум  $n(t)$  білий у смузі пропускання каналу зв'язку  $F_k$  із середньою частотою  $f_0$ . Середня потужність шуму визначається  $P_n = N_0 F_k$ . Ця потужність ділиться нарівно між косинусною і синусною складовими. Так, потужність косинусної складової

$$\overline{(N_c(t) \sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t)^2} = P_n / 2. \quad (8.4)$$

Виконавши усереднення лівої частини рівності (8.4), отримаємо

$$\overline{N_c^2(t)} = P_n / 2. \quad (8.5)$$

Шум  $N_c(t)$  є білим у смузі частот  $(0, F_k/2)$ . Його питома потужність дорівнює

$$\frac{P_n/2}{F_k/2} = \frac{P_n}{F_k} = N_0. \quad (8.6)$$

З аналізу перетворень сигналу й завади синхронним детектором видно, що на вході фільтра, узгодженого з  $A(t)$ , діє сигнал  $A(t)$  і білий шум з питомою потужністю  $N_0$ . Ця фільтрація розглянута в розд. 5. УФ забезпечує відношення миттєвої потужності сигналу до середньої потужності шуму

$$\rho_{\text{пик}} = \frac{2E_A}{N_0}. \quad (8.7)$$

Визначимо енергію сигналу  $s(t)$

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (A(t)\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(t) dt = E_A. \quad (8.8)$$

Таким чином, схема, подана на рис. 8.1, забезпечує відношення сигнал/шум

$$\rho_{\text{пик}} = \frac{2E_s}{N_0}, \quad (8.9)$$

тобто є фільтром, узгодженим зі смуговим сигналом  $s(t)$ .

Саме така схема узгодженої фільтрації смугових сигналів використовується в демодуляторах двовимірних сигналів цифрової модуляції для оптимальної фільтрації сигналів. При використанні двох таких схем з опорними коливаннями  $\cos 2\pi f_0 t$  і  $\sin 2\pi f_0 t$  відбувається розділення косинусного й синусного радіоімпульсів і їх наступне роздільне оброблення.

### **Контрольні питання**

1. Опишіть два способи узгодженої фільтрації радіоімпульсів.
2. Поясніть призначення схеми відновлення несінусного коливання.

## **9. ОПТИМАЛЬНІ ДЕМОДУЛЯТОРИ ОДНОМІРНИХ СМУГОВИХ СИГНАЛІВ**

Розглянемо одномірні сигнали. Це сигнали АМ-М і ФМ-2. Канальні символи описуються

$$s_i(t) = a_i \sqrt{2} A(t) \cos 2\pi f_0 t, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (9.1)$$

де  $\sqrt{2} A(t) \cos 2\pi f_0 t$  – радіоімпульс із певними часовими й спектральними характеристиками, максимальне значення й енергія якого рівні 1;

$a_i$  – коефіцієнти, що відображають  $n = \log_2 M$  переданих біт відповідно до модуляційного коду.

Вище було встановлено, що *основними елементами оптимального демодулятора є: узгоджений фільтр, дискретизатор і схема рішення*. Вище було сказано, що *оптимальну фільтрацію радіоімпульсів варто виконувати схемою, що містить синхронний детектор і низькочастотний узгоджений фільтр*. Для роботи синхронного детектора необхідне коливання  $\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t$ , що виробля-

ється схемою відновлення несінного коливання (ВН). Роботою дискретизатора управляють імпульси, що надходять від схеми тактової синхронізації (ТС). Тому схема демодулятора має вигляд, показаний на рис. 9.1.

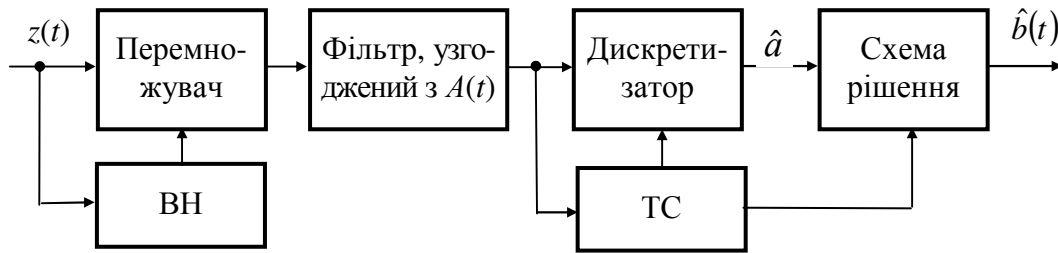


Рисунок 9.1 – Оптимальний демодулятор сигналів АМ-М і ФМ-2

Правило винесення рішення формулюється на основі розбивки простору каналних символів на  $M$  областей, що не перетинаються,  $s_i$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ ; кожна область  $s_i$  – це сукупність точок, які ближчі до сигналу  $s_i(t)$ , ніж до інших сигналів. Схема рішень видає рішення бітами відповідно до модуляційного коду.

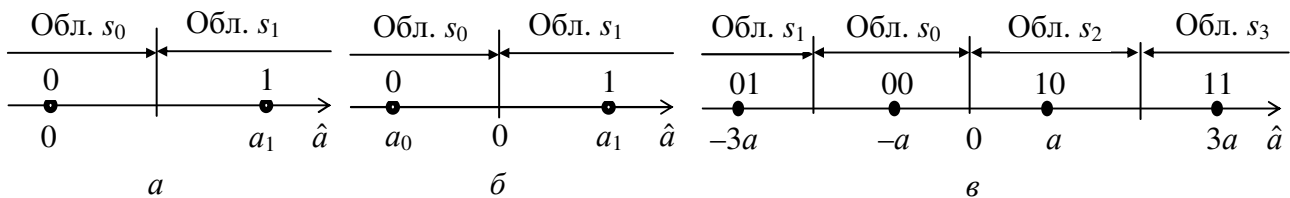


Рисунок 9.2 – Розбиття простору каналних символів на області сигналів:  
а – АМ-2; б – ФМ-2; в – АМ-4

### Контрольні питання

1. Поясніть призначення окремих блоків оптимального демодулятора сигналів АМ-М і ФМ-2.
2. Сформулюйте правило винесення рішення на основі розбивки простору каналних символів на  $M$  областей.

## 10. ОПТИМАЛЬНІ ДЕМОДУЛЯТОРИ ДВОВИМІРНИХ СМУГОВИХ СИГНАЛІВ

У випадку двовимірних сигналів ФМ-М ( $M \geq 4$ ), АФМ-М, КАМ-М каналні символи описуються

$$s_i(t) = a_{ci} \sqrt{2} A(t) \cos 2\pi f_0 t + a_{si} \sqrt{2} A(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad i = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (10.1)$$

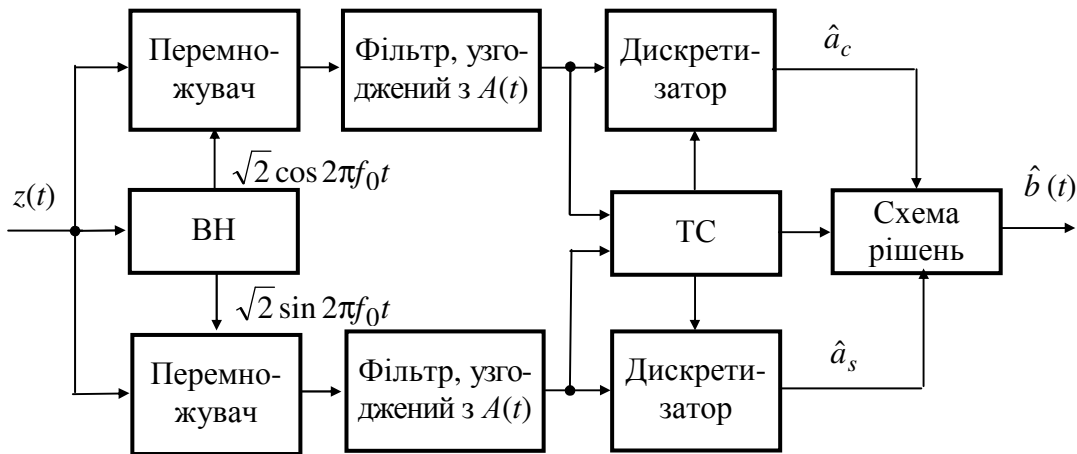
де  $a_{ci}$  й  $a_{si}$  – пари коефіцієнти, що відображають  $n = \log_2 M$  переданих біт відповідно до модуляційного коду.

Канальні символи складаються з косинусних і синусних імпульсів. Їх необхідно розділити. Це здійснюється за допомогою двох синхронних детекторів, що відрізняються опорними коливаннями – якщо опорне коливання  $\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t$ , то детектор не реагує на синусну складову вхідного сигналу, якщо опорне коливання  $\sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t$ , то детектор не реагує на косинусну складову вхідного сиг-

налу. Тому за допомогою двох детекторів здійснюється розділення косинусного й синусного імпульсів і наступна їхнє роздільне оброблення у двох підканалах демодулятора (рис. 10.1): узгоджена фільтрація й дискретизація. Оцінки коефіцієнтів  $\hat{a}_c$  і  $\hat{a}_s$  надходять на схему рішення.

Як і у випадку одномірних сигналів, правило винесення рішень формулюється на основі розбиття простору сигналів на  $M$  областей, що не перетинаються,  $s_i$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ ; кожна область  $s_i$  – це сукупність точок, які ближчі до сигналу  $s_i(t)$ , ніж до інших сигналів. Відмінність полягає в тому, що простір сигналів двовимірний. Якщо точка  $(\hat{a}_c, \hat{a}_s)$  потрапила в область сигналу  $s_i$ , то виноситься рішення про те, що передавався сигнал  $s_i$ . Схема рішення видає рішення бітами відповідно до модуляційного коду.

На рис. 10.2 показане розбиття просторів каналних символів на області сигналів. Границі областей показані жирними лініями. У випадку сигналу ФМ-4 області сигналів – 4 квадранти; у випадку сигналу ФМ-8 області сигналів – 8 секторів; у випадку сигналу КАМ-16 області сигналів утворені вертикальними й горизонтальними прямими. Завдяки простоті розбиття простору двовимірних сигналів КАМ- $M$  на області сигналів вони отримали найширше поширення серед сигналів АФМ- $M$ .



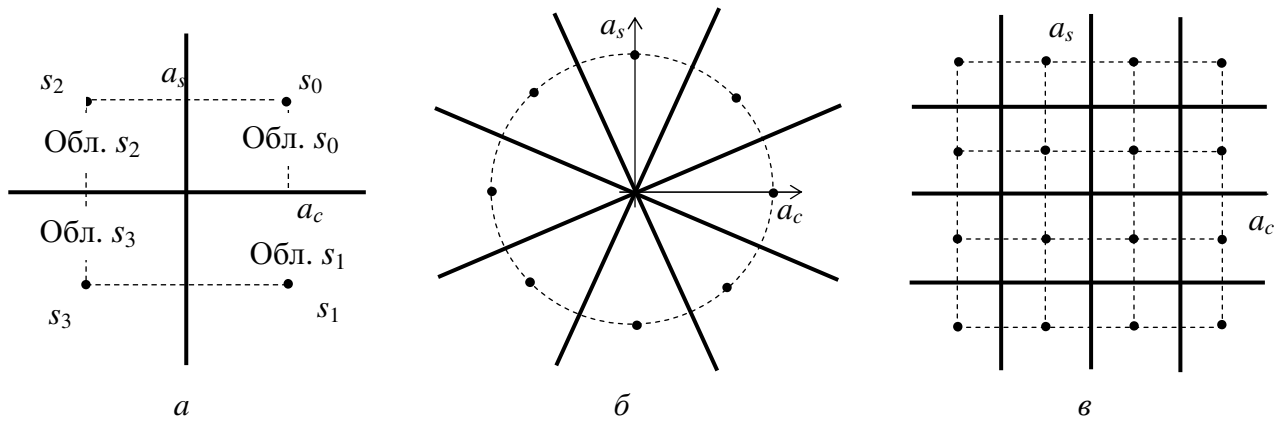
**Рисунок 10.1** – Оптимальний демодулятор сигналів ФМ- $M$  ( $M \geq 4$ ), АФМ- $M$ , КАМ- $M$

До двовимірних сигналів відносяться також сигнали ЧМ-2. Канальні символи описуються

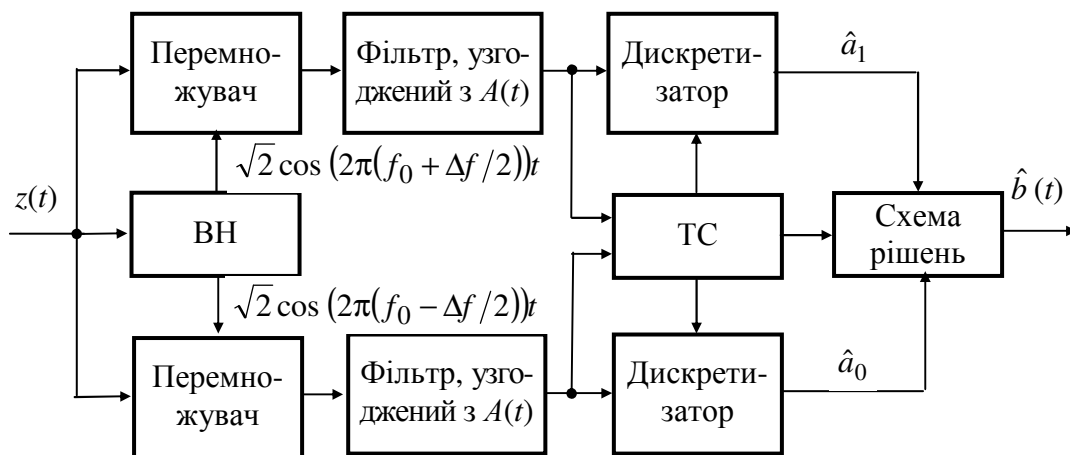
$$s_0(t) = a\sqrt{2}A(t)\cos(2\pi(f_0 - \Delta f/2)t), \quad s_1(t) = a\sqrt{2}A(t)\cos(2\pi(f_0 + \Delta f/2)t), \quad (10.2)$$

де  $\Delta f$  – рознесення частот.

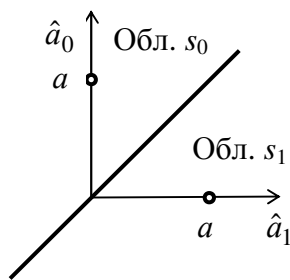
Якщо рознесення частот задовольняє умові  $\Delta f = k/(2T)$ , де  $k = 1, 2, \dots$ , то сигнали ортогональні, і вони можуть бути розділені синхронними детекторами (аналогічно розділенню косинусного й синусного імпульсів). Схема оптимального демодулятора сигналу ЧМ-2 подібна схемі, поданій на рис. 10.1, але відрізняється опорними коливаннями в синхронних детекторах (рис. 10.3).



**Рисунок 10.2** – Розбиття простору каналних символів на області сигналів:  
 а – ФМ-4; б – ФМ-8; в – КАМ-16



**Рисунок 10.3** – Оптимальний демодулятор сигналу ЧМ-2



**Рисунок 10.4** – Розбиття простору сигналів ЧМ-2 на області сигналів

На рис. 10.4 показане розбиття простору каналних символів ЧМ-2 на області сигналів. Границя областей показана жирною лінією. Із цього рисунку видно, що для винесення рішення про переданий сигнал досить порівняти оцінки амплітуд сигналів  $s_0(t)$  і  $s_1(t)$ : якщо  $\hat{a}_1 > \hat{a}_0$ , то виноситься рішення  $\hat{s}_1$  й навпаки.

### Контрольні питання

1. Поясніть призначення окремих блоків оптимального демодулятора двовимірних сигналів КАМ-М і ФМ-М.
2. Сформулюйте правило винесення рішення на основі розбиття простору каналних символів на  $M$  областей.

## 11. ІМОВІРНІСТЬ ПОМИЛКИ ПРИ ОПТИМАЛЬНІЙ ДЕМОДУЛЯЦІЇ ОДНОМІРНИХ СИГНАЛІВ ЦИФРОВОЇ МОДУЛЯЦІЇ

Як відмічалось у розд. 2, критерієм оптимальності демодулятора є мінімум повної ймовірності помилки рішення відносно канального символу  $P_{\text{пом}}$ . Але для користувачів кількісною мірою завадостійкості цифрової системи передавання є ймовірність помилки біта  $p$ . У двійкових системах передавання ймовірності  $P_{\text{пом}}$  і  $p$  збігаються. У разі багаторівневих видів модуляції спочатку знаходять  $P_{\text{пом}}$ , потім розраховують  $p$ , знаючи модуляційний код.

В.О. Котельников ввів термін «потенційна завадостійкість приймання» – це максимальна завадостійкість, що її забезпечує оптимальний демодулятор. По суті, це завадостійкість використовуваного модульованого сигналу при заданих характеристиках каналу зв'язку.

Аналіз ймовірності помилки почнемо з розгляду одномірних двійкових сигналів. Skorистаємося результатами, отриманими в розд. 2. На рис. 2.1, б для одномірних двійкових сигналів показано сигнальне сузір'я й умовні густини ймовірності оцінки  $\hat{a}$ . Було сформульоване правило винесення рішення за результатами порівняння оцінки  $\hat{a}$  із граничним значенням  $\lambda$ : якщо  $\hat{a} > \lambda$ , то передавався символ  $s_1(t)$ , а якщо  $\hat{a} < \lambda$ , то передавався символ  $s_0(t)$ . Оптимальне значення  $\lambda$  перебуває посередині між  $a_1$  і  $a_0$ :

$$\lambda = 0,5(a_1 + a_0). \quad (11.1)$$

При цьому ймовірності помилок при передаванні сигналів  $s_0(t)$  і  $s_1(t)$  однакові й визначаються виразом

$$P_{\text{пом}}(s_0) = P_{\text{пом}}(s_1) = \int_{\lambda}^{\infty} p(\hat{a}/s_0) d\hat{a} = p. \quad (11.2)$$

Умовна густина ймовірності  $p(\hat{a}/s_0)$  має нормальний розподіл ймовірностей з середнім значенням, рівним  $a_0$ . З урахуванням цього (11.2) запишеться

$$P_{\text{пом}}(s_0) = \int_{\lambda}^{\infty} p(\hat{a}/s_0) d\hat{a} = Q\left(\frac{\lambda - a_0}{\sigma_{\zeta}}\right), \quad (11.3)$$

де  $\sigma_{\zeta}$  – СКВ шуму на виході узгодженого фільтра, визначене раніше співвідношенням (5.14).

Прийmemo до розгляду віддаль між сигналами

$$d = (a_1 - a_0). \quad (11.4)$$

Із співвідношень (11.1) і (11.4) отримаємо

$$\lambda = a_0 + 0,5d \quad (11.5)$$

З урахуванням (5.14) і (11.5) співвідношення (11.3) надає ймовірність помилки канального символу в двійковій системі передавання

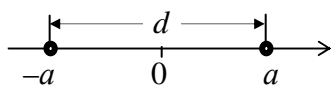
$$P_{\text{пом}}(2) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (11.6)$$

Із визначення гауссової  $Q$ -функції  $Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt$  випливає, що, чим

більше значення аргументу, тим менше значення функції  $Q(z)$ . Ймовірність помилки канального символу (11.6) буде зменшуватись при збільшенні віддалі між сигналами  $d$  і зменшенні питомої потужності шуму  $N_0$  на вході демодулятора.

Далі задача полягає в тому, щоб виразити віддаль між сигналами в (11.6) через фізичні параметри сигналу, що діє на вході демодулятора. Такими параметрами є: середня потужність модульованого сигналу  $P_s$  та швидкість цифрового сигналу  $R$  або обернена до неї величина – тривалість двійкового символу  $T_6 = 1/R$ .

**Вправа 11.1.** Знайдемо ймовірність помилки для одномірних двійкових сигналів ФМ-2 та АІМ-2. На рис. 11.1 подане сузір'я сигналів ФМ-2 та АІМ-2. Оскільки базисна функція нормована, то виконується рівність (5.12), і  $E_6 = a^2$ .



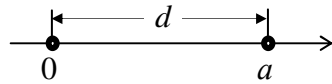
**Рисунок 11.1** – Сигнальні сузір'я сигналів ФМ-2 та АІМ-2

Звідси  $d = 2a = 2\sqrt{E_6}$ . Ймовірність помилки біта визначається

$$P_{\text{ФМ-2}} = P_{\text{АІМ-2}} = Q(\sqrt{2h_6}), \quad (11.7)$$

де  $h_6^2 = \frac{E_6}{N_0}$  – відношення сигнал/шум.

**Вправа 11.2.** Знайдемо ймовірність помилки для двійкового сигналу АМ-2. На рис. 11.2 подано сузір'я сигналу АМ-2. Оскільки базисна функція нормована, то виконується рівність (5.12), і  $E_1 = a^2$ , а  $E_0 = 0$ .  $E_6 = 0,5(E_1 + E_0) = 0,5a^2$ . Звідси



**Рисунок 11.2** – Сигнальне сузір'я сигналу АМ-2

$$d = a = \sqrt{2E_6}.$$

Ймовірність помилки біта визначається

$$P_{\text{АМ-2}} = Q(h_6). \quad (11.8)$$

Перейдемо до багатопозиційних систем передавання, тобто  $M > 2$ . Якщо канальні символи рівноймовірні, то ймовірність помилки канального символу визначається

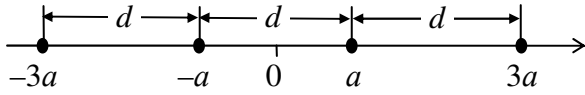
$$P_{\text{пом}} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_{\text{пом}}(s_i, s_j). \quad (11.9)$$

де  $P_{\text{пом}}(s_i, s_j)$  – ймовірність помилки у двійковій системі, що використовує сигнали  $s_i$  і  $s_j$ , а помилка полягає у винесенні рішення про передавання  $\hat{s}_j$ , якщо було передано  $s_i$ . Щоб спростити розрахунки, *ураховують переходи лише в найближчі сигнали* (це допустимо при високих відношеннях сигнал/шум, що відповідають ймовірності помилки  $P_{\text{пом}} < 10^{-2}$ ). Перехід від помилки канального

символу  $P_{\text{пом}}$  до помилки двійкового символу  $p$  виконується легко, якщо використовується модуляційний код Грея:

$$p = P_{\text{пом}} / n, \text{ де } n = \log_2 M. \quad (11.10)$$

**Вправа 11.3.** Знайдемо ймовірність помилки для багатопозиційних одномірних сигналів АМ- $M$  та АІМ- $M$ . На рис. 11.3 подано сузір'я сигналів АМ-4 та АІМ-4. Аналогічно будуються сузір'я при  $M > 4$ . Задачу будемо розв'язувати для довільного  $M$  (звичайно, що  $M$  – ціла степінь числа 2).



**Рисунок 11.3** – Сигнальні сузір'я сигналів АМ-4 та АІМ-4

Множники  $a_i$  набувають значення  $\pm a, \pm 3a, \dots, \pm (M-1)a$ . Визначимо середню енергію каналного символу

$$E_{\text{сеп}} = \frac{a^2 + (3a)^2 + \dots + ((M-1)a)^2}{M/2} = \frac{(M^2 - 1)2a^2}{3}. \quad (11.11)$$

Врахуємо, що

$$d = 2a \quad \text{і} \quad E_6 = \frac{E_{\text{сеп}}}{\log_2 M}. \quad (11.12)$$

На основі (11.11) і (11.12) отримаємо вираз для квадрату віддалі

$$d^2 = \frac{6 \cdot E_6 \cdot \log_2 M}{M^2 - 1}. \quad (11.13)$$

При аналізі ймовірності помилки досить врахувати переходи лише в найближчі каналні символи, тому

$$P_{\text{пом}} = 2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (11.14)$$

Враховуючи (11.10), (11.13) і (11.14) отримаємо вираз ймовірності помилки двійкового символу

$$P_{\text{АМ-}M} = P_{\text{АІМ-}M} = \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \cdot \log_2 M}{M^2 - 1}} \cdot h_6\right). \quad (11.15)$$

### Контрольні питання

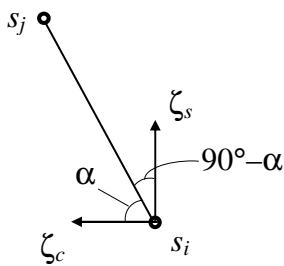
1. Запишіть і поясніть формулу ймовірності помилки каналного символу в двійковій системі передавання.
2. Поясніть, що являє собою величина  $h_6^2$ .
3. Поясніть, які спрощення допускають при аналізі завадостійкості багатопозиційних сигналів.

## 12. ІМОВІРНІСТЬ ПОМИЛКИ ПРИ ОПТИМАЛЬНІЙ ДЕМОДУЛЯЦІЇ ДВОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ ЦИФРОВОЇ МОДУЛЯЦІЇ

При аналізі завадостійкості двовимірних сигналів може виникнути одна з двох ситуацій.

1. Лінія, яка з'єднує сигнали  $s_i$  і  $s_j$ , що входять у формулу (11.9), збігається з однією з осей координат простору сигналів. У цьому разі ймовірність помилки у двійковій системі, що використовує сигнали  $s_i$  і  $s_j$ , визначається формулою (11.6), як і в разі одномірних сигналів.

2. Лінія, яка з'єднує сигнали  $s_i$  і  $s_j$ , що входять у формулу (11.9), не збігається ні з однією з осей координат простору сигналів (рис. 12.1). На цьому рисунку показані шумові компоненти оцінок:  $\hat{a}_c = a_{ci} + \zeta_c$  і  $\hat{a}_s = a_{si} + \zeta_s$ , де  $\zeta_c$  і  $\zeta_s$  – гауссові незалежні величини з нульовим середнім і СКВ  $\sigma = \sqrt{N_0/2}$  – формула (5.14). На основі рис. 12.1 умову виникнення помилки – винесення рішення про передавання  $\hat{s}_j$ , якщо було передано  $s_i$



**Рисунок 12.1** – Дія шумових компонент оцінок

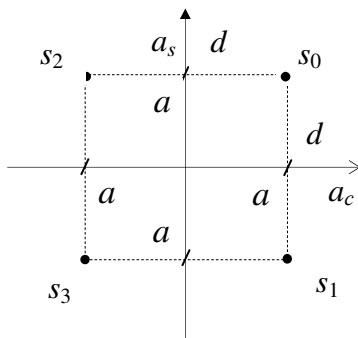
$$P_{\text{пом}}(s_i, s_j) = P \{ \eta > d/2 \}, \quad (12.1)$$

де  $\eta = \zeta_c \cos \alpha + \zeta_s \cos (90^\circ - \alpha)$  гауссова випадкова величина. Її дисперсія

$$\sigma_\eta^2 = \zeta_c^2 \cos^2 \alpha + \zeta_s^2 \sin^2 \alpha = \sigma^2 = N_0/2. \quad (12.2)$$

Таким чином, і у разі ситуації 2 ймовірність помилки (12.1) визначається формулою (11.6), як і в разі одномірних сигналів.

**Вправа 12.1.** Знайдемо ймовірність помилки для багатопозиційного двовимірного сигналу ФМ-4 (рис. 12.2): координати канальних символів  $\pm a$ , а віддалі між найближчими символами  $d = 2a$ . Енергії канальних символів однакові  $E = 2a^2 = d^2/2$ . Енергія сигналу на біт



**Рисунок 12.2** – Сигнальне сузір'я сигналу ФМ-4

$$E_6 = E/2 = d^2/4; \quad d = 2\sqrt{E_6}. \quad (12.3)$$

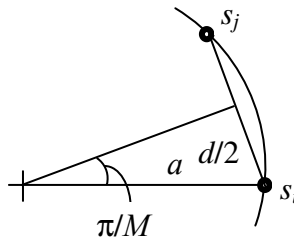
З рис. 12.2 видно, що досить врахувати переходи лише в два найближчі канальні символи, тому, враховуючи формулу (11.6)

$$P_{\text{пом}} = 2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (12.4)$$

Враховуючи формули (11.10) і (12.4), отримаємо вираз для ймовірності помилки двійкового символу при ФМ-4

$$p_{\text{ФМ-4}} = Q(\sqrt{2}h_6). \quad (12.5)$$

**Вправа 12.2.** Знайдемо ймовірність помилки для багатопозиційного сигналу ФМ-М. Точки сигнального сузір'я знаходяться на колі радіуса  $a$  з кутовим кроком  $2\pi/M$ . Ясно, що досить врахувати переходи лише в два найближчі каналні символи. На рис.12.3 подано фрагмент сузір'я сигналу ФМ-М. Виразимо віддаль між найближчими точками через радіус кола. Оскільки  $d/2 = a \cdot \sin(\pi/M)$ , то  $d = 2a \sin(\pi/M)$ . Енергії каналних символів однакові:  $E = a^2$ . Енергія сигналу на біт визначається  $E_6 = \frac{E}{\log_2 M} = \frac{a^2}{\log_2 M}$  і віддаль  $d = 2 \sin \frac{\pi}{M} \sqrt{E_6 \log_2 M}$ .

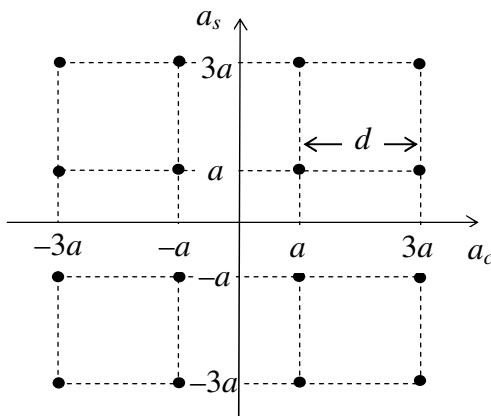


**Рисунок 12.3** – Фрагмент сигнального сузір'я сигналу ФМ-М

Використовуючи формули (11.10) і (12.4), отримаємо вираз для ймовірності помилки двійкового символу при ФМ-М для  $M \geq 4$

$$p_{\text{ФМ-М}} = \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sin \frac{\pi}{M} \sqrt{2 \log_2 M h_6}\right). \quad (12.5)$$

**Вправа 12.3.** Знайдемо ймовірність помилки для багатопозиційних двовимірних сигналів КАМ-16 (рис. 12.4). Візьмемо одну з чотирьох точок, що розміщені біля початку координат. Для будь-якої з них видно, що досить врахувати переходи лише в чотири найближчі каналні символи, тому, враховуючи формулу (11.6),



**Рисунок 12.4** – Сигнальне сузір'я сигналу КАМ-16

Знайдемо середню енергію каналного символу

$$P_{\text{пом}} = 4Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (12.6)$$

$$E_{\text{сеп}} = (4 \cdot 2a^2 + 8 \cdot 10a^2 + 4 \cdot 18a^2)/16 = 10a^2. \quad (12.7)$$

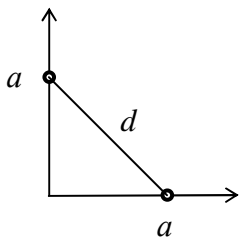
Енергія сигналу на біт визначається  $E_6 = \frac{E_{\text{сеп}}}{4} = \frac{5a^2}{2}$  і віддаль  $d = 2a = \sqrt{8E_6/5}$ .

Використовуючи формули (11.10) і (12.6), отримаємо вираз для ймовірності помилки двійкового символу при КАМ-16

$$p_{\text{КАМ-16}} = Q(0,89h_6). \quad (12.8)$$

Можна отримати загальну формулу ймовірності помилки біта для сигналів КАМ-М ( $M \geq 16$ ) за умови, що  $\log_2 M$  є парним числом

$$P_{\text{КАМ-M}} = \frac{4}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}} \cdot h_6\right). \quad (12.9)$$

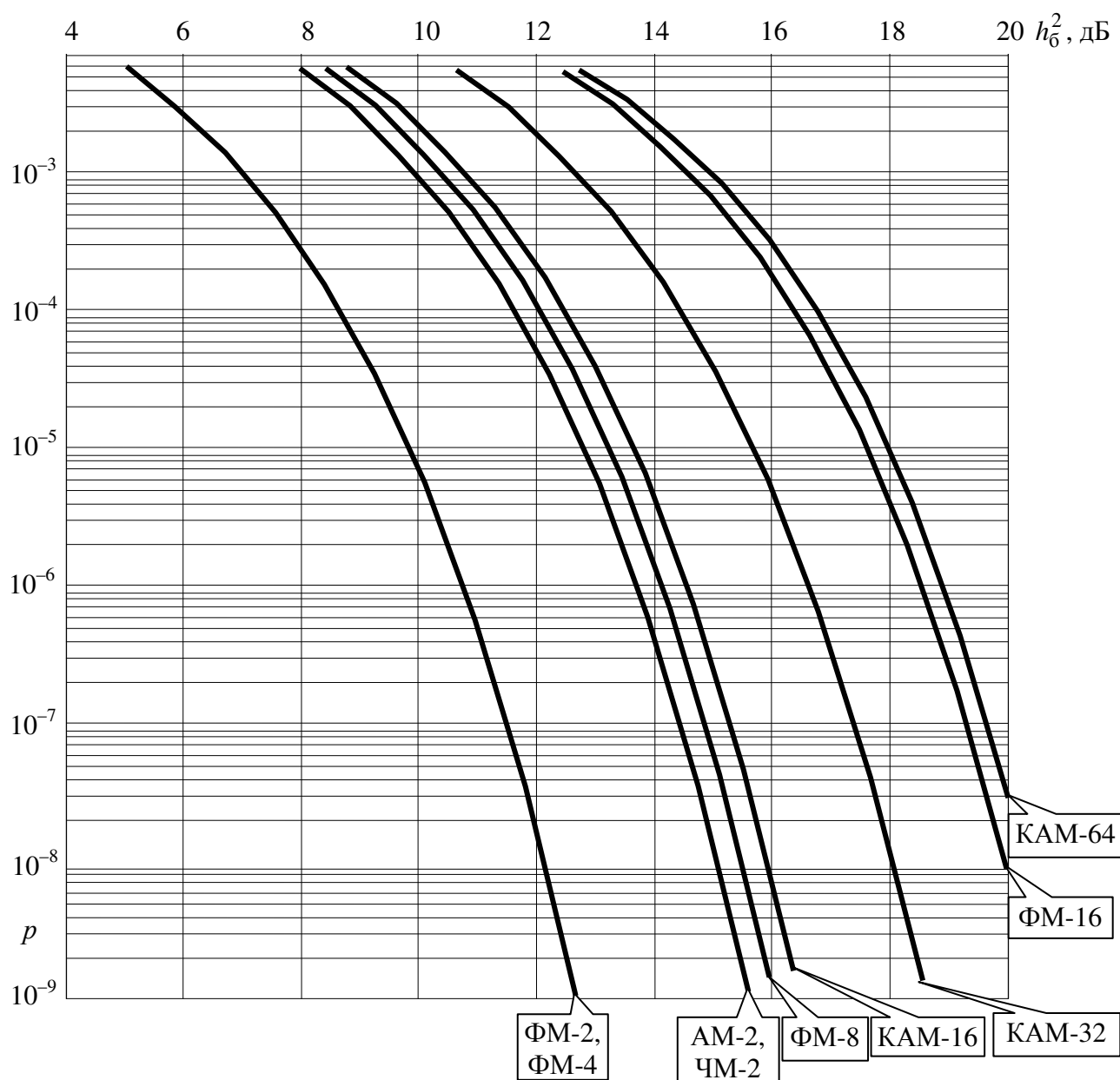


**Вправа 12.4.** Знайдемо ймовірність помилки для двійкового сигналу ЧМ-2 (рис. 12.5): координати канальних символів дорівнюють  $a$ , а віддаль між символами  $d = \sqrt{2} a$ . Енергії канальних символів однакові  $E = a^2 = d^2/2 = E_6$ .

**Рисунок 12.5** – Сигнальне сузір'я сигналу ЧМ-2

За формулою (11.6) отримаємо

$$P_{\text{ЧМ-2}} = Q(h_6). \quad (12.10)$$



**Рисунок 12.6** – Завадостійкість оптимальних демодуляторів сигналів цифрової модуляції

Отримані в розд. 11 і 12 формули дозволяють визначити ймовірності помилки біта  $p$  при заданому відношенні сигнал/шум  $h_0^2$  або необхідне відношення сигнал/шум при заданій ймовірності помилки біта. Аналіз завадостійкості зручно проводити, використовуючи графіки залежності  $p = f(h_0^2)$  (рис. 12.6). Під час побудови графіка відношення сигнал/шум прийнято виражати в децибелах і використовувати для нього лінійний масштаб. Для ймовірності помилки використовують логарифмічний масштаб.

З поданих на рис. 12.6 даних випливає, що найвища завадостійкість властива сигналам ФМ-2 і ФМ-4.

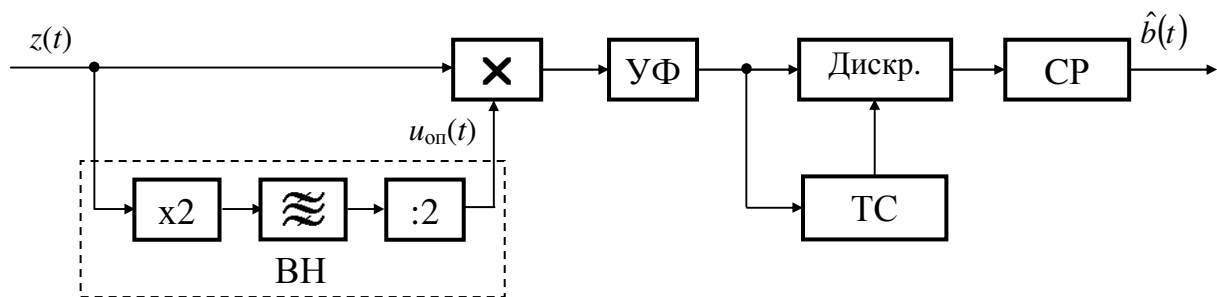
### Контрольні питання

1. Запишіть і поясніть формули ймовірності помилки двійкового символу сигналів ФМ-4, ФМ-8, КАМ-16. Порівняйте завадостійкість.
2. Поясніть, чому з ростом числа позицій сигналу погіршується завадостійкість.

## 13. СИСТЕМИ ВІДНОВЛЕННЯ НЕСІВНОГО КОЛИВАННЯ

Система відновлення несівного коливання (ВН) демодуляторів смугових сигналів цифрової модуляції призначена для формування опорного гармонійного коливання, фаза якого збігається з фазою несівної, на основі якої сформований сигнал, що демодулюється.

Уже в 30-і роки минулого століття стало ясно, що сигнали ФМ-2 мають найвищу завадостійкість. Для застосування цих сигналів у системах передавання необхідно було вирішити задачу відновлення несівного (опорного) коливання в демодуляторі, яке необхідне для роботи синхронного детектора. У ті роки була запропонована *схема відновлення несівного коливання із множенням частоти на 2* (рис. 13.1).



**Рисунок 13.1** – Схема демодулятора сигналу ФМ-2 з відновленням несівного коливання за методом множення частоти на 2

У випадку ФМ-2  $s_i(t) = a_i A(t) \cos 2\pi f_0 t$ ;  $i = 0, 1$ . Коефіцієнти  $a_i$  задані сузір'ям сигналу (рис. 11.1). Канальні символи:

$$s_1(t) = aA(t) \cos 2\pi f_0 t; \quad s_0(t) = aA(t) \cos(2\pi f_0 t + \pi). \quad (13.1)$$

Багато десятиліть використовувалися «слабко» фільтровані імпульси  $A(t)$ , які були близькі за формою до П-імпульсу на інтервалі тривалістю  $T$

$$A(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T. \end{cases} \quad (13.2)$$

Після множення частоти на 2, як сигнал  $s_1(t)$ , так і сигнал  $s_0(t)$  дають  $a^2 \cos 2\pi 2f_0 t$ . Вузькосмуговий фільтр має середню частоту смуги пропускання  $2f_0$ . Він призначений для послаблення завад. Дільник частоти на 2 може видати одне із двох можливих опорних коливань:

- випадок 1:  $u_{\text{оп1}}(t) = \cos 2\pi f_0 t$ ;
- випадок 2:  $u_{\text{оп2}}(t) = \cos(2\pi f_0 t + \pi)$ .

Обидва коливання можливі, тому що результат залежить від того, які початкові умови складуться в схемі дільника. Говорять, що опорне коливання має *невизначеність фази* порядку  $180^\circ$ .

У випадку 1 реалізується алгоритм оптимальної демодуляції сигналу ФМ-2. У випадку 2 на виході перемножувача, а потім і узгодженого фільтра, і дискретизатора будуть напруги, протилежні тим, які мають місце у випадку 1. Схема рішення буде виносити інверсні рішення: замість 1 видає 0 і навпаки. Таке явище одержало назву інверсна (зворотна) робота демодулятора. Виявилось, що й у процесі роботи демодулятора можуть відбуватися випадкові стрибкоподібні переходи від коливання  $u_{\text{оп1}}(t)$  до коливання  $u_{\text{оп2}}(t)$  і навпаки.

У демодуляторі сигналу ФМ-4 необхідно використовувати помножувач частоти на 4, фільтр із середньою частотою смуги пропускання  $4f_0$  і дільник частоти на 4. Після дільника частоти виникає одне з опорних коливань, що відрізняються по фазі із кроком  $90^\circ$ . Має місце невизначеність фази опорного коливання порядку  $90^\circ$ .

Усунути прояв невизначеності фази опорного коливання в демодуляторі вдається при використанні різницевого (відносного) кодування. Такі методи передавання одержали назву фазорізницевої (відносної фазової) модуляції.

Вище розглянута система ВН зі зведенням у степінь. Проте, вона добре працює, коли амплітуда імпульсу  $A(t)$  близька до прямокутної форми. Нині використовуються імпульси Найквіста – імпульси з суттєво згладженою формою  $A(t)$ . При такій формі імпульсу система ВН зі зведенням у ступінь працює погано.

Опорне коливання необхідне для роботи синхронного детектора (рис. 13.2). Нехай на вхід детектора надходить сигнал ФМ-2. Канальний символ описується

$$s_i(t) = a_i \sqrt{2} A(t) \cos 2\pi f_0 t. \quad (13.3)$$

Якщо фаза коливання від генератора

$$u_{\text{оп}}(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t + \Delta\phi). \quad (13.4)$$

відрізняється від фази несівної вхідного сигналу на величину  $\Delta\phi$ , то сигнал на виході синхронного детектора одержує множник  $\cos\Delta\phi$ :

$$u_{\text{вих}}(t) = a_i A(t) \cos \Delta\phi. \quad (13.5)$$

Оскільки максимальне значення косинуса дорівнює одиниці й досягається лише у випадку  $\Delta\varphi = 0$ , наявність різниці фаз призводить до зменшення рівня сигналу на виході детектора. Якщо ж  $\Delta\varphi = \pi/2$ , то сигнал на виході детектора взагалі відсутній:  $u_{\text{вих}}(t) \equiv 0$ .

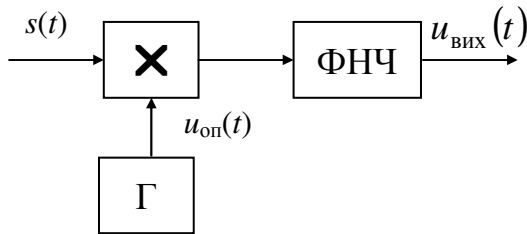


Рисунок 13.2 – Синхронний детектор

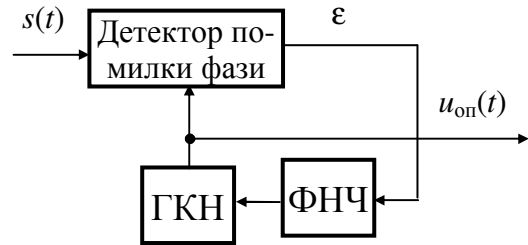


Рисунок 13.3 – Схема ФАПЧ

Нині система ВН – це *система фазового автоматичного підстроювання частоти* (ФАПЧ) (рис. 13.3) зі спеціальним детектором помилки фази, яка здатна працювати в умовах відсутності несінвної в спектрі сигналу. Тут ГКН – генератор, керований напругою. Коли є напруга помилки фази  $\varepsilon$ , цією напругою підлаштовується частота й фаза колювання, що виробляється ГКНом, так, щоб зменшити величину помилки фази.

Розглянемо побудову детектора помилки фази у випадку сигналу ФМ-2. Схема детектора містить ще один додатковий синхронний детектор, опорним колюванням якого є  $\sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t + \Delta\varphi)$ . Нагадаємо, що роботу синхронного детектора можна розглядати як обчислення проекції  $s(t)$  на  $u_{\text{оп}}(t)$ . Два синхронних детектори відрізняються опорними колюваннями, зсунутими по фазі на  $90^\circ$ . Тому одержувані напруги з виходів синхронних детекторів є квадратурними складовими сигналу, що детектується.

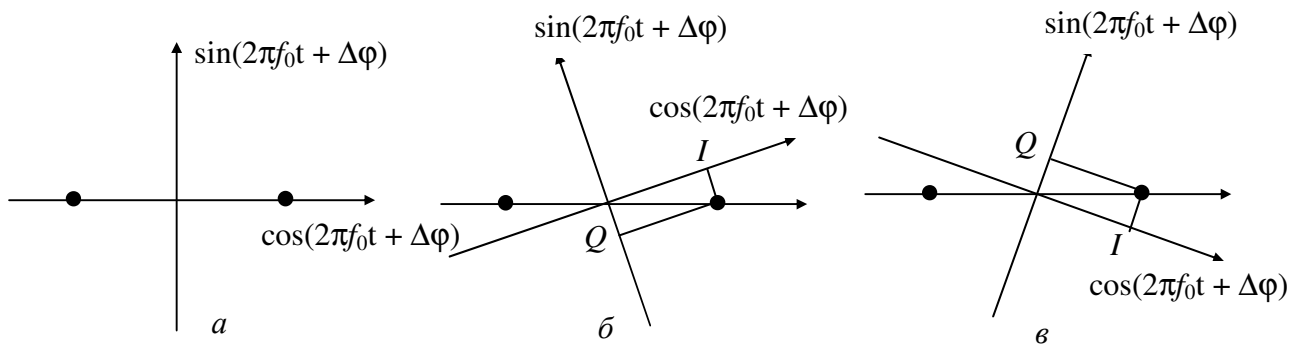
На рис. 13.4 показане сузір'я сигналу ФМ-2, що демодулюється, і обчислені квадратурні складові в момент відліку за умови, що демодулюється каналний символ з амплітудою  $a$ :  $I$  – синфазна складова,  $Q$  – квадратурна складова. На рис. 13.4, *а* помилка фази опорного колювання  $\Delta\varphi = 0$ ; при цьому синхронні детектори обчислюють  $I = a$ ,  $Q = 0$ . На рис. 13.4, *б* помилка фази опорного колювання  $\Delta\varphi > 0$ ; при цьому синхронні детектори обчислюють  $I = a \cdot \cos\Delta\varphi$ ,  $Q < 0$ . На рис. 13.4, *в* помилка фази опорного колювання  $\Delta\varphi < 0$ ; при цьому синхронні детектори обчислюють  $I = a \cdot \cos\Delta\varphi$ ,  $Q > 0$ .

Бачимо, що значення  $Q$  за знаком відповідає помилці фази: а саме, якщо  $Q < 0$ , то  $\Delta\varphi > 0$  і необхідно зменшувати частоту й фазу ГКН, якщо ж  $Q > 0$ , то  $\Delta\varphi < 0$  і необхідно збільшувати частоту й фазу ГКН. Таким чином, значення  $Q$  можна прийняти у якості помилки фази  $\varepsilon$ . Але ситуація зі знаком  $Q$  протилежна при демодуляції каналного символу з амплітудою  $-a$ .

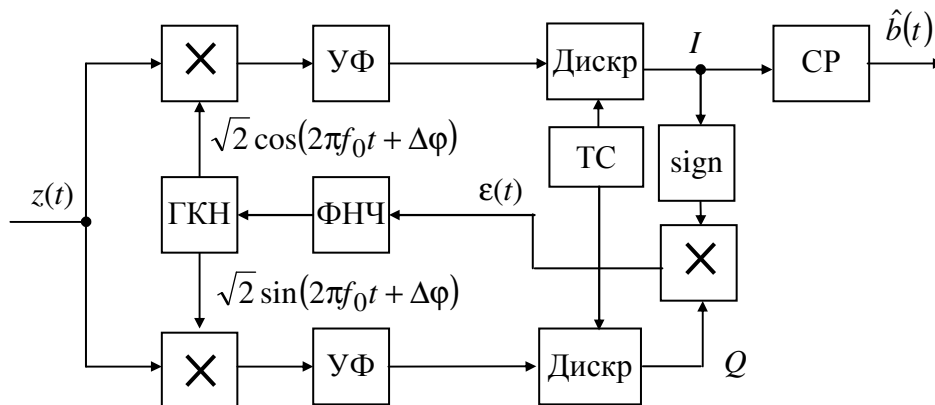
Костас запропонував у якості помилки фази опорного колювання в демодуляторі сигналу ФМ-2 використовувати

$$\varepsilon = Q \cdot \text{sign}(I). \quad (13.6)$$

На рис. 13.5 показана схема демодулятора сигнала ФМ-2 з розкритою схемою відновлення несінного коливання.



**Рисунок 13.4** – Обчислення проєкцій сигналу, що демодулюється на опорні коливання:  
 $a - \Delta\varphi = 0$ ;  $б - \Delta\varphi > 0$ ;  $в - \Delta\varphi < 0$



**Рисунок 13.5** – Демодулятор сигналу ФМ-2 з системою ВН

Для побудови системи ВН демодулятора сигналу ФМ-4 використовується *детектор помилки фази, що обчислюється за алгоритмом Костаса*

$$\varepsilon = Q \cdot \text{sign}(I) - I \cdot \text{sign}(Q). \quad (13.7)$$

Тут ознакою помилки фази опорного коливання є нерівність модулів квадратурних складових  $I$  і  $Q$ . Такий же алгоритм обчислення помилки фази використовується і в демодуляторах сигналів КАМ-М.

### Контрольні питання

1. Поясніть роботу схеми відновлення несінного коливання із множенням частоти.
2. Поясніть, що таке невизначеність фази опорного коливання.
3. Поясніть, що таке детектор помилки Костаса.

## 14. ФАЗОРИЗНИЦЕВА МОДУЛЯЦІЯ

Усунути інверсну роботу демодулятора ФМ-2 дозволяє перехід до різницевого методу передавання, при якому передані двійкові символи (біти) відображаються не в початковій фазі каналних символів (як при ФМ-2), а в *різницю фаз сусідніх за часом каналних символів*. Формування модульованого сигналу в такий спосіб називається *фазорізницевою модуляцією* – ФРМ-2.

Принцип формування й демодуляції сигналів ФРМ-2 зображено на рис. 14.1. Модулятор сигналу ФРМ-2 складається з різницевого кодера (РК) і модулятора сигналу ФМ-2, а демодулятор сигналу ФРМ-2 – з демодулятора сигналу ФМ-2 і різницевого декодера (РД).

*Різницевий кодер* модему ФРМ-2 працює за правилом

$$b_k^p = b_k \oplus b_{k-1}^p, \quad (14.1)$$

де  $b_k$  – біт 1 або 0 на вході кодера на  $k$ -му тактовому інтервалі;

$b_k^p$  – символ 1 або 0 на виході кодера на  $k$ -му тактовому інтервалі;

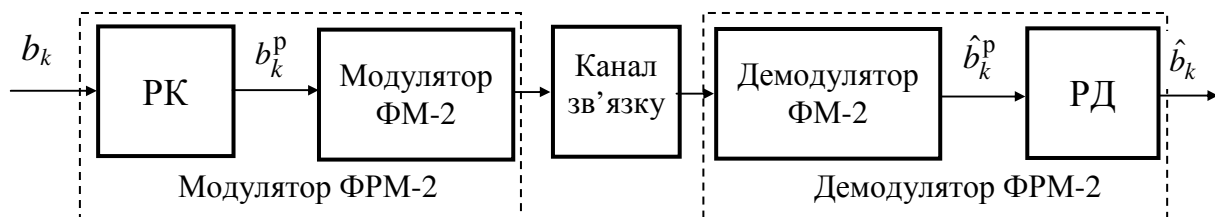
$\oplus$  – знак додавання за модулем 2.

*Різницевий декодер* модему ФРМ-2 працює за правилом

$$\hat{b}_k = \hat{b}_k^p \oplus \hat{b}_{k-1}^p, \quad (14.2)$$

де  $\hat{b}_k^p$  – символ 1 або 0 на вході різницевого декодера на  $k$ -му тактовому інтервалі;

$\hat{b}_k$  – біт 1 або 0 на виході різницевого декодера на  $k$ -му тактовому інтервалі.



**Рисунок 14.1** – Принцип формування й демодуляції сигналу ФРМ-2

Початкова фаза відновленого несінного коливання в демодуляторі може збігатися з початковою фазою сигналу ФМ-2, що демодулюється, або відрізнятися від неї на кут  $\pi$ . У загальному вигляді можна записати, що фаза опорного коливання здобуває зсув  $p \cdot \pi$  ( $p = 0$  або  $1$  – значення, що описує зсув фази). Вважаючи, що завад в каналі зв'язку немає, символи на виході демодулятора ФМ-2 будуть визначатися співвідношенням

$$\hat{b}_k^p = b_k^p \oplus p \quad (14.3)$$

для всіх  $k$ . Підставивши вираз (14.3) у формулу (14.1), легко переконатися, що біт  $\hat{b}_k$  не залежить від  $p$ .

Приклад кодування й декодування довільної послідовності біт подано у табл. 14.1. Таблиця ілюструє кодування, починаючи з  $k = 1$ . Оскільки, під час кодування на  $k$ -ому тактовому інтервалі бере участь попередній кодований символ, то в другому рядку довільно прийнято  $b_0^p = 0$ . Рядок 3 повторює рядок 2 – демодуляція без зворотної роботи. Результат декодування подано у рядку 4. Рядок 5 містить інверсію рядка 2 – демодуляція зі зворотною роботою. Після декодування відновлений сигнал (рядок 6) збігається з початковим сигналом (рядок 1). Таким чином, передавання з різницеvim кодуванням усуває зворотну роботу демодулятора ФМ-2.

**Таблиця 14.1** – Приклад різницевого кодування й декодування

| №<br>рядка |                        | $k$ |   |   |   |   |   |   |
|------------|------------------------|-----|---|---|---|---|---|---|
|            |                        | 0   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1          | $b_k$                  |     | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2          | $b_k^{\text{p}}$       | 0   | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3          | $\hat{b}_k^{\text{p}}$ | 0   | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4          | $\hat{b}_k$            |     | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5          | $\hat{b}_k^{\text{p}}$ | 1   | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6          | $\hat{b}_k$            |     | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

ють із  $M$ -ічними символами. Перехід від біт цифрового сигналу до  $M$ -ічних канальних символів відбувається в кодері модуляційного коду.

При передаванні цифрових сигналів сигналами ФМ-4 використовуються 4 канальні символи

$$s_i(t) = aA(t)\sqrt{2} \sin\left(2\pi f_0 t + q_i \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (14.4)$$

де  $q_i$  – четвіркові символи, що набувають значення 0, 1, 2, 3;

$q_i \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  – початкові фази канальних символів, що набувають значення  $\pi/4$ ,  $3\pi/4$ ,  $5\pi/4$ ,  $7\pi/4$ .

Початкова фаза відновленого в демодуляторі опорного коливання однозначно визначеною бути не може – вона визначається з точністю до  $\pi/2$ . Це обумовлено симетрією сузір'я сигналу ФМ-4: при демодуляції невідомо, який із чотирьох сигналів уважати “нульовим”.

Щоб усунути вплив невизначеності фази опорного коливання при демодуляції сигналу ФМ-4, переходять до модуляції ФРМ-4. Принцип формування й демодуляції сигналів ФРМ-4 зображено на рис. 14.2. Модулятор сигналу ФРМ-4 складається з кодера модуляційного коду, різницевого кодера й модулятора сигналу ФМ-4, а демодулятор сигналу ФРМ-4 – з демодулятора сигналу ФМ-4, різницевого декодера й декодера модуляційного коду. На цьому малюнку й нижче по тексту нижній індекс  $k$  визначає номер тактового інтервалу, а зсув  $q$  може набувати значення 0, 1, 2 і 3.

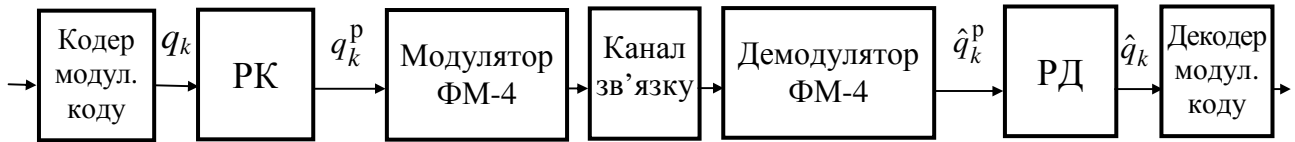


Рисунок 14.2 – Принцип формування й демодуляції сигналу ФРМ-4

Різницевий кодер при ФРМ-4 реалізує правило кодування четвіркових символів:

$$q_k^p = q_k \oplus q_{k-1}^p, \quad (14.5)$$

де  $\oplus$  – додавання за модулем 4 (залишок від ділення на 4 арифметичної суми доданків).

Різницевий декодер реалізує правило декодування четвіркових символів:

$$\hat{q}_k = \hat{q}_k^p \ominus \hat{q}_{k-1}^p, \quad (14.6)$$

де  $\ominus$  – віднімання за модулем 4 (залишок від ділення різниці на 4).

Початкова фаза опорного коливання в демодуляторі може збігатися з початковою фазою сигналу ФМ-4, що демодулюється, або відрізнитися від неї на кут  $p \cdot \pi/2$  ( $p = 0, 1, 2$  або  $3$  – значення, що описує зсув фази). Вважаючи, що завади в каналі зв'язку немає, символи на виході демодулятора ФМ-4 будуть визначатися співвідношенням

$$\hat{q}_k^p = q_k^p \oplus p \quad (14.7)$$

для всіх  $k$ . Таким чином, через невизначеність фази когерентного коливання в демодуляторі сигналу ФМ-4 всі символи  $\hat{q}_k^p$  одержують приріст  $p$ . Якщо підставити вираз (14.7) у формулу (14.6), то легко переконатися, що символ  $\hat{b}_k$  не залежить від  $p$ .

При ФРМ-4 завдяки відніманню в декодері значення  $p$  невизначеність фази виключається. Оскільки, для вилучення невизначеності фази значення  $\hat{q}_k$  визначається як різниця двох сусідніх символів, то при кодуванні значення  $q_k^p$  формується як сума попереднього значення  $q_{k-1}^p$  й переданого символу  $q_k$ .

Правила додавання за модулем 4 подані в табл. 14.2, а правила віднімання за модулем 4 – у табл. 14.3.

Таблиця 14.2 – Додавання за mod 4 ( $a \oplus b$ )

| $a$ | $b$ |   |   |   |
|-----|-----|---|---|---|
|     | 0   | 1 | 2 | 3 |
| 0   | 0   | 1 | 2 | 3 |
| 1   | 1   | 2 | 3 | 0 |
| 2   | 2   | 3 | 0 | 1 |
| 3   | 3   | 0 | 1 | 2 |

Таблиця 14.3 – Віднімання за mod 4 ( $a \ominus b$ )

| $a$ | $b$ |   |   |   |
|-----|-----|---|---|---|
|     | 0   | 1 | 2 | 3 |
| 0   | 0   | 3 | 2 | 1 |
| 1   | 1   | 0 | 3 | 2 |
| 2   | 2   | 1 | 0 | 3 |
| 3   | 3   | 2 | 1 | 0 |

**Таблиця 14.4** – Модуляційний код Грея

| Пара біт<br>$b_1b_2$ | Четвірковий<br>символ $q$ | Початкова<br>фаза сигналу |
|----------------------|---------------------------|---------------------------|
| 00                   | 0                         | $45^\circ$                |
| 10                   | 1                         | $135^\circ$               |
| 11                   | 2                         | $225^\circ$               |
| 01                   | 3                         | $315^\circ$               |

Під час передавання цифрового сигналу сигналом ФМ-4 перехід від пар біт  $b_1b_2$  до четвіркових символів  $q$  на кожному тактовому інтервалі здійснюється відповідно до модуляційного коду Грея, приклад якого подано у табл. 14.4.

Оскільки, при демодуляції сигналу ФМ-4 найбільш імовірні помилки – це переходи у найближчі сигнали, то при використанні коду Грея такі переходи призводять до помилки лише в одному біті, що мінімізує ймовірність помилки біта.

У табл. 14.5 подано приклад кодування й декодування при передаванні цифрового сигналу методом ФРМ-4. Перехід від пар біт до четвіркових символів здійснюється відповідно до табл. 14.4. Прийнято, що значення  $p = 3$ , а  $q_0^p = 1$ . З даних табл. 14.5 випливає, що прийняті біти збігаються з переданими.

Припустимо, що через дію завади демодулятор ФМ-2 виносить помилкове рішення на  $k$ -му тактовому інтервалі. Кожний символ, що надходить на вхід різницевого декодера, при декодуванні використовується двічі – на  $k$ -му і на  $(k + 1)$ -му тактових інтервалах. Тому, якщо рішення демодулятора на  $(k - 1)$ -му і на  $(k + 1)$ -м тактових інтервалах вірні, то на виході різницевого декодера з'явиться два помилкових біти. Отже, різницевий декодер розмножує помилки.

*Імовірність помилки біта* при передаванні методами ФРМ-2 і ФРМ-4 в області малих значень імовірності помилки ( $p \ll 1$ ) запишеться

$$p_{\text{ФРМ-2}} = p_{\text{ФРМ-4}} = 2Q(\sqrt{2}h_0). \quad (14.8)$$

На закінчення розгляду ФРМ-М відмітимо, що в російськомовній літературі такий спосіб передавання називають також відносною фазовою модуляцією (ВФМ-М).

**Таблиця 14.5** – Приклад різницевого кодування й декодування четвіркових символів

| Номер тактового інтервалу $k$        | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
|--------------------------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Послідовність переданих біт          |   | 01 | 00 | 11 | 01 | 10 | 11 | 10 | 00 |
| Послідовність символів $q_k$         |   | 3  | 0  | 2  | 3  | 1  | 2  | 1  | 0  |
| Послідовність символів $q_k^p$       | 1 | 0  | 0  | 2  | 1  | 2  | 0  | 1  | 1  |
| Послідовність символів $\hat{q}_k^p$ | 0 | 3  | 3  | 1  | 0  | 1  | 3  | 0  | 0  |
| Послідовність символів $\hat{q}_k$   |   | 3  | 0  | 2  | 3  | 1  | 2  | 1  | 0  |
| Послідовність прийнятих біт          |   | 01 | 00 | 11 | 01 | 10 | 11 | 10 | 00 |

### Контрольні питання

1. Поясніть принцип формування й демодуляції сигналу ФРМ-2.
2. Поясніть принцип формування й демодуляції сигналу ФРМ-4.
3. Як визначається завадостійкість систем передавання методами ФРМ-2 і ФРМ-4?

## 15. НЕКОГЕРЕНТНА ДЕМОДУЛЯЦІЯ СИГНАЛІВ ЦИФРОВОЇ МОДУЛЯЦІЇ

Дотепер ми розглядали схеми демодуляторів, які реалізують *когерентну демодуляцію*. Демодуляція сигналів називається *некогерентною*, якщо в демодуляторі *не використовуються відомості про початкові фази сигналів, що демодулюються*. Очевидно, що це можливо, принаймні, при демодуляції сигналів АМ-2 і ЧМ-2, у яких інформація закладена в амплітуді й частоті каналних символів, відповідно, а не в їх початкових фазах.

Ціль використання некогерентної демодуляції – *спрощення схеми демодулятора* завдяки відсутності схеми відновлення несінного колювання. Так, у випадку сигналу АМ-2 схема демодулятора має вигляд (рис. 15.1).

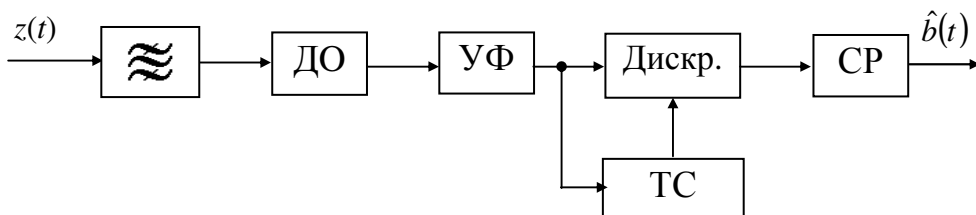


Рисунок 15.1 – Схема некогерентного демодулятора сигналу АМ-2

Принципова відмінність схеми некогерентного демодулятора (рис. 15.1) від когерентного – відсутність синхронного детектора, що містить схему відновлення несінного колювання. Замість синхронного детектора використовується детектор обвідної (ДО). При аналоговій реалізації схема ДО виконувалася дуже просто (рис. 15.2). При процесорній реалізації обвідна обчислюється як корінь квадратний із суми квадратів квадратурних складових сигналу. Смуговий фільтр до детектора повинен пропускати сигнал і послабляти завади на частотах, які перебувають поза смугою частот сигналу. Інші елементи схеми такі ж, як і в схемі когерентного демодулятора.

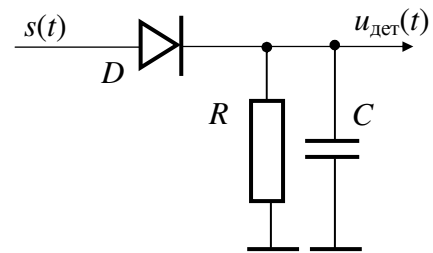


Рисунок 15.2 – Детектор обвідної

Схема, подана на рис. 15.1, може використовуватися й для демодуляції сигналів АМ- $M$ , коли  $M > 2$ , але з обмеженням на параметри: інформаційні коефіцієнти  $a_i$  повинні бути невід'ємними, тому що вихідна напруга ДО не залежить від фази каналного символу. Сузір'я сигналу АМ-4, для якого можлива некогерентна демодуляція, подано на рис. 15.3.

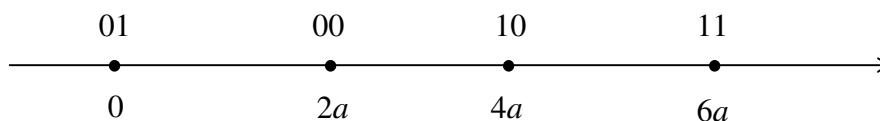


Рисунок 15.3 – Сузір'я сигналу АМ-4

Аналіз завадостійкості системи передавання при некогерентній демодуляції утруднений, тому що *розподіл завади на виході ДО істотно відрізняється*

від нормального. Однозначно можна сказати, що відношення сигнал/шум на виході ДО в 2 рази менше, ніж на виході синхронного детектора. Остаточна формула для ймовірності помилки біта на виході демодулятора

$$p_{\text{АМ-2 нкг}} = \frac{1}{2} \exp(-h_0^2 / 2). \quad (15.1)$$

Канальні символи (радіоімпульси) при ЧМ-2 відрізняються частотами:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= a\sqrt{2}A(t)\cos 2\pi f_1 t, \\ s_0(t) &= a\sqrt{2}A(t)\cos 2\pi f_0 t. \end{aligned} \quad (15.2)$$

У схемі когерентного демодулятора сигналу ЧМ-2 канальні символи розділяються синхронними детекторами. У схемі некогерентного демодулятора для їх розділення використовуються смугові фільтри (рис. 15.4).

Смугові фільтри мають середні частоти смуг пропускання  $f_1$  і  $f_0$ . Схема праворуч від детекторів обвідної у точності така ж як і в схемі когерентного демодулятора. Формула для ймовірності помилки біта на виході демодулятора ЧМ-2 така ж, як і при АМ-2:

$$p_{\text{ЧМ-2 нкг}} = \frac{1}{2} \exp(-h_0^2 / 2). \quad (15.3)$$

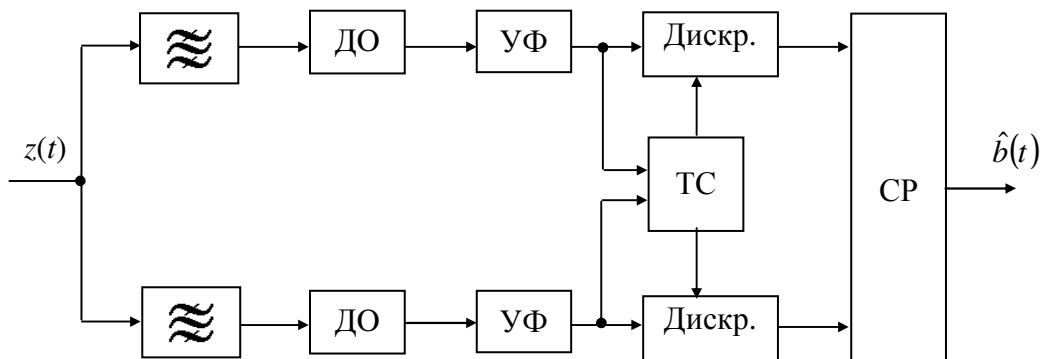


Рисунок 15.4 – Некогерентний демодулятор сигналу ЧМ-2

Можлива некогерентна демодуляція і сигналу ФРМ-2 у тому розумінні як визначено вище поняття «некогерентна демодуляція» на початку підрозділу. При ФРМ-2 інформація закладена не в початкових фазах канальних символів, а в різницю фаз сусідніх у часі символів. Тому можна, не знаючи початкові фази канальних символів, виконати демодуляцію шляхом порівняння фаз сусідніх символів. Схема некогерентного модулятора сигналу ФРМ-2 подана на рис. 15.5.

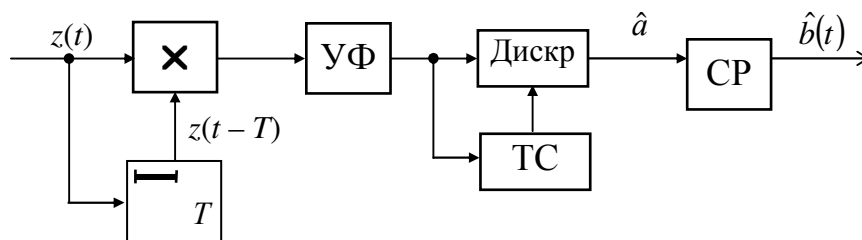


Рисунок 15.5 – Некогерентний демодулятор сигналу ФРМ-2

У схемі демодулятора використовується схема затримки на тактовий інтервал. Можна вважати, що на перемножувачі виконано синхронний детектор, де опорним коливанням є попередній канальний символ. Полярність напруги на виході перемножувача (і на виходах наступних блоків) залежить від різниці фаз коливань, що перемножуються:

випадок 1 – однакові фази сусідніх символів:

$$a\sqrt{2}A(t)\cos 2\pi f_0 t \cdot a\sqrt{2}A(t-T)\cos 2\pi f_0 t = a^2 A(t)A(t-T) + a^2 A(t)A(t-T)\cos 2\pi 2f_0 t;$$

випадок 2 – фази сусідніх символів відрізняються на  $\pi$ :

$$-a\sqrt{2}A(t)\cos 2\pi f_0 t \cdot a\sqrt{2}A(t-T)\cos 2\pi f_0 t = -a^2 A(t)A(t-T) - a^2 A(t)A(t-T)\cos 2\pi 2f_0 t.$$

Перші доданки створюють на виході УФ напруги, полярність яких залежить від того, однакові чи протилежні фази коливань, що перемножуються. З викладеного видно, що:

1) правило обчислення рішень схемою рішення (СР):

$$\text{якщо } \hat{a} > 0, \text{ то } \hat{b}_k = 0,$$

$$\text{якщо } \hat{a} < 0, \text{ то } \hat{b}_k = 1;$$

2) відносний декодер не потрібен.

Розподіл миттєвих значень шуму на виході перемножувача не є гауссовим через присутність компонента, породженого добутком шумів  $n(t)$  і  $n(t-T)$ . Аналіз імовірності помилки утруднений. Остаточна формула для ймовірності помилки біта на виході демодулятора має вигляд:

$$P_{\text{ФРМ-2 нкг}} = \frac{1}{2} \exp(-h_0^2). \quad (15.4)$$

Відзначимо, що широко використовується наступна термінологія: некогерентну демодуляцію сигналу ФРМ-2 називають прийманням за методом порівняння фаз; когерентну демодуляцію сигналу ФРМ-2 називають прийманням за методом порівняння полярностей.

*Порівняємо завадостійкість когерентних і некогерентних демодуляторів двійкових сигналів.* Для порівняння використовуємо залежності  $p = f(h_0^2)$  (рис. 15.6).

З рисунка видно, що при переході від когерентної демодуляції до некогерентної для збереження ймовірності помилки необхідно збільшити відношення сигнал/шум приблизно на 1 дБ.

Некогерентна демодуляція широко використовувалась багато десятиліть, коли апаратура виконувалася на радіолампах і транзисторах. Нині некогерентна демодуляція використовується обмежено, наприклад, якщо в каналі зв'язку швидко змінюється початкова фаза сигналу – радіозв'язок між об'єктами, які взаємно швидко переміщаються.

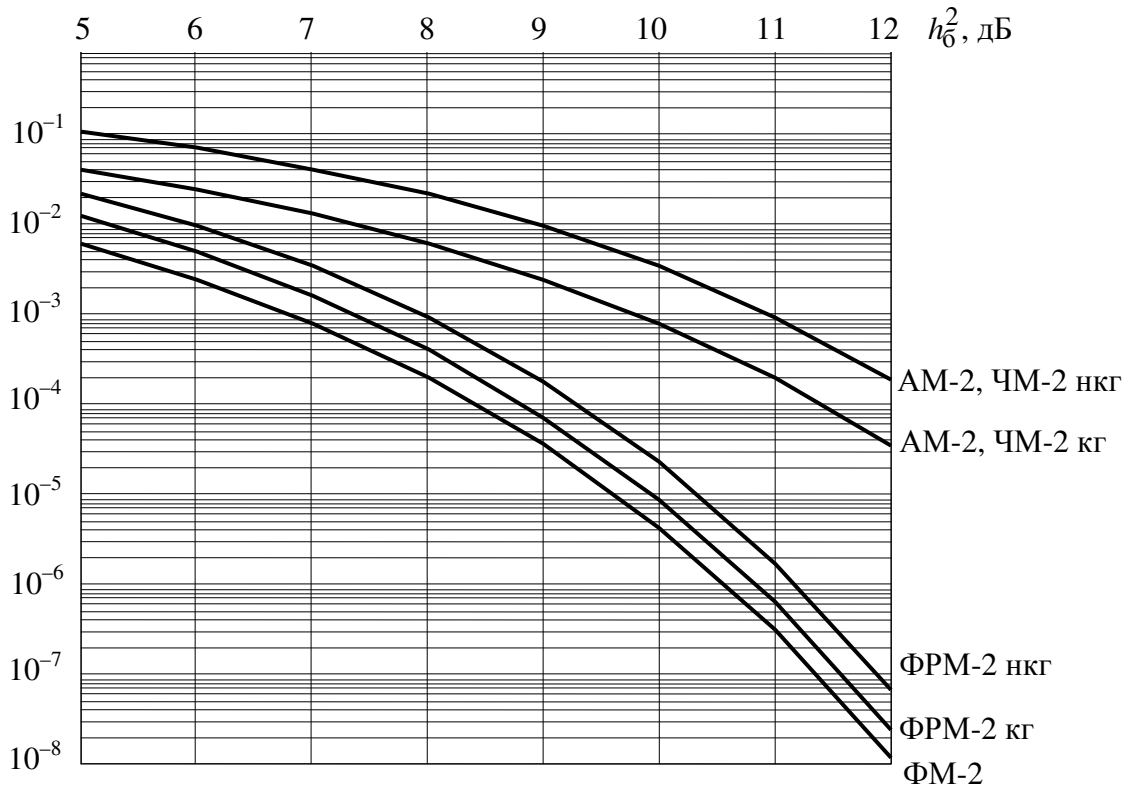


Рисунок 15.6 – Завадостійкість демодуляторів двійкових сигналів

### Контрольні питання

1. Поясніть принцип некогерентної демодуляції сигналів АМ-2, ЧМ-2 і ФРМ-2.
2. Порівняйте завадостійкість когерентного і некогерентного способів демодуляції сигналів АМ-2, ЧМ-2 і ФРМ-2.

## 16. СИСТЕМИ ТАКТОВОЇ СИНХРОНІЗАЦІЇ

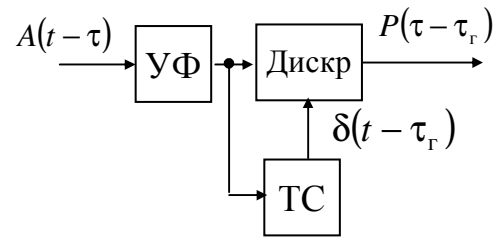
У демодуляторах цифрових сигналів система ТС призначена для формування відлікових тактових імпульсів, які забезпечують узяття відліків сигналу на виході узгодженого фільтра в моменти максимуму відношення сигнал/шум.

У демодуляторі цифрових сигналів відбувається узгоджена фільтрація імпульсів  $A(t - \tau)$  (рис. 16.1). Затримка імпульсу  $\tau$  є випадковою (невідомою) величиною. За таких умов на виході узгодженого фільтра (УФ) спостерігається затриманий на час  $\tau$  імпульс  $P(t - \tau)$ , максимум якого  $P(0)$  спостерігається в невідомий момент  $t = \tau$ .

Система ТС містить тактовий генератор, який на кожному тактовому інтервалі тривалістю  $T$  формує імпульс  $\delta(t - \tau_r)$ , який повинен замкнути ключ у момент  $t = \tau$ . Але імпульс формується в невідомий довільний момент  $t = \tau_r$ . У результаті відлік імпульсу  $P(t - \tau)$  не буде максимальним, оскільки  $\tau_r \neq \tau$  і

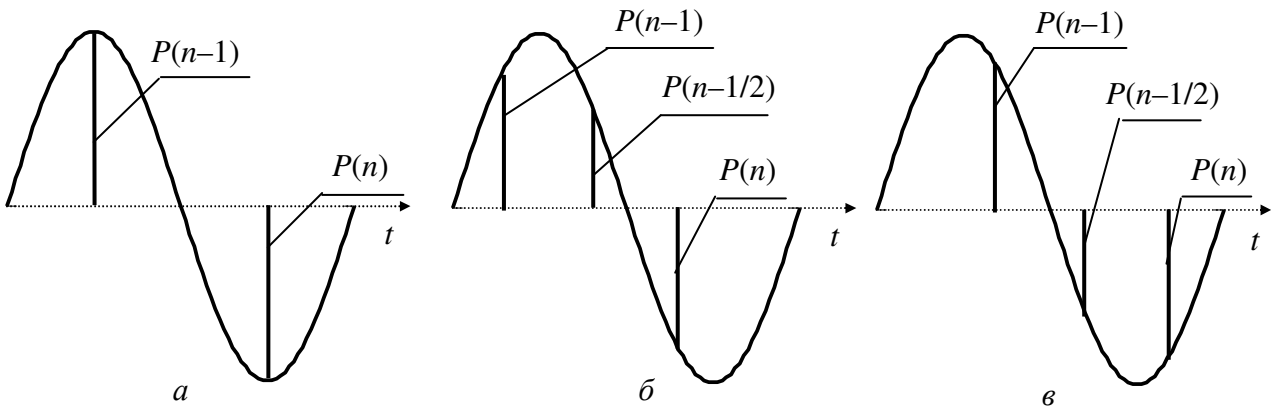
$P(\tau - \tau_r) < P(0)$ . Крім того, з'являється міжсимвольна інтерференція, тому що відліки беруться не в моменти часу, коли  $P(t) = 0$ .

Система ТС повинна забезпечити правильний вибір відлікових моментів. У сучасних демодуляторах, реалізованих на процесорах, це завдання вирішується шляхом підстроювання тактового генератора сигналом помилки, що формується спеціальним детектором. Тобто, в основі побудови системи ТС лежить система ФАПЧ, розглянута під час обговорення систем ВН.



**Рисунок 16.1** – Оброблення сигналу узгодженим фільтром

Усі принципи побудови систем ТС засновані на використанні властивості цифрового сигналу змінювати знак. Фрагмент сигналу на виході УФ при передаванні символів 1 і 0 поданий на рис. 16.2, з якого випливає, що зміна знаку сигналу відбувається приблизно посередині між моментами, де необхідно брати відліки.



**Рисунок 16.2** – Дискретизація сигналу після УФ під час роботи системи ТС

На рис. 16.2, *а* показано випадок, коли відлікові імпульси встановлені правильно – відліки взяті в моменти максимального значення сигналу. На цьому рисунку чітко видно, що цифровий сигнал дорівнює нулю посередині між моментами взяття відліків. Детектор помилки системи ТС можна побудувати за наступним принципом: на кожному тактовому інтервалі береться відлік посередині тактового інтервалу  $P(n - 1/2)$ . Якщо  $P(n - 1/2) = 0$ , то відліки, за якими будуть виноситися рішення, беруться в оптимальні моменти, у противному випадку формується *сигнал помилки системи ТС*:

$$\varepsilon(n) = P(n - 1/2) \{ \text{sign}[P(n)] - \text{sign}[P(n - 1)] \}, \quad (16.1)$$

де  $P(n)$  – відлік, за яким виноситися рішення на даному тактовому інтервалі;

$P(n - 1)$  – відлік, за яким виноситися рішення на попередньому тактовому інтервалі;

$\text{sign}[x]$  – функція визначення знака.

Необхідність множника  $\{ \text{sign}[P(n)] - \text{sign}[P(n - 1)] \}$  у виразі формування сигналу помилки (16.1) викликана наступним: якщо в цифровому сигналі не

змінюється знак, то  $P(n - 1/2) \neq 0$ , навіть якщо відліки  $P(n - 1)$  й  $P(n)$  беруться в оптимальні відлікові моменти. Тому в такій ситуації необхідно, щоб сигнал  $P(n - 1/2)$  не використовувався для обчислення помилки. Дійсно, якщо знаки відліків  $P(n - 1)$  і  $P(n)$  однакові, то їхня різниця дорівнює нулю й відлік  $P(n - 1/2)$  не використовується.

Алгоритм обчислення помилки (16.1) був отриманий Гарднером. Йому відповідає система ТС, подана на рис. 16.3. На схемі ДП – детектор помилки. У схемі враховано, що частота взяття відліків удвічі більша тактової частоти.

З розгляду роботи схеми ТС видно, що підстроювання генератора буде *тільки при наявності в цифровому сигналі переходів від 1 до 0 і від 0 до 1*. Тому при формуванні переданого цифрового сигналу необхідно усунути тривалі послідовності однакових символів. Для рішення цього завдання переданий цифровий сигнал перетворюється спеціальним пристроєм – скремблером, у якому відбувається перетворення цифрового сигналу до вигляду випадкового цифрового сигналу.

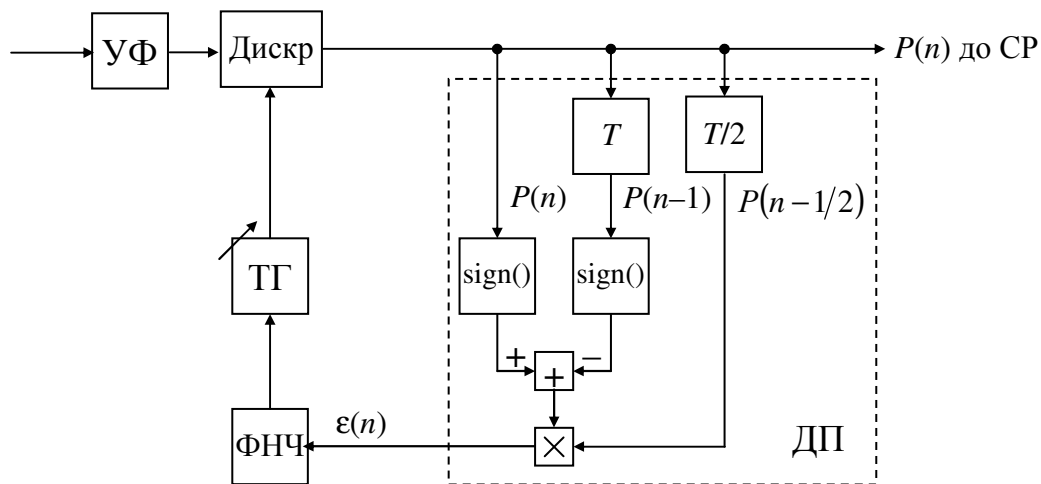


Рисунок 16.3 – Система ТС з детектором помилки Гарднера

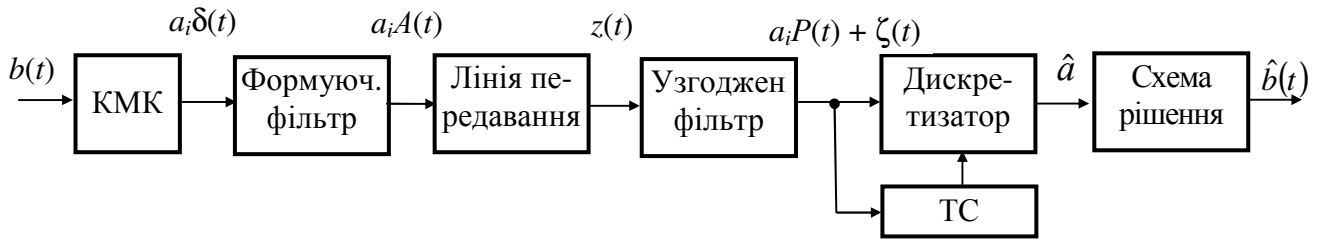
### Контрольні питання

1. Поясніть призначення системи ТС демодулятора.
2. Як визначається сигнал помилки у системі ТС?
3. Чому у цифровому сигналі, що передається, повинні бути переходи від 1 до 0 і від 0 до 1?

## 17. ДЕМОДУЛЯЦІЯ В УМОВАХ МІЖСИМВОЛЬНОЇ ІНТЕРФЕРЕНЦІЇ

Алгоритми демодуляції, які вивчаються у модулі 3, реалізують поелементне приймання, за якого на кожному тактовому інтервалі оброблюється з винесенням рішення черговий каналний символ. Сусідні за часом каналні символи не повинні впливати на оброблення даного символу. Якщо каналні символи впливають один на одного під час оброблення та винесення рішення, то має місце *міжсимвольна інтерференція* (МСІ).

Причини виникнення та методи послаблення МСІ, а також методи оцінки завадостійкості в умовах МСІ проаналізуємо, розглядаючи систему передавання за методом АІМ-М. На основі рис. 10.11 побудовано структурну схему системи передавання за методом АІМ-М (рис. 17.1).



**Рисунок 17.1** – Структурна схема системи передавання за методом АІМ-М

Кодер модуляційного коду (КМК) видає число  $a_i$ , яке визначає амплітуду канального символу, коротким імпульсом  $a_i \delta(t)$ . У разі АІМ-2  $a_i = a$  для передавання 1 і  $a_i = -a$  для передавання 0. Формуючий фільтр формує канальний символ  $s_i(t) = a_i A(t)$ , де  $A(t)$  – імпульс, який задовольняє певним вимогам.

На виході лінії передавання, яка не змінює форму сигналу, має місце сигнал плюс завада  $z(t) = s_i(t) + n(t)$ , де  $n(t)$  – АБГШ.

На виході узгодженого фільтра маємо фільтрований канальний символ  $a_i P(t)$  і фільтровану заваду  $\zeta(t)$ . Амплітудне значення імпульсу  $P(t)$  дорівнює 1 (рис. 5.3). Після взяття відліку отримаємо оцінку амплітуди  $\hat{a} = a_i + \zeta$ , де  $\zeta$  – значення завади  $\zeta(t)$  в момент взяття відліку. Схема рішення за полярністю оцінки  $\hat{a}$  виносить рішення і видає символ 1 чи 0.

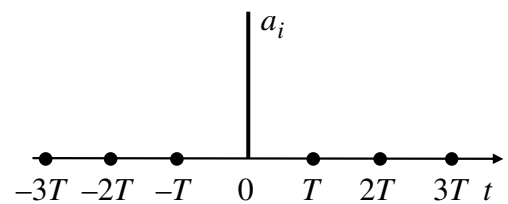
Відліки переддії і післядії імпульсу  $P(t)$  через тактовий інтервал  $T$  повинні бути нульовими, а в цілому імпульс  $P(t)$  повинен задовольняти умові (вважаємо, що амплітудне значення імпульсу має місце в момент часу  $t = 0$ )

$$P(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t = nT, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (17.1)$$

Умова (17.1) називається *умовою відліковості імпульсу* або *умовою відсутності міжсимвольної інтерференції*. Нагадаємо, що імпульси, які задовольняють умові відліковості, називаються імпульсами Найквіста. На рис. 5.3 подано імпульс  $P(t)$ , який задовольняє умові відліковості.

Умові (17.1) задовольняють імпульси, які мають спектр Найквіста  $N(f)$ . Найчастіше спектр Найквіста описують залежністю „піднятий косинус“ – (5.7).

Якщо імпульс  $P(t)$  має вигляд, показаний на рис. 5.3, то за відсутності завад після надходження на вхід демодулятора імпульсу  $a_i A(t)$  на виході дискретизатора отримаємо сигнал, показаний на рис. 17.2.

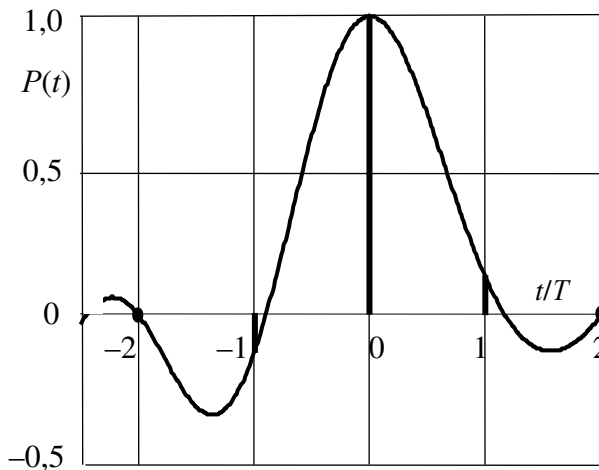


**Рисунок 17.2** – Вихід дискретизатора за відсутності МСІ

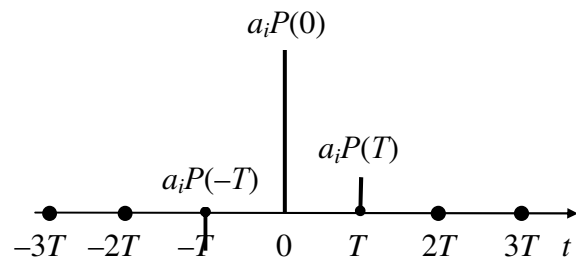
У розд. 5 показано, що у разі неспотворюючої лінії передавання імпульс  $P(t)$  матиме спектр Найквіста, якщо АЧХ формуючого і узгодженого фільтрів описуються залежністю  $\sqrt{N(f)}$  – «корінь квадратний зі спектра Найквіста».

Під час передавання сигналів цифрової модуляції реальними лініями передавання повинні бути враховані лінійні спотворення, що вносяться лінією. Нагадаємо, що умовами неспотвореного передавання сигналу лінійним електричним колом (у даному випадку лінією передавання) є постійна АЧХ і лінійна ФЧХ в смузі частот сигналу. Реальна лінія передавання не задовольняє умовам неспотвореного передавання сигналу. Отже, форма імпульсу на виході узгодженого фільтра не буде задовольняти умові відліковості (17.1).

На рис. 17.3 показано приклад імпульсу  $P(t)$ , що не задовольняє умові відліковості. При такій формі імпульсу за відсутності завад після передавання імпульсу  $a_i A(t)$  на виході дискретизатора отримаємо сигнал, показаний на рис 17.4. Відліки  $a_i P(-T)$  і  $a_i P(T)$  створюють міжсимвольну інтерференцію.



**Рисунок 17.3** – Імпульс, що не задовольняє умові відліковості



**Рисунок 17.4** – Вихід дискретизатора при наявності МСІ

МСІ є внутрішньою завадою під час передавання сигналів. Так, відлік  $a_i P(-T)$  накладається на відлік попереднього канального символу й зменшує або збільшує його. Аналогічно, відлік  $a_i P(T)$  накладається на відлік наступного канального символу й зменшує або збільшує його. Якщо вважати, що шум призводить до розмиття оцінки  $\hat{a}$ , то МСІ збільшує це розмиття. У підсумку МСІ збільшує ймовірність помилки.

Рівень МСІ оцінюють  $D$ -критерієм та  $E$ -критерієм:

$$D = \frac{1}{P(0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}^* |P(nT)|, \quad E = \frac{1}{P(0)} \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} {}^* |P(nT)|^2}, \quad (17.2)$$

де зірочка біля суми вказує, що відсутня складова суми з  $n = 0$ .

$D$ -критерій має сенс найбільшого відносного приросту відліку канального символу за рахунок МСІ, а  $E$ -критерій має сенс нормованого середнього квадратичного відхилення МСІ.  $D$ -критерій і  $E$ -критерій використовують для оцінки

завадостійкості системи передавання в умовах дії МСІ. Так, при АІМ-2 імовірність помилки біта на виході демодулятора визначається

$$p = Q(\sqrt{2}h_6) = Q\left(\frac{a}{\sigma}\right), \quad (17.3)$$

де  $a$  – відлікове значення імпульсу на виході УФ;

$\sigma$  – СКВ шуму на виході УФ.

При МСІ у найгіршому випадку всі заважаючі відліки зменшують відлік канального символу, що демодулюється, і відлікове значення дорівнює  $a \cdot (1 - D)$ . У цьому випадку імовірність помилки біта визначається

$$p = Q\left(\frac{a(1-D)}{\sigma}\right) = Q(\sqrt{2}h_6(1-D)). \quad (17.4)$$

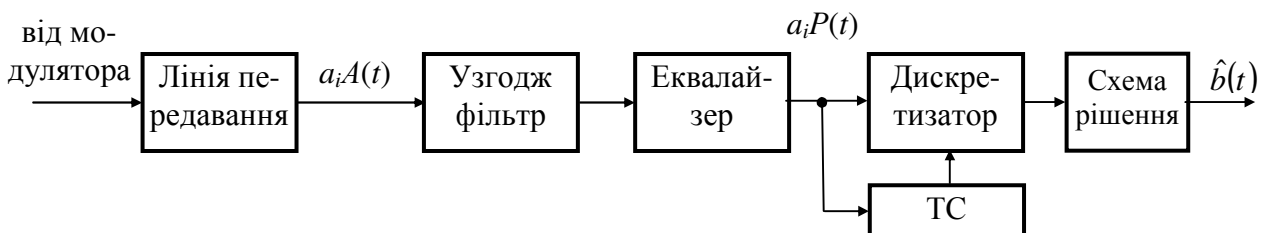
Оскільки,  $E$ -критерій має сенс СКВ МСІ, то сумарна дисперсія шуму й МСІ оцінки  $\hat{a}$  визначається  $\sigma_\Sigma^2 = \sigma^2 + (aE)^2$ .

У цьому випадку ймовірність помилки біта визначається

$$p = Q\left(\frac{a}{\sigma_\Sigma}\right) = Q\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{1+(aE)^2/\sigma^2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}h_6}{\sqrt{1+2h_6^2E^2}}\right). \quad (17.5)$$

Формули (17.4) і (17.5) дозволяють просто оцінити завадостійкість в умовах МСІ. Однозначно можна сказати – МСІ погіршує завадостійкість.

Для усунення МСІ чи її істотного ослаблення використовуються коректори характеристик лінії передавання (вирівнювачі, еквалайзери). Термін вирівнювач пов'язаний з тим, що коректор вирівнює амплітудну та фазову характеристики результуючого кола передавання. Включення еквалайзера в схему демодулятора сигналів АІМ-М показано на рис. 17.5. Характеристики еквалайзера повинні бути такими, щоб загальна АЧХ лінії передавання й еквалайзера була постійною величиною, а загальна ФЧХ лінії передавання й еквалайзера була лінійною функцією частоти.



**Рисунок 17.5** – Схема включення еквалайзера в схему демодулятора АІМ-М

На рис. 17.6 показано приклад АЧХ лінії передавання, за якої будуть лінійні спотворення сигналу, що проходить лінією. Там же показана необхідна АЧХ еквалайзера – вона повинна бути такою, щоб добуток АЧХ лінії передавання й АЧХ еквалайзера був частотно-незалежним. Якщо характеристика лінії передавання з часом не змінюється, то можна виміряти її, розрахувати необхідну АЧХ еквалайзера, виготовити його й увімкнути за схемою рис. 17.5.

Звичайно, еквалайзери виконують за схемою нерекурсивного дискретного чи цифрового фільтра (КІХ-фільтра). Такі фільтри легко проектувати та налаштовувати. Якщо ж характеристики лінії передавання змінюються з часом (така ситуація має місце в радіолініях), то еквалайзер виконують адаптивним, що самоналаштовується (тут КІХ-фільтри незамінні). Автоматичне налаштування ведеться так, щоб мінімізувати «розмитість» оцінки  $\hat{a}$ .

У разі одномірних смугових сигналів (ФМ-2, АМ-М) МСІ з'являється, якщо бічні смуги спектра радіоімпульсів відрізняються від спектра Найквіста. Для цих сигналів еквалайзер вмикається після узгодженого фільтра, як показано на рис. 17.5.

У разі двовимірних смугових сигналів (ФМ-М ( $M \geq 4$ ), АФМ-М, КАМ-М) МСІ з'являється, якщо бічні смуги спектра радіоімпульсів відрізняються від спектра Найквіста. Для ослаблення МСІ досить було б увімкнути еквалайзери після узгоджених фільтрів у кожному з підканалів демодулятора (рис. 10.1). Крім вказаної причини виникнення МСІ є наступне явище. Якщо АЧХ і/або ФЧХ лінії передавання не симетричні відносно частоти несівної  $f_0$ , то модульований сигнал отримує квадратурні переходи: з косинусної складової сигналу (10.1) виникає «добавка» до синусної складової і, навпаки, з синусної складової сигналу виникає «добавка» до косинусної складової. Щоб зкомпенсувати квадратурні переходи, еквалайзер містить чотири КІХ-фільтри, як це показано на рис. 17.7.

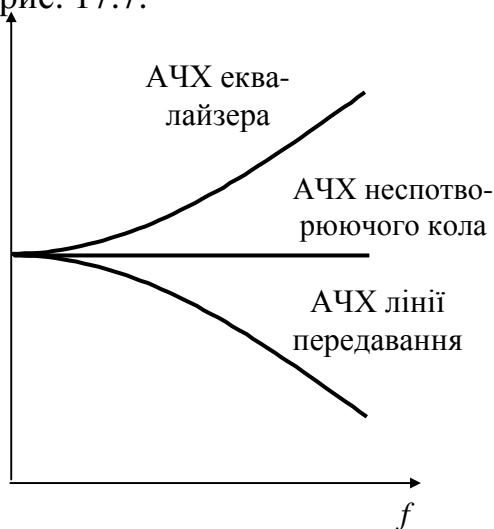


Рисунок 17.6 – Амплітудно-частотні характеристики

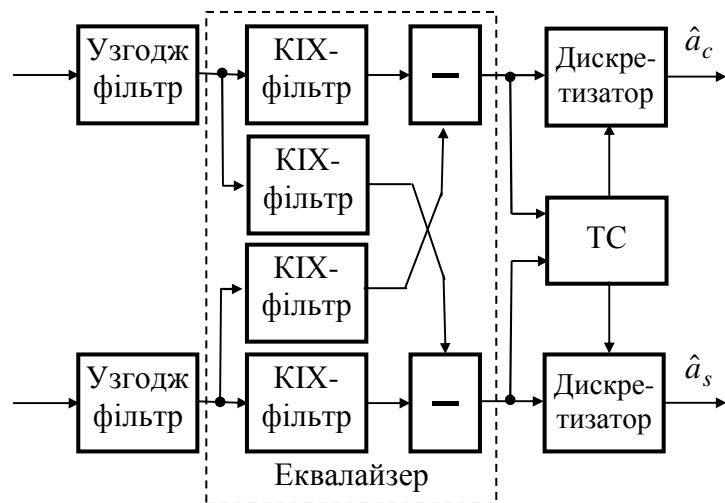


Рисунок 17.7 – Схема еквалайзера демодулятора двовимірних сигналів

На останок зауважимо, що причиною виникнення МСІ крім спотворень лінією передавання можуть бути:

відхилення АЧХ формуючого і/або узгодженого фільтра від залежності  $\sqrt{N(f)}$ ;

відхилення ФЧХ формуючого і/або узгодженого фільтра від лінійної залежності.

Еквалайзери у цілому вирівнюють АЧХ і ФЧХ кола передавання, створеного формуючим фільтром, лінією передавання і узгодженим фільтром, щоб імпульс  $P(t)$  задовольняв умові відліковості.

### **Контрольні питання**

1. Поясніть причини виникненням МСІ у системах передавання.
2. Перелічіть методи зменшення чи усунення МСІ в системах передавання.
3. Як оцінюють завадостійкість системи передавання з МСІ?

## **18. НЕОПТИМАЛЬНІ ДЕМОДУЛЯТОРИ**

У всіх попередніх розділах ми розглядали схеми оптимальних демодуляторів і їхню завадостійкість. Нагадаємо, що критерієм оптимальності демодуляторів є мінімум імовірності помилки сигналу й біта. Схема оптимального демодулятора сигналів ФМ-М ( $M \geq 4$ ), АФМ-М, КАМ-М подана на рис. 10.1. У цій схемі з метою досягнення *мінімуму ймовірності помилки забезпечується виконання наступних умов*.

1. Опорні коливання, що подаються на перемножувачі, збігаються за фазою з косинусною і синусною складовими канального символу, завдяки цьому відбувається повне розділення косинусної і синусної складових з метою наступного роздільного їхнього оброблення, а вихідні напруги перемножувачів максимальні.
2. Узгоджені фільтри узгоджені з імпульсом-переносником, що забезпечує максимальне відношення сигнал/шум у відліковий момент.
3. Система ТС забезпечує взяття відліків у моменти часу, коли миттєве значення імпульсу-переносника максимальне.
4. Завдяки тому, що формуючий фільтр модулятора й узгоджений фільтр демодулятора мають однакові АЧХ, описувані залежністю «корінь зі спектра Найквіста», а лінія передавання не спотворює сигнал, на входах дискретизаторів імпульси без міжсимвольної інтерференції.
5. Правило винесення рішень схемою рішення засноване на оптимальній розбивці простору сигналів на області сигналів.

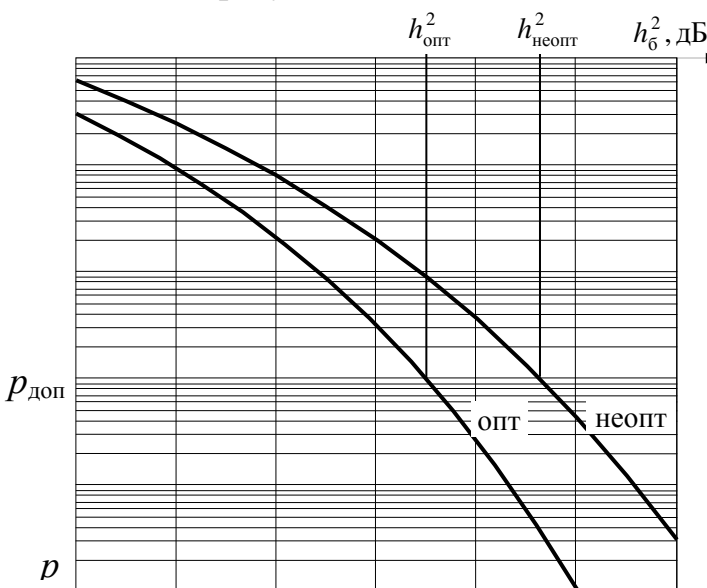
Порушення будь-якої із цих умов призводить до погіршення завадостійкості (збільшенню ймовірності помилки). Як правило, всі умови в реальному демодуляторі в тій чи іншій мірі порушуються. Тому говорять, що *реальний демодулятор є неоптимальним*. Так:

1. Опорні коливання формуються із зашумленого сигналу й не збігаються в точності за фазою з косинусною і синусною складовими канального символу, тому немає повного розділення косинусної і синусної складових, мають місце квадратурні переходи, а вихідні напруги перемножувачів не максимальні.
2. Через скінченну точність виконання формуючого і узгодженого фільтрів, спотворення сигналу в лінії передавання узгоджений фільтр не є в точності узгодженим з імпульсом-переносником і не забезпечується максимальне відношення сигнал/шум у відліковий момент.

3. Відлікові імпульси в системі ТС формуються із зашумленого сигналу, і не забезпечується взяття відліків у моменти часу, коли миттєве значення імпульсу-переносника максимальне.

4. Через скінченну точність виконання формуючих і узгоджених фільтрів, спотворень сигналу в лінії передавання імпульси на входах дискретизаторів мають міжсимвольну інтерференцію.

5. У демодуляторах багаторівневих сигналів має місце неоптимальне розбиття простору сигналів на області сигналів, тому що рівні сигналу, що демодулюється, відрізняються від рівнів, для яких розраховане розбиття на області сигналів. Для зменшення цього ефекту демодулятор повинен мати систему автоматичного регулювання підсилення сигналу.



**Рисунок 18.1** – Порівняння завадостійкості оптимального й неоптимального приймання

Розрахувати завадостійкість неоптимального демодулятора практично неможливо. Завадостійкість неоптимального демодулятора визначають експериментально або шляхом моделювання на комп'ютері. На рис. 18.1 показана розрахована залежність ймовірності помилки від відношення сигнал/шум (потенційна завадостійкість) і отримана експериментально.

Для заданої допустимої ймовірності помилки  $p_{\text{доп}}$  за графіками визначають значення відношень сигнал/шум при оптимальному прийманні  $h_{\text{опт}}^2$  і при не-

оптимальному прийманні  $h_{\text{неопт}}^2$ . Різниця цих значень називається *енергетичними втратами демодуляції (ЕВ)*:

$$\text{ЕВ} = h_{\text{неопт}}^2 - h_{\text{опт}}^2. \quad (18.1)$$

У сучасних добре виконаних модемах у каналі з АБГШ при ФМ-4  $\text{ЕВ} = 0,8 \dots 1,0$  дБ. З ростом числа рівнів сигналу втрати зростають і для КАМ-64, КАМ-256 можуть досягати 2 дБ.

### **Контрольні питання**

1. Перелічіть причини неоптимальності реальних демодуляторів.
2. Що таке енергетичні втрати демодуляції?

## 19. ДЕМОДУЛЯЦІЯ В КАНАЛАХ ЗІ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У попередніх розділах у якості моделі лінії передавання (рис. 1.1) використовувався канал зв'язку з постійними у часі параметрами. Типовою моделлю радіоканалу в системах рухомого зв'язку й радіодоступу є канал зі змінними параметрами

$$z(t) = k(t) \cdot s(t) + n(t), \quad (19.1)$$

де  $n(t)$  – адитивна завада, вважаємо, як і раніше, що це АБГШ;

$k(t)$  – мультиплікативна завада; вона відіграє роль коефіцієнта передачі каналу зв'язку; математично  $k(t)$  – це випадкова функція, що змінюється повільно в порівнянні зі змінами параметрів сигналу  $s(t)$ .

Говорять, що співвідношення (19.1) є моделлю каналу із завмираннями, (завмирання – це випадкові зміни рівня сигналу на виході каналу зв'язку). Причина завмирань – багатопроменеве поширення радіохвиль: в антену радіоприймача надходять дві або більше копії сигналу  $s(t)$ , що пройшли різні шляхи й отримали різні фазові зсуви, оскільки вони пройшли різні відстані. Складаючись на вході радіоприймача, копії можуть дати збільшення або ослаблення сигналу  $s(t)$  залежно від різниці їхніх фаз.

Для опису функції  $k(t)$  використовуються статистичні характеристики, для нас важливо знати розподіл імовірностей величини  $k$ . Найчастіше вважають, що  $k(t)$  має розподіл Релея

$$p(k) = \begin{cases} \frac{2k}{\overline{k^2}} \exp\left(-\frac{k^2}{\overline{k^2}}\right), & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases} \quad (19.2)$$

де  $\overline{k^2}$  – середній квадрат коефіцієнта передачі  $k$ .

Залежність (19.2) при  $\overline{k^2} = 1$  подано на рис. 19.1. Із графіка видно, що можливі ситуації, коли рівень сигналу близький до нуля, і завадостійкість системи передавання стає дуже низькою. Оцінимо завадостійкість у разі каналу з релесівськими завмираннями. Із-за завмирань проблемою також є відновлення несінного колювання, тому в таких каналах зв'язку демодулятори реалізують, як правило, некогерентне приймання.

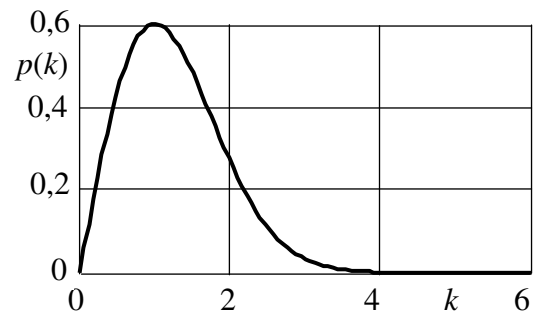


Рисунок 19.1 – Розподіл Релея ( $\overline{k^2} = 1$ )

Відношення сигнал/шум залежить від коефіцієнта передачі каналу зв'язку, тому величина  $h_6$  є випадковою з таким же розподілом, як і величина  $k$ :

$$p(h_6) = \begin{cases} \frac{2h_6}{h_6^2} \exp\left(-\frac{h_6^2}{h_6^2}\right), & h_6 \geq 0, \\ 0, & h_6 < 0. \end{cases} \quad (19.3)$$

Оскільки  $h_6$  змінюється, то можна говорити про умовну ймовірність помилки. Так у випадку ЧМ-2

$$P_{\text{пом}}(h_6) = 0,5 \exp(-h_6^2/2). \quad (19.4)$$

Визначимо безумовну ймовірність помилки біта

$$\begin{aligned} \overline{P_{\text{пом}}} &= \int_0^\infty p(h_6) P_{\text{пом}}(h_6) dh_6 = \int_0^\infty \frac{2h_6}{h_6^2} \exp\left(-\frac{2h_6}{h_6^2}\right) \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{h_6^2}{2}\right) dh_6 = \\ &= \frac{1}{h_6^2} \int_0^\infty h_6 \exp\left(-h_6^2 \cdot \frac{2+h_6^2}{2h_6^2}\right) dh_6 = \frac{1}{h_6^2} \left( -\frac{1}{2} \frac{2h_6^2}{2+h_6^2} \exp\left(-h_6^2 \cdot \frac{2+h_6^2}{h_6^2}\right) \right) \Big|_0^\infty = \frac{1}{2+h_6^2}. \end{aligned} \quad (19.5)$$

Порівняємо завадостійкість приймання в каналі з постійними параметрами – формула (19.4) – і в каналі з релеєвськими завмираннями – формула (19.5). Так, для досягнення ймовірності помилки  $10^{-6}$  у каналі з постійними параметрами потрібно  $h_6^2 = 26,2$  або  $14,2$  дБ, а в каналі зі змінними параметрами  $h_6^2 = 10^6$  або  $60$  дБ, тобто відношення сигнал/шум повинне бути збільшене в  $40000$  разів або на  $46$  дБ.

Аналогічно аналізують завадостійкість приймання сигналу ФРМ-2: у каналі з постійними параметрами

$$P_{\text{пом}}(h_6) = \frac{1}{2} \exp(-h_6^2); \quad (19.6)$$

у каналі зі змінними параметрами

$$\overline{P_{\text{пом}}} = \frac{1}{2(1+h_6^2)}. \quad (19.7)$$

У літературі можна знайти результати подібного аналізу завадостійкості й при інших розподілах ймовірностей функції  $k(t)$ . Загальний висновок такий – у каналах із завмираннями для збереження завадостійкості необхідно збільшувати відношення сигнал/шум на вході демодулятора на кілька порядків у порівнянні з відношенням сигнал/шум у каналах зв'язку з постійними параметрами.

Розглянемо способи зменшення негативного впливу завмирань на завадостійкість системи передавання. Нехай *завмирання дружні*, тобто для усіх частотних складових сигналу поточний коефіцієнт передачі каналу приблизно один і той же. Ефективним способом ослаблення впливу завмирань є рознесення приймання. Рознесення приймання реалізується гілками рознесення і схемою обробки рознесених сигналів (рис. 19.2).

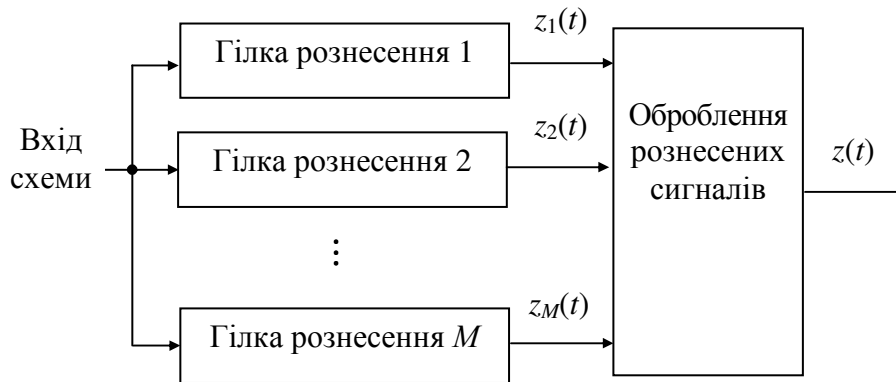


Рисунок 19.2 – Приймання з рознесенням

Задача рознесення – отримати  $M$  підканалів передавання, завмирання у яких незалежні. Тоді, якщо ймовірність  $P_{\text{доп}}$  того, що в деякий момент часу в одному з підканалів відношення сигнал/шум менше допустимого, то ймовірність того, що в усіх підканалах відношення сигнал/шум менше допустимого, дорівнює  $P_{\text{доп}}^M$ , і можна забезпечити цю величину достатньо малою.

Рознесення може бути:

- просторове;
- часове;
- частотне;
- поляризаційне.

Для опису рознесення нагадаємо, що радіоканал (рис. 1.1) складається з: радіопередавача з передавальною антеною, радіоприймача з приймальною антеною і вільного простору для розповсюдження електромагнітних хвиль від передавальної до приймальної антени.

**Просторове рознесення** виконується на основі одного радіопередавача, однієї або кількох передавальних антен,  $M$  приймальних антен та  $M$  радіоприймачів. Отже, входом схеми на рис. 19.2 є вихід радіопередавача. Приймальні антени рознесені у просторі. Вважають, що сигнали  $z_i(t)$  будуть не корельованими, якщо відстань між антенами перевищує 10 довжин робочої хвилі. Цей метод рознесення збільшує обсяг обладнання, але не вимагає додаткових витрат ресурсів каналу зв'язку (смути частот, потужності передавача).

**Часове рознесення** може використовуватись в системах з пакетним передаванням даних: сигнал з виходу (входу) модулятора запам'ятовується і передається каналом зв'язку  $M$  раз через певний інтервал повторення  $T_{\text{повт}}$  (канал

зв'язку створений радіопередавачем і радіоприймачем зі своїми антенами). Сигнали  $z_i(t)$  зсунуті за часом, відповідним вибором інтервалу  $T_{\text{повт}}$  можна забезпечити, що сигнали  $z_i(t)$  будуть не корельованими.

**Частотне рознесення** виконується на основі  $M$  радіопередавачів та  $M$  радіоприймачів, що працюють на  $M$  різних несівних частотах (тут можна використати по одній передавальній і приймальній антені). Отже, входом схеми на рис. 19.2 є входи радіопередавачів. Різниця несівних частот вибирається так, щоб сигнали  $z_i(t)$  були не корельованими. Частотне рознесення вимагає додаткових витрат смуги частот (витрати збільшуються в  $M$  раз) і використовується, коли із-за умов експлуатації обладнання неможливо реалізувати просторове рознесення.

**Поляризаційне рознесення** може використовуватись на НВЧ, при цьому методі  $M = 2$ . На обидва опромінювачі передавальної антени, що створюють хвилі різної поляризації, подається один і той же сигнал від радіопередавача. Приймальна антена має два опромінювачі, від яких сигнали поступають на входи двох радіоприймачів.

Під час **оброблення рознесених сигналів** необхідно з сигналів  $z_i(t)$  сформувати сигнал  $z(t)$ , який подається на вхід модулятора. Методи обробки рознесених сигналів:

- *автовибір сигналу* – у якості сигналу  $z(t)$  приймається той із сигналів  $z_i(t)$ , у якого найбільше відношення сигнал/шум;
- *лінійне складення сигналів* – виконується взаємне фазування сигналів  $z_i(t)$  і подальше їх сумування;
- *складення сигналів з вагою* – виконується взаємне фазування сигналів  $z_i(t)$  і подальше їх сумування з коефіцієнтами, пропорційними їхнім відношенням сигнал/шум.

Методи оброблення рознесених сигналів перераховані в порядку ускладнення схеми, а ускладнення забезпечує збільшення відношення сигнал/шум для сигналу  $z(t)$ .

Розглянемо ще один метод зменшення негативного впливу завмирань на завадостійкість системи передавання – це **використання широкосмугових сигналів** (ШСС) у якості каналних символів. Широкосмуговими називають сигнали, ширина спектра яких значно більша мінімально необхідної смуги частот для передавання сигналів (межі Найквіста).

Оскільки причиною завмирань є багатопроменеве поширення хвиль, то на вхід демодулятора попадають копії переданого сигналу з різними коефіцієнтами  $k_l$  і затримками  $t_l$ :

$$z(t) = s_{\text{вх}}(t) + n(t) = \sum_{l=1}^L k_l s(t - t_l) + n(t), \quad (19.8)$$

де  $l$  – номер променя; променем називається шлях поширення електромагнітної хвилі;

$L$  – кількість променів;

$s(t)$  – каналний символ, що передається на даному тактовому інтервалі.

Використання ШСС дає можливість *розділити в демодуляторі сигнали окремих променів*. Відомо (див. розд. 4), що при подаванні на вхід узгодженого фільтра (УФ) сигналу, з яким фільтр узгоджений, відгук фільтра збігається з функцією кореляції сигналу. Якщо на вхід УФ подати суму декількох копій сигналу, які виникають у багатопроменовому каналі, то на виході буде спостерігатися відгук у вигляді суми функцій кореляції сигналу. На рис. 19.3 показано відгук УФ на суму двох копій сигналу, затримка між яким  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

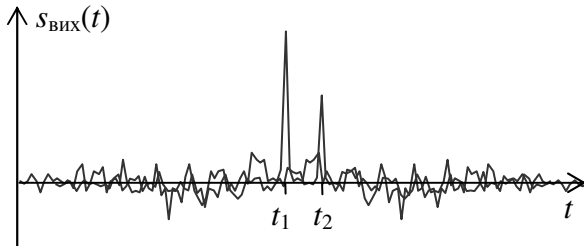


Рисунок 19.3 – Сигнал на виході УФ

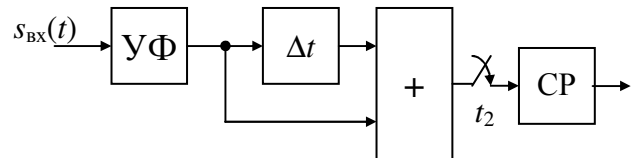


Рисунок 19.4 – Rake-приймач

Оскільки, функції кореляції ШСС мають вузький головний викид та малі за значеннями бічні викиди, то у разі, коли затримки між сигналами окремих променів більші тривалості головного викиду, промені можна вважати розділеними, адже можна взяти відліки з виходу УФ, що відповідають окремим променям. У моменти максимуму відношення сигнал/шум  $t_1$  і  $t_2$  відліки сигналу  $s_{\text{вих}}(t_1)$  і  $s_{\text{вих}}(t_2)$  визначаються в основному значеннями головних викидів, а бічні викиди не вносять значного вкладу у ці відліки (рис. 19.3). Таким чином, при використанні ШСС сигнали окремих променів розділяються за допомогою узгодженого фільтра.

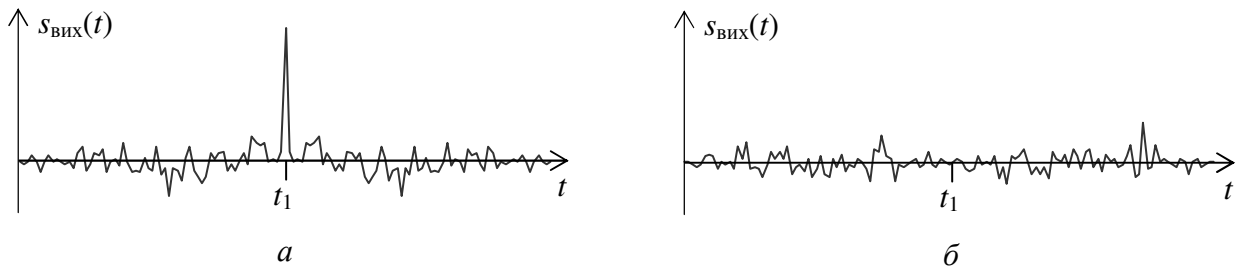
Після розділення сигналів у вказаному сенсі можна оптимально обробити суму сигналів – взяти відліки сигналів окремих променів, виконати їх фазування і скласти – отримаємо УФ для суми сигналів. На рис. 19.4 показано демодулятор, у якому реалізовано таку обробку ( $\Delta t$  – затримка на час  $\Delta t$ , СР – схема рішення). Демодулятор за схемою рис. 19.4 називають Rake-приймачем. Rake-приймач у багатопроменовому каналі зв'язку реалізує завадостійкість, близьку до потенційної завадостійкості використовуваного модульованого сигналу.

ШСС можна використати лише при наявності необхідного частотного ресурсу, оскільки коефіцієнт розширення спектра ШСС у порівнянні з простими сигналами може досягати десятків і сотень. Значною мірою цей недолік усувається, коли системи передавання з ШСС використовуються у мережі зв'язку з мобільними користувачами. У системах передавання окремих користувачів використовуються канальні символи  $s_j(t)$  на основі ШСС, що належать системі ортогональних функцій. На вхід узгодженого фільтра демодулятора деякого користувача поступає декілька ШСС від інших користувачів, які передаються одночасно і в одній і тій же смузі частот:

$$s_{\text{вх}}(t) = \sum_{j=1}^M s_j(t), \quad (19.9)$$

де  $M$  – кількість активних користувачів.

Розділення ШСС від різних користувачів базується на наступній властивості УФ: якщо на вхід фільтра подати сигнал, з яким фільтр не узгоджений, то на виході буде спостерігатися відгук, що збігається з функцією взаємної кореляції сигналу, поданого на вхід, і сигналу, з яким фільтр узгоджений. Оскільки значення функції взаємної кореляції широкосмугових сигналів близькі до нуля, то сигнали, з якими фільтр не узгоджений, не будуть створювати суттєвих завад сигналу, з яким фільтр узгоджений (рис. 19.5). На цьому рисунку  $t_1$  – момент взяття відліку.



**Рисунок 19.5** – Відгуки УФ: *а* – на вході УФ діє сигнал, з яким фільтр узгоджений; *б* – на вході УФ діє сигнал, з яким фільтр не узгоджений

Розглянутий метод розділення сигналів отримав назву **розділення за формою**. Найчастіше ШСС – це сигнал ФМ-2 чи ФМ-4, отриманий у результаті модуляції послідовністю різнополяризованих імпульсів. Такі модулюючі послідовності зручно описувати як кодові послідовності. Використання таких ШСС у мережах зв'язку реалізує **множинний доступ з кодовим розділенням** (МДКР, CDMA – Code Division Multiple Access).

Вище розглянуті методи ослаблення впливу дружніх замирань сигналів на завадостійкість систем передавання. У сучасних системах мобільного радіодоступу швидкості передавання складають одиниці і десятки Мбіт/с. Канали зв'язку при таких швидкостях передавання широкосмугові, і **замирання** не дружні, а **частотно-селективні** – на різних частотах у смузі пропускання каналу коефіцієнти передавання відрізняються. Як наслідок, сигнали у каналі зв'язку отримують лінійні спотворення, що призводить до значного погіршення завадостійкості. Використання адаптивних еквалайзерів (розд. 17) в умовах пакетного передавання даних не забезпечує хорошої компенсації спотворень.

Кардинальне вирішення цієї проблеми забезпечує **метод передавання OFDM** (Orthogonal Frequency Division Multiplexing – Ущільнення з ортогональним розділенням за частотою).

Під час передавання за методом OFDM каналом зв'язку одночасно передаються  $L$  модульованих сигналів з послідовним передаванням, яке розглядалось до цього. Для цього послідовність двійкових символів  $b(t)$  демультимплексується в  $L$  паралельних послідовностей  $b_{(1)}(t), b_{(2)}(t), \dots, b_{(L)}(t)$ . На основі кожної з таких послідовностей формуються модульовані сигнали  $s_{(1)}(t), s_{(2)}(t), \dots, s_{(L)}(t)$  як і під час послідовного передавання. Сума сигналів  $s_{(l)}(t), l = 1, 2, \dots, L$  утворює модульований сигнал паралельно-послідовного передавання, який записується

$$s(t) = \sum_{l=1}^L s_{(l)}(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} s_{(l)i}^{(k)}(t - kT), \quad (19.10)$$

де  $s_{(l)i}^{(k)}(t - kT)$  –  $i$ -й сигнал, що передається  $l$ -м підканалом на  $k$ -му тактовому інтервалі.

*Особливостями методу передавання OFDM є:*

- швидкість цифрових сигналів  $b_{(l)}(t)$  в  $L$  раз нижча, ніж сигналу  $b(t)$ ;
- на виходах модуляторів одночасно присутні  $L$  модульованих сигналів  $s_{(l)}(t)$ ;
- модульовані сигнали окремих підканалів  $s_{(l)}(t)$  повинні бути такими, щоб їх можна було розділити з суми (19.10) для роздільної демодуляції – це досягається тим, що несівні ортогональні за рахунок відповідного вибору рознесення частот, а саме  $\Delta f = 1/T$ .

Якщо кількість підканалів  $L$  велика, то смуги частот підканалів настільки малі, що в їх межах коефіцієнт передачі каналу практично постійний, в окремих підканалах лінійні спотворення практично відсутні.

### **Контрольні питання**

1. Поясніть, що таке дружні, частотно-селективні завмирання.
2. Поясніть принципи просторового, часового, частотного та поляризаційного рознесення.
3. Поясніть методи обробки рознесених сигналів.
4. Поясніть принцип оброблення сигналу Rake-приймачем.
5. Поясніть принцип передавання методом OFDM.

## **20. ПРИЙМАННЯ ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ У КАНАЛАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПО СПЕКТРУ Й ІМПУЛЬСНИМИ ЗАВАДАМИ**

Вище завадостійкість приймання визначалася для каналу з АБГШ. Проте, на практиці доводиться враховувати й дію в каналі зв'язку інших адитивних завад, породжуваних зовнішніми джерелами, і, насамперед, тих, що відносяться до класу *зосереджених по спектру* («гармонійних») й *імпульсних*.

Нагадаємо, якщо на вхід приймального пристрою надходить велика кількість слабо корельованих завад від різних джерел порівнянної потужності, то їхня сума, відповідно до центральної граничної теореми, представляє процес, близький до гауссового. Додаючись до флуктуаційного шуму апаратури, він створює гауссову заваду, тобто АБГШ. Проте, нерідко серед безлічі малопотужних завад на вхід приймача надходять окремі потужні імпульси або зосереджені по спектру завади. У такому каналі, якщо не вжити спеціальних заходів, приймання цифрових сигналів супроводжується погіршенням завадостійкості й, навіть, повним порушенням зв'язку.

Усі заходи щодо захисту від зовнішніх завад можна розбити на три групи.

До *першої* відносять ті, які спрямовані на послаблення завад у місці їхнього виникнення, зокрема екранування джерел промислових завад, застосування іскрогасних конденсаторів, зниження рівня побічних випромінювань ра-

діопередавачів тощо. Ці заходи регулюються спеціальними законоположеннями й стандартами.

*Друга* група – це заходи, ціль яких перешкодити проникненню завад на вхід демодулятора. Для цього в системах проводового зв'язку вдосконалюють конструкцію кабелів для зменшення взаємних впливів тощо. У радіозв'язку для цього встановлюється раціональний розподіл частот між окремими службами й каналами з урахуванням розміщення передавачів і приймачів та умов поширення радіохвиль. При виконанні заходів перших двох груп важливу роль грають міжнародні органи, які розробляють допустимі норми й контролюють їхнє дотримання – сектори Т і Р міжнародного союзу електрозв'язку (МСЕ-Т і МСЕ-Р).

*Третя* група заходів (є предметом розгляду дисципліни «Теорія зв'язку») охоплює вибір ансамблю сигналів і побудову приймача з метою попередити попадання зовнішніх завад у схему демодулятора й мінімізувати ймовірність помилки, якщо вони все-таки проникнуть до неї. Питання, пов'язані із взаємним впливом різних систем передавання однієї на іншу, вивчаються теорією електромагнітної сумісності.

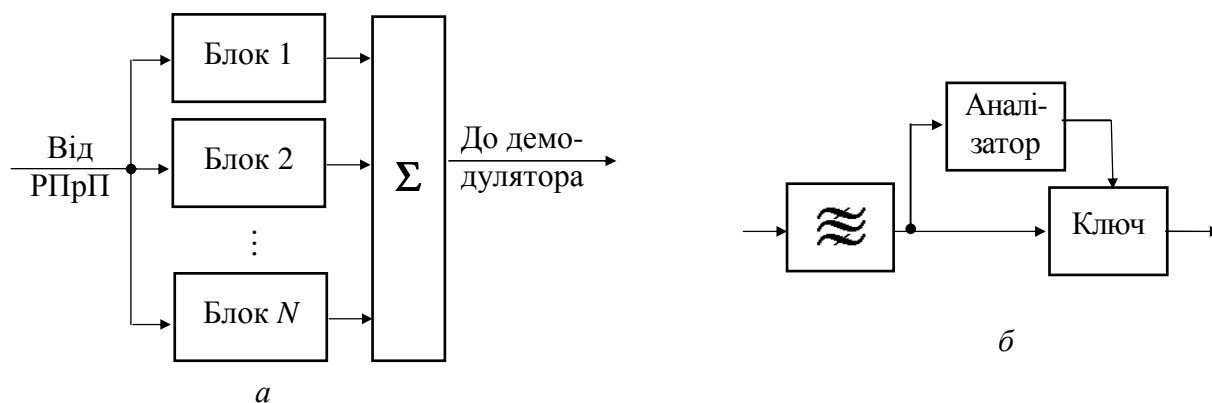
Зосереджені завади спостерігаються майже винятково в радіоканалах. Захист демодулятора від їхнього попадання здійснюється лінійними колами радіоприймачів. Здатність послабити зосереджену заваду на вході демодулятора визначає вибірковість радіоприймача. *Частотна вибірковість* забезпечується тим, що до подачі сигналу на вхід демодулятора він фільтрується в лінійних колах, смуга пропускання яких достатня для того, щоб сигнал пройшов без істотних спотворень, а зосереджені завади, які лежать поза смугою пропускання, при цьому послаблялися. Крім частотної вибіркості широко використовують також *просторову вибірковість*, засновану на застосуванні вузьконаправлених приймальних антен. Важливо відзначити, що вплив зосереджених завад зростає при збільшенні нелінійності входних каскадів радіоприймача, оскільки виникаючи при цьому комбінаційні частоти (навіть якщо завада на вході приймача безпосередньо й не потрапила в смугу пропускання) можуть виявитися в області частот корисного сигналу. Питання захисту радіоприймача від зосереджених завад вивчаються в дисципліні «Радіоприймальні пристрої».

Очевидно, для зменшення ймовірності попадання зосередженої завади в смугу частот сигналу бажано використовувати якомога більш вузькосмугові сигнали. Саме тому протягом багатьох десятиліть для передавання цифрових сигналів по радіоканалах застосовувалися тільки прості вузькосмугові сигнали (АМ-2, ЧМ-2, ФРМ-2), елементи яких є відрізками синусоїди. Проте, за останні 40–50 років намітився й інший підхід, пов'язаний з істотним розширенням спектра сигналу ускладненням його форми або з використанням широкосмугових сигналів (ШСС). ШСС дозволяють успішно передавати сигнали в багатопроміневих каналах (розд. 19). Але, як це не парадоксально, застосування ШСС виявилось корисним і для захисту від вузькосмугових зосереджених завад. Справа в тому, що, якщо спектр вузькосмугового сигналу перекривається потужною зосередженою завадою, то практично не вдається уникнути виникнення помилок. Якщо ж така завада виявиться у смузі ШСС, то в принципі існує можливість «вирізати» її режекторним фільтром (або іншими способами) і по частині

спектра ШСС, що залишилася, відновити переданий цифровий сигнал. Тому, хоча ймовірність попадання зосередженої завади в спектр ШСС більша, ніж у спектр вузькосмугового, ймовірність помилок, створюваних такою завадою, при ШСС (і відповідно побудованими радіоприймачі й демодуляторі) може виявитися значно меншою.

Для захисту від зосереджених завад будуються «пристрої захисту від зосереджених завад» (рис. 20.1). Такий пристрій становить ряд паралельно включених блоків і суматор (рис. 20.1, а). Блоки містять (рис. 20.1, б): вузькосмугові фільтри із суміжними смугами пропускання, розрахованими так, що разом вони пропускають без істотних спотворень весь ШСС, пристрої, що аналізують напруги на виходах кожного фільтра, і керовані ключі, які відключають виходи тих блоків, у яких виявляються потужні зосереджені завади. Цей пристрій включається на вході демодулятора.

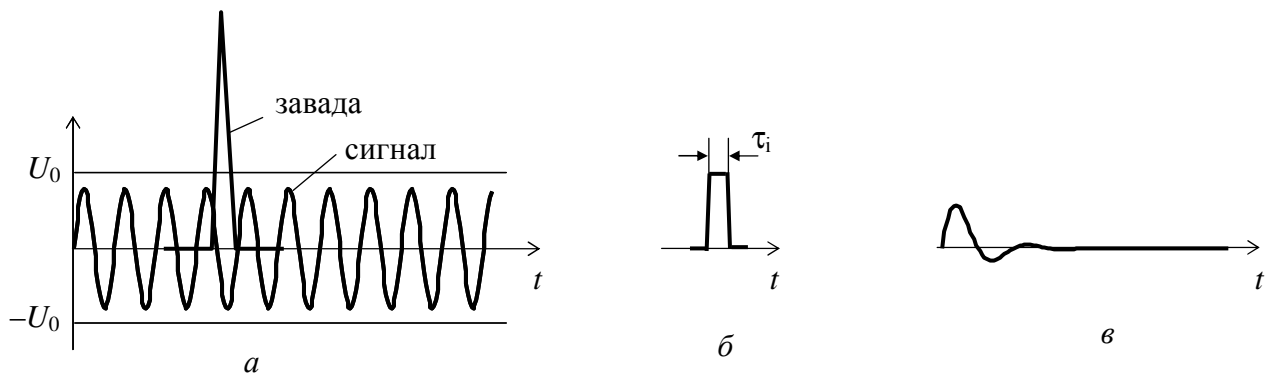
Для захисту від імпульсних завад запропоновано різні способи, найбільш ефективні з яких засновані на амплітудному обмеженні вхідного сигналу до його фільтрації або на миттєвому запиранні приймача на час дії завади. Відомо, що, застосовуючи обмежник у широкосмуговому тракті приймача й пропускаючи обмежений сигнал через вузькосмуговий фільтр, можна при належному виборі смуг пропускання придушити імпульсні завади без помітного погіршення завадостійкості щодо зосереджених і флуктуаційних завад. Така система одержала назву ШОВ (широкосмуговий фільтр, обмежник, вузькосмуговий фільтр) (рис. 20.2). У сучасних пристроях роль вузькосмугових фільтрів виконують узгоджені фільтри демодулятора.



**Рисунок 20.1** – Пристрій захисту від зосереджених завад:  
а – схема пристрою; б – схема блока

Нехай вхідний сигнал приймача подається на двосторонній амплітудний обмежник. Якщо рівень обмеження  $U_0$  обраний трохи вище напруги корисного сигналу, то при відсутності імпульсної завади схема приймача залишається лінійною. Якщо ж з'явиться імпульсна завада з рівнем більшим, ніж  $U_0$ , вона буде обмежена. Таким чином, імпульсна завада тривалістю  $\tau_i$  з як завгодно великою амплітудою на вході, трансформується в імпульс із площею  $\tau_{i0}$ . Амплітуда цього імпульсу приблизно дорівнює амплітуді сигналу, а спектр його значно відрізняється від спектра сигналу. Тому після проходження через вузькосмуговий

(або узгоджений) фільтр більша частина енергії імпульсної завади відсівається й вона не викликає помилок.



**Рисунок 20.2** – До системи ШОВ: *а* – сигнал й імпульсна завада на вході схеми ШОВ; *б* – завада на виході обмежника; *в* – завада на виході вузькосмугового фільтра

Проте, у реальних умовах рівень  $U_0$  досягається й зосередженою завадою, а із-за нелінійного елемента у схемі (обмежника) утворюються комбінаційні частоти зосередженої завади, які надалі важко відфільтрувати. Вмикання обмежника після фільтра, що усуває вплив зосередженої завади, неефективна, тому що на виході такого фільтра тривалість імпульсної завади зростає, а амплітуда зменшується.

Метод миттєвого запирання приймача на час дії імпульсної завади також не позбавлений недоліків. По-перше, під час запирання й відмикання виникають перехідні процеси, що спотворюють сигнал; по-друге, сумарне вхідне колювання (сигнал плюс зосереджена й флуктуаційна завади) виявляється при цьому промодульованим імпульсом запирання, через що з'являються додаткові частотні складові, які можуть потрапити в смугу частот сигналу.

Можна відзначити частотно-часову дуальність між гармонійною й імпульсною завадами (спектральні характеристики зосередженої по спектру завади нагадують часові характеристики імпульсної, і навпаки). Ця обставина пояснює, чому заходи боротьби з імпульсною й зосередженою завадами в приймальному пристрої взаємно протилежні. Згадані вище ШСС можна з успіхом використовувати й для боротьби з імпульсними завадами внаслідок їхнього розходження за формою. Фільтр приймача, узгоджений з таким ШСС, перетворить сигнал у короткий інтенсивний (залежно від енергії сигналу) імпульс, тривалість якого обернено пропорційна смузі частот сигналу. Імпульсна ж завада перетворюється цим фільтром у колювання малої інтенсивності, яке має характер шуму, що слабо маскує сигнал.

За останні роки запропоновані схеми захисту від зосереджених і імпульсних завад, засновані на оцінюванні цих завад і відніманні сигналу оцінки із прийнятого колювання (компенсаційні методи). При цьому такі схеми в умовах зміни характеристик завад стають *адаптивними*. Компенсаційні методи можуть працювати, якщо параметри завади змінюються досить повільно. Ефективним заходом захисту від зосереджених і імпульсних завад є рознесене приймання одночасно по частоті й за часом (розд. 19). З гілок частотного рознесення варто вибирати ті, у яких менше (чи немає зовсім) зосереджених завад, а з гілок роз-

несення в часі ті, де немає імпульсної завади. Досить ефективні також методи захисту від різних завад, засновані на завадостійкому кодуванні (модуль 4).

### **Контрольні питання**

1. Поясніть методи захисту від зосереджених завад.
2. Поясніть методи захисту від імпульсних завад.

## **21. КІЛЬКІСНА МІРА ЗАВАДОСТІЙКОСТІ АНАЛОГОВИХ СИСТЕМ ПЕРЕДАВАННЯ. КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ ДЕМОДУЛЯТОРА**

Аналоговий сигнал – це первинний сигнал  $b(t)$ , що може неперервно змінюватися з часом і набувати будь-якої форми. Такі сигнали мають місце, наприклад, у телефонії, радіомовленні, телебаченні, телеметрії. Сигнал  $b(t)$  у цих випадках заздалегідь невідомий: відомо лише, що він належить до якоїсь множини або є реалізацією якогось випадкового процесу  $B(t)$ . Аналогові сигнали можуть передаватися *безпосередньо* або з *використанням модуляції*. У першому випадку переданий сигнал пропорційний аналоговому сигналу  $s(t) = kb(t)$ , де  $k$  – постійний множник. У другому випадку сигнал  $s(t)$  є якоюсь функцією аналогового сигналу  $b(t)$ . Методи аналогової модуляції вивчалися у модулі 1.

Структурна схема аналогової системи передавання має такий же вигляд, як і структурна схема цифрової системи передавання (рис. 1.1). Сигналом на вході демодулятора є сумарне коливання переданого сигналу  $s(t)$  і шуму  $n(t)$

$$z(t) = s(t) + n(t). \quad (21.1)$$

Шум  $n(t)$  є реалізацією стаціонарного гауссового процесу зі спектральною густиною потужності (СГП)  $N_0$  у смузі частот сигналу. Поза смугою частот сигналу СГП шуму дорівнює нулю.

*Задача полягає в тому, щоб за вхідним сигналом  $z(t)$  одержати (відновити) первинний сигнал  $\hat{b}(t)$ , який найменше відрізняється в сенсі деякого критерію від переданого сигналу  $b(t)$ .* Відтворений з деякою помилкою сигнал  $\hat{b}(t)$  називається оцінкою сигналу  $b(t)$ . Таким чином, задачу демодуляції сигналу  $z(t)$  можна розглядати як задачу одержання оцінки сигналу  $\hat{b}(t)$ . В окремому випадку, коли сигнал  $s(t)$  є функцією якогось параметра  $\lambda$ , що не залежить від часу, задача зводиться до оцінки параметра сигналу  $\lambda$ . При безпосередньому передаванні сигналу  $s(t) = kb(t)$  обчислення оцінки  $\hat{b}(t)$  зводиться до лінійної фільтрації сигналу. При передаванні модульованим сигналом  $s(t)$  оцінка сигналу  $\hat{b}(t)$  в демодуляторі здійснюється детектуванням і обробкою сигналу. У багатьох випадках обробка сигналів зводиться до тих або інших методів фільтрації й може здійснюватися як до детектора, так і після нього.

У загальному випадку *оптимальний демодулятор* становить пристрій, який *забезпечує найкраще (за заданим критерієм) відновлення сигналу  $\hat{b}(t)$  за сигналом  $z(t)$ .*

Мірою завадостійкості при передаванні аналогових сигналів є ступінь "відхилення" отриманої оцінки  $\hat{b}(t)$  від переданого сигналу  $b(t)$ . Чисельно завадостійкість виражається середнім квадратом помилки

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[\hat{b}(t) - b(t)]^2}, \quad (21.2)$$

де усереднення виконується за всіма можливими реалізаціями сигналів  $\hat{b}(t)$  і  $b(t)$ .

Різниця  $\varepsilon(t) = \hat{b}(t) - b(t)$  є завадою на виході демодулятора. Її середній квадрат  $\overline{\varepsilon^2(t)} = P_\varepsilon$  є потужністю завади на виході демодулятора. Потужність переданого сигналу  $P_b = \overline{b^2(t)}$  вважається заданою. Тоді можна визначити відношення потужностей сигналу й шуму на виході демодулятора  $\rho_{\text{вих}} = P_b/P_\varepsilon$ . Відношення потужностей сигналу й шуму на вході демодулятора  $\rho_{\text{вх}}$ , звичайно, відоме. У багатьох випадках як критерій завадостійкості приймають не середній квадрат помилки  $\overline{\varepsilon^2(t)}$ , а відношення сигнал/шум  $\rho_{\text{вих}}$ . Відношення сигнал/шум  $\rho_{\text{вх}}$  може бути покращене демодулятором. Це покращення залежить не тільки від способу оброблення сигналу, але й від виду модуляції. Тому завадостійкість аналогових систем передавання зручно оцінювати *виграшем у відношенні сигнал/шум*

$$g = \frac{\rho_{\text{вих}}}{\rho_{\text{вх}}} = \frac{P_b/P_\varepsilon}{P_s/P_n}. \quad (21.3)$$

При  $g > 1$  відношення сигнал/шум при демодуляції покращується. У деяких випадках  $g < 1$ , що означає, що при демодуляції має місце не виграш, а програш.

На практиці використовуються й інші критерії вірності передавання неперервних повідомлень. Наприклад, критерій розбірливості при передаванні мовних повідомлень, критерій максимальної помилки в телеметрії й ін.

Викладений нижче підхід до побудови оптимального демодулятора *застосуємо до випадку слабкої завади* (високого відношення сигнал/шум на вході демодулятора). Така ситуація властива аналоговим системам передавання, використовуваним у системах зв'язку й мовлення.

Критерієм оптимальності може бути:

в теоретичних викладках – мінімум середнього квадрата помилки відновлення первинного сигналу;

на практиці – максимум відношення сигнал/шум на виході демодулятора;

при порівнянні різних видів модуляції – максимальний виграш демодулятора у відношенні сигнал/шум.

Демодулятор сигналів аналогової модуляції обов'язково містить детектор, що відповідає використовуваному виду модуляції – його вихід пропорційний значенням інформаційного параметра модульованого сигналу. Для мінімізації помилки відновлення первинного сигналу необхідно виконати оптимальне оброблення:

– додетекторним фільтром відновити модульований сигнал;

– післядетекторним фільтром послабити небажані компоненти, що мають місце на виході детектора.

Із сказаного випливає схема оптимального демодулятора сигналів аналогової модуляції (рис. 21.1)



**Рисунок 21.1** – Схема оптимального демодулятора сигналів аналогової модуляції

У якості пристроїв додетекторного і післядетекторного оброблення, як правило, використовуються лінійні фільтри, хоча в деяких випадках потрібне нелінійне оброблення. Пояснюється це, насамперед, простотою реалізації лінійних фільтрів, які порівняно легко синтезуються, і існує розвинена теорія їхньої побудови.

### **Контрольні питання**

1. Які критерії завадостійкості використовуються в аналогових системах передавання?
2. З яких блоків складається схема оптимального демодулятора сигналів аналогової модуляції?

## **22. ОПТИМАЛЬНА ЛІНІЙНА ФІЛЬТРАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ СИГНАЛІВ**

Розглянемо теорію оптимальної лінійної фільтрації стаціонарних процесів – фільтр Колмогорова-Вінера або оптимальний лінійний фільтр (ОЛФ).

Нехай на вході лінійного фільтра з передатною функцією  $H(j\omega)$  діє сума корисного сигналу  $s(t)$  і завади  $n(t)$ . Відгук фільтра на цю дію – відновлений корисний сигнал  $\hat{s}(t)$  (оцінка сигналу  $s(t)$ ). Будемо вважати, що  $s(t)$  і  $n(t)$  – стаціонарні взаємнокорельовані процеси з відомими спектральними густинами потужності (СГП)  $G_s(f)$  і  $G_n(f)$ . Потрібно знайти таку функцію  $H(j\omega)$ , яка забезпечує мінімум середнього квадрату помилки відновлення сигналу

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[\hat{s}(t) - s(t)]^2}. \quad (22.1)$$

Інакше кажучи, критерієм оптимальності фільтра є мінімум середнього квадрату помилки відновлення сигналу. У такій постановці задача була вирішена А.М. Колмогоровим (1939 р.) для дискретних випадкових послідовностей і Н. Вінером (1941 р.) для неперервних процесів. Тому оптимальний (у зазначеному сенсі) лінійний фільтр називається фільтром Колмогорова-Вінера.

Діючі на вході фільтра сигнал  $s(t)$  і завада  $n(t)$  проходять через фільтр незалежно й створюють на виході фільтра відповідно фільтровані сигнал  $s_{\text{вих}}(t)$  і заваду  $n_{\text{вих}}(t)$ . З урахуванням цього помилка відновлення запишеться

$$\varepsilon(t) = \hat{s}(t) - s(t) = (s_{\text{вих}}(t) - s(t)) + n_{\text{вих}}(t) = \Delta s(t) + n_{\text{вих}}(t). \quad (22.2)$$

Доданок  $\Delta s(t)$  відбиває складову помилки, обумовлену лінійними спотвореннями корисного сигналу фільтром. Середній квадрат помилки  $\overline{\varepsilon^2(t)}$  запишеться

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{\Delta s^2(t)} + \overline{n_{\text{вих}}^2(t)}. \quad (22.3)$$

Величина лінійних спотворень корисного сигналу фільтром  $\overline{\Delta s^2(t)}$  залежить від ступеня відмінності АЧХ фільтра від постійної величини й ступеня відмінності ФЧХ від лінійної залежності. Середній квадрат шуму  $\overline{n_{\text{вих}}^2(t)}$  на виході фільтра залежить тільки від АЧХ фільтра. Для того щоб лінійні спотворення корисного сигналу були мінімальними, ФЧХ фільтра повинна бути лінійною

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0, \quad (22.4)$$

де  $t_0$  – затримка сигналу у фільтрі. Зрозуміло, що з урахуванням затримки співвідношення (22.1) має вигляд  $\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[\hat{s}(t) - s(t - t_0)]^2}$ . Це уточнення не впливає на критерій оптимальності, оскільки в системах зв'язку й мовлення очікувана затримка сигналу у фільтрі несуттєва.

Перейдемо до визначення АЧХ фільтра. Для цього визначимо спектральні густини потужностей лівої й правої частин співвідношення (22.2)

$$G_{\varepsilon}(\omega) = G_{\Delta s}(\omega) + G_{n_{\text{вих}}}(\omega). \quad (22.5)$$

Виразимо СГП завади на виході фільтра через СГП завади  $n(t)$  і шукану АЧХ фільтра:

$$G_{n_{\text{вих}}}(\omega) = G_n(\omega) H^2(\omega). \quad (22.6)$$

За визначенням СГП ергодичного процесу

$$G_{\Delta s}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{\Delta s}^2(\omega)}{T}, \quad (22.7)$$

де  $S_{\Delta s}(\omega)$  – амплітудний спектр помилки за рахунок лінійних спотворень  $\Delta s(t)$ ;

$T$  – тривалість реалізації  $\Delta s(t)$ .

Оскільки амплітудний спектр сигналу  $s_{\text{вих}}(t)$  визначається як  $S(\omega) \cdot H(\omega)$ , де  $S(\omega)$  – амплітудний спектр сигналу  $s(t)$ , то

$$S_{\Delta s}(\omega) = S(\omega)[H(\omega) - 1]. \quad (22.8)$$

Переходячи від амплітудних спектрів до СГП, одержимо

$$G_{\Delta s}(\omega) = G_s(\omega)[H(\omega) - 1]^2. \quad (22.9)$$

Після підстановки співвідношень (22.6) і (22.9) в (22.5) одержимо

$$G_{\varepsilon}(\omega) = G_s(\omega)[H(\omega) - 1]^2 + G_n(\omega)H^2(\omega). \quad (22.10)$$

Середній квадрат помилки відновлення (середня потужність) обчислюється

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = P_\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_\varepsilon(\omega) d\omega. \quad (22.11)$$

Оскільки функція  $G_\varepsilon(\omega) \geq 0$  на всіх частотах, то, забезпечивши  $\min G_\varepsilon(\omega)$  на всіх частотах, досягнемо мінімуму величини  $\overline{\varepsilon^2(t)}$ . Шукану АЧХ  $H(\omega)$  визначимо з умови екстремуму функції  $G_\varepsilon(\omega)$ :

$$\frac{dG_\varepsilon(\omega)}{dH(\omega)} = 0; \quad (22.12)$$

$$\frac{dG_\varepsilon(\omega)}{dH(\omega)} = 2G_s(\omega)[H(\omega) - 1] + 2G_n(\omega)H(\omega) = 0. \quad (22.13)$$

Після розв'язання рівняння (22.13) одержимо вираз для АЧХ фільтра

$$H(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_n(\omega)}. \quad (22.14)$$

На рис. 22.1 ілюструється АЧХ ОЛФ, визначена співвідношенням (22.14).

З рис. 22.1 видно особливості АЧХ ОЛФ:

- на частотах, де  $G_n(f) = 0$ , значення АЧХ  $H(f) = 1$  – у цих областях частот фільтр не повинен вносити спотворень;
- на частотах, де  $G_s(f) = 0$ , значення АЧХ  $H(f) = 0$  – у цих областях частот фільтр повинен повністю послабляти складові завади;
- на частотах, на яких  $G_s(f) = G_n(f)$ , АЧХ  $H(f) = 0,5$ ;
- на інших частотах значення АЧХ визначаються обчисленнями за формулою (22.14).

Підставимо вираз (22.14) у співвідношення (22.10) для визначення СГП помилки:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(\omega) &= G_s(\omega) \left[ \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_n(\omega)} - 1 \right] + G_n(\omega) \frac{G_s^2(\omega)}{[G_s(\omega) + G_n(\omega)]^2} = \\ &= \frac{G_s(\omega)G_n^2(\omega) + G_n(\omega)G_s^2(\omega)}{[G_s(\omega) + G_n(\omega)]^2} = \frac{G_s(\omega)G_n(\omega)[G_s(\omega) + G_n(\omega)]}{[G_s(\omega) + G_n(\omega)]^2} = \frac{G_s(\omega)G_n(\omega)}{G_s(\omega) + G_n(\omega)}. \end{aligned} \quad (22.15)$$

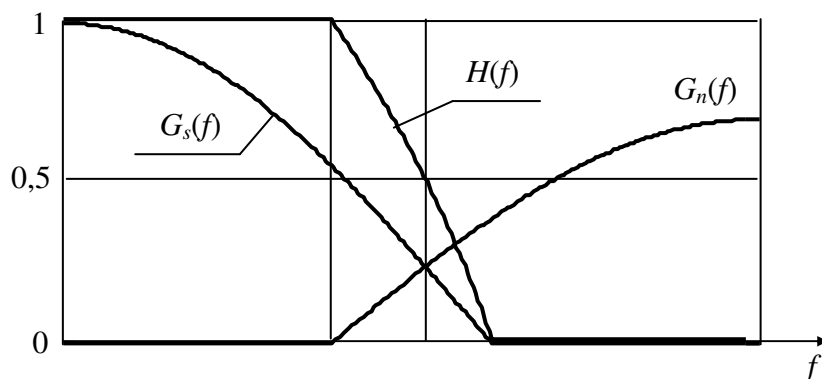


Рисунок 22.1 – Графічна ілюстрація АЧХ ОЛФ

При підстановці співвідношення (22.15) у вираз (22.11) можна обчислити середній квадрат помилки відновлення сигналу  $\overline{\varepsilon^2(t)}$ .

З (22.15) видно, що помилка  $\overline{\varepsilon^2(t)}$  дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли  $G_s(f)G_n(f) = 0$ , тобто коли спектри сигналу й завади не перекриваються (хоча б один із співмножників дорівнює нулю).

Перепишемо співвідношення (22.14) у вигляді

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + G_n(\omega)/G_s(\omega)}. \quad (22.16)$$

З останнього співвідношення видно, що коефіцієнт передачі оптимального фільтра на кожній із частот тим менший, чим більше відношення  $G_n(f)/G_s(f)$  на цій частоті.

Варто відмітити, що оптимальні лінійні фільтри, що забезпечують мінімум помилки  $\overline{\varepsilon^2(t)}$ , істотно відрізняються від узгоджених фільтрів, розглянутих раніше. Якщо основне призначення розглянутих тут фільтрів складається в найкращому відтворенні форми сигналу, то задача узгоджених фільтрів полягає у формуванні максимального відношення сигнал/шум у момент відліку.

При використанні ОЛФ в аналогових системах зв'язку й мовлення виявляється така особливість. Має місце високе відношення спектральних густин сигналу й шуму:  $G_s(f)/G_n(f) \gg 1$ . Вираз для АЧХ ОЛФ (22.14) у випадку смугових сигналів переходить у наступний

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_{\min} \leq f \leq f_{\max}, \\ 0, & f < f_{\min}, \quad f > f_{\max}, \end{cases} \quad (22.17)$$

де  $f_{\min}$  і  $f_{\max}$  – граничні частоти спектра сигналу. У випадку НЧ сигналів

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f \leq F_{\max}, \\ 0, & f > F_{\max}, \end{cases} \quad (22.18)$$

де  $F_{\max}$  – максимальна частота спектра сигналу.

Таким чином, оптимальні лінійні фільтри в системах зв'язку й мовлення мають П-подібну АЧХ.

### **Контрольні питання**

1. Сформулюйте критерій оптимальності ОЛФ.
2. За якої умови помилку відновлення сигналу можна звести до нуля?
3. Поясніть відмінність ОЛФ і узгодженого фільтра з точки зору ослаблення завади.

## 23. ПОРІВНЯННЯ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ ОПТИМАЛЬНИХ ДЕМОДУЛЯТОРІВ СИГНАЛІВ АНАЛОГОВИХ ВИДІВ МОДУЛЯЦІЇ

Ми з'ясували, що в умовах слабких завад демодулятор повинен містити: фільтр додетекторної обробки, детектор, фільтр післядетекторної обробки. Для того, щоб демодулятор був оптимальним, фільтри повинні бути оптимальними. В умовах слабкої завади АЧХ фільтрів повинні бути П-подібними:

- фільтр додетекторної обробки – смуговий фільтр, граничні частоти смуги пропускання якого збігаються із граничними частотами спектра модульованого сигналу;

- фільтр післядетекторної обробки – ФНЧ, частота зрізу якого збігається з максимальною частотою спектра первинного сигналу  $F_{\max}$ .

Завадостійкість визначимо в умовах дії АБГШ. Аналіз завадостійкості полягає у визначенні виграшу демодулятора у відношенні сигнал/шум

$$g = \frac{P_b/P_\epsilon}{P_s/P_n}. \quad (23.1)$$

Для визначення виграшу потрібно визначити 4 величини:  $P_b$ ,  $P_\epsilon$ ,  $P_s$ ,  $P_n$ .

**Оптимальний демодулятор сигналу балансової модуляції.** Математично сигнал БМ записується

$$s_{\text{БМ}}(t) = A_0 b(t) \cos 2\pi f_0 t. \quad (23.2)$$

Смуговий фільтр має смугу пропускання  $\Delta F_{\text{БМ}} = 2F_{\max}$ . Для детектування БМ сигналу необхідно використовувати синхронний детектор (рис. 23.1). ФНЧ, що є обов'язковим елементом схеми синхронного детектора, використовується як фільтр післядетекторної обробки, тобто частота зрізу фільтра дорівнює  $F_{\max}$ , а АЧХ у смузі пропускання постійна й дорівнює 1.

Середня потужність модульованого сигналу

$$P_s = \overline{s_{\text{БМ}}^2(t)} = \overline{A_0^2 b^2(t) \cos^2 2\pi f_0 t} = 0,5 A_0^2 P_b. \quad (23.3)$$

Середня потужність завади на вході демодулятора  $P_n$ .

На виході перемножувача за рахунок сигналу маємо

$$A_0 b(t) \cos 2\pi f_0 t \cdot 2 \cos 2\pi f_0 t = A_0 b(t) + A_0 b(t) \cos 2\pi 2f_0 t. \quad (23.4)$$

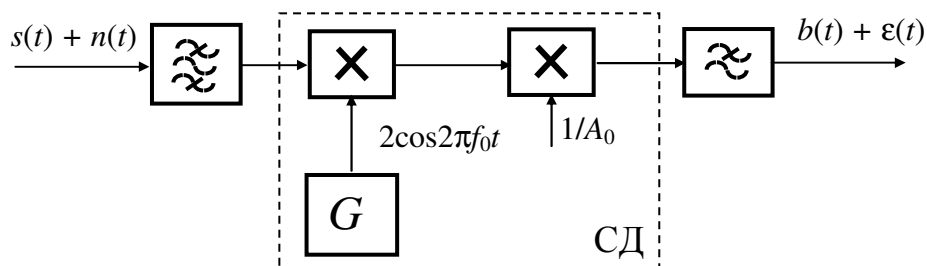


Рисунок 23.1 – Схема оптимального демодулятора сигналів БМ і ОМ

ФНЧ пропускає перший компонент, а другий ослабляє. З урахуванням множення на  $1/A_0$  на виході демодулятора одержимо  $b(t)$ . Його середня потужність дорівнює  $P_b$ .

Заваду на вході синхронного детектора (як смуговий процес) представимо квадратурними складовими

$$n(t) = N_C(t)\cos 2\pi f_0 t + N_S(t)\sin 2\pi f_0 t. \quad (23.5)$$

Потужність завади ділиться нарівно між квадратурними складовими, потужність кожної з них  $P_n/2$ . Квадратурна складова завади не проходить через синхронний детектор, і на виході демодулятора одержимо

$$\epsilon(t) = N_C(t)/A_0. \quad (23.6)$$

Оскільки  $\overline{N_C^2(t)\cos^2 2\pi f_0 t} = P_n/2$ , а ліва частина рівності дорівнює  $0,5 \overline{N_C^2(t)}$ , то  $\overline{N_C^2(t)} = P_n$ , а

$$P_\epsilon = P_n/A_0^2. \quad (23.7)$$

Визначимо виграш демодулятора

$$g_{\text{БМ}} = \frac{P_b \cdot A_0^2 \cdot P_n}{P_n \cdot 0,5 \cdot A_0^2 \cdot P_b} = 2. \quad (23.8)$$

**Оптимальний демодулятор сигналу односмугової модуляції.** Математично сигнал ОМ записується

$$s_{\text{ОМ}}(t) = A_0 b(t)\cos 2\pi f_0 t \pm A_0 \tilde{b}(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (23.9)$$

Оптимальний демодулятор сигналу ОМ виконується за схемою, поданою на рис. 23.1. Смуговий фільтр має смугу пропускання  $\Delta F_{\text{ОМ}} = F_{\text{мах}}$ .

Середня потужність модульованого сигналу

$$P_s = \overline{s_{\text{ОМ}}^2(t)} = A_0^2 P_b. \quad (23.10)$$

Середня потужність завади на вході синхронного детектора  $P_n$ .

Синхронний детектор не пропускає квадратурну складову сигналу ОМ, тому на основі аналізу демодуляції сигналу БМ на виході демодулятора сигналу ОМ одержимо сигнал  $b(t)$ . Його середня потужність дорівнює  $P_b$ . Проходження завади через синхронний детектор проаналізовано вище й отримане значення потужності завади на виході демодулятора (23.7).

Визначимо виграш демодулятора

$$g_{\text{ОМ}} = \frac{P_b \cdot A_0^2 \cdot P_n}{P_n \cdot A_0^2 \cdot P_b} = 1. \quad (23.11)$$

**Оптимальний демодулятор сигналу амплітудної модуляції на базі синхронного детектора.** Математично сигнал АМ записується

$$s_{\text{АМ}}(t) = A_0(1 + m_{\text{АМ}} \cdot b(t))\cos 2\pi f_0 t. \quad (23.12)$$

Схема демодулятора сигналу АМ подана на рис. 11.5. Смуговий фільтр має смугу пропускання  $\Delta F_{\text{АМ}} = 2F_{\text{max}}$ . Виходячи з поданого вище аналізу, очевидно, що на виході ФНЧ за рахунок сигналу отримаємо  $A_0 + A_0 m_{\text{АМ}} \cdot b(t)$ . Фільтр верхніх частот послабляє постійну складову  $A_0$  і пропускає другу складову  $A_0 m_{\text{АМ}} \cdot b(t)$ .

Середня потужність модульованого сигналу

$$P_s = \overline{s_{\text{АМ}}^2(t)} = 0,5 A_0^2 (1 + m_{\text{АМ}} P_b). \quad (23.13)$$

Для подальшого аналізу зручно врахувати (див. модуль 1), що  $P_b = 1/K_A^2$ , де  $K_A$  – коефіцієнт амплітуди сигналу  $b(t)$ .

Проходження шуму через синхронний детектор проаналізовано вище. Потужність шуму на виході демодулятора сигналу АМ

$$P_\varepsilon = \frac{P_n}{m_{\text{АМ}}^2 A_0^2}. \quad (23.14)$$

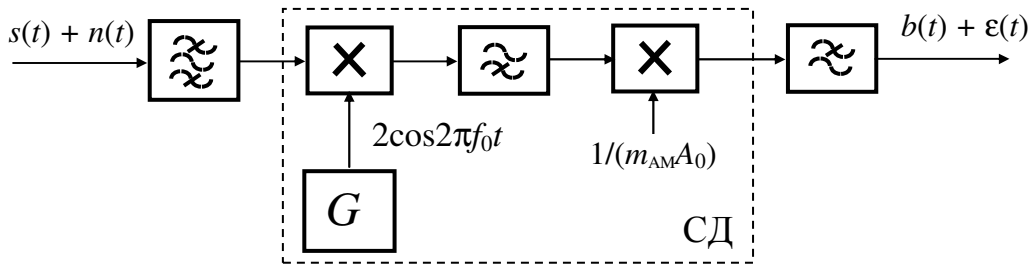


Рисунок 23.2 – Схема оптимального демодулятора сигналу АМ

Визначимо виграш демодулятора

$$g_{\text{АМ}}^{(\text{СД})} = \frac{1/K_A^2 \cdot m_{\text{АМ}}^2 A_0^2 \cdot P_n}{P_n \cdot 0,5 A_0^2 (1 + m_{\text{АМ}}^2 / K_A^2)} = \frac{2m_{\text{АМ}}^2}{m_{\text{АМ}}^2 + K_A^2}. \quad (23.15)$$

**Демодулятор сигналу амплітудної модуляції на базі детектора обвідної.** Схему такого демодулятора подано на рис. 23.3. Вона відрізняється від схеми демодулятора на рис. 23.2 типом амплітудного детектора – синхронний детектор замінено детектором обвідної з метою спрощення схеми демодулятора. Вихідний сигнал детектора обвідної пропорційний обвідній вхідного сигналу  $\sqrt{[A_0(1 + m_{\text{АМ}} b(t)) \cos 2\pi f_0 t + N_c(t) \cos 2\pi f_0 t]^2 + [N_s(t) \sin 2\pi f_0 t]^2}$ .

Тому заваду на виході демодулятора створюють як косинусна, так і синусна складові. Потужність завади  $\varepsilon(t)$  буде удвічі більшою, ніж у випадку синхронного детектора. Отже, виграш демодулятора буде удвічі меншим:

$$g_{\text{АМ}}^{(\text{ДО})} = \frac{m_{\text{АМ}}^2}{m_{\text{АМ}}^2 + K_A^2}. \quad (23.16)$$

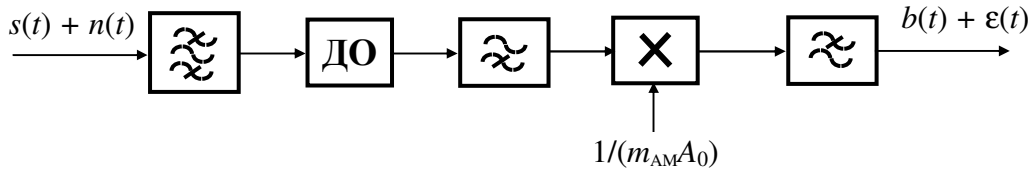


Рисунок 23.3 – Схема демодулятора сигналу АМ на базі детектора обвідної

**Оптимальний демодулятор сигналу фазової модуляції.** Математично сигнал ФМ записується

$$s_{\text{ФМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Delta\varphi_{\text{д}} \cdot b(t)), \quad (23.17)$$

де  $\Delta\varphi_{\text{д}}$  – девіація фази сигналу, яку часто називають індексом фазової модуляції  $m_{\text{ФМ}}$ .

Схема оптимального демодулятора сигналу ФМ подана на рис. 23.4: ФНЧ1 і ФНЧ2 мають частоти зрізу  $F_{\text{max}}(m_{\text{ФМ}} + 1)$ ; ФНЧ3 – фільтр післядетекторної обробки із частотою зрізу  $F_{\text{max}}$ ; АЧХ фільтрів постійна в смугах пропускання й дорівнює 1; ФД – фазовий детектор.

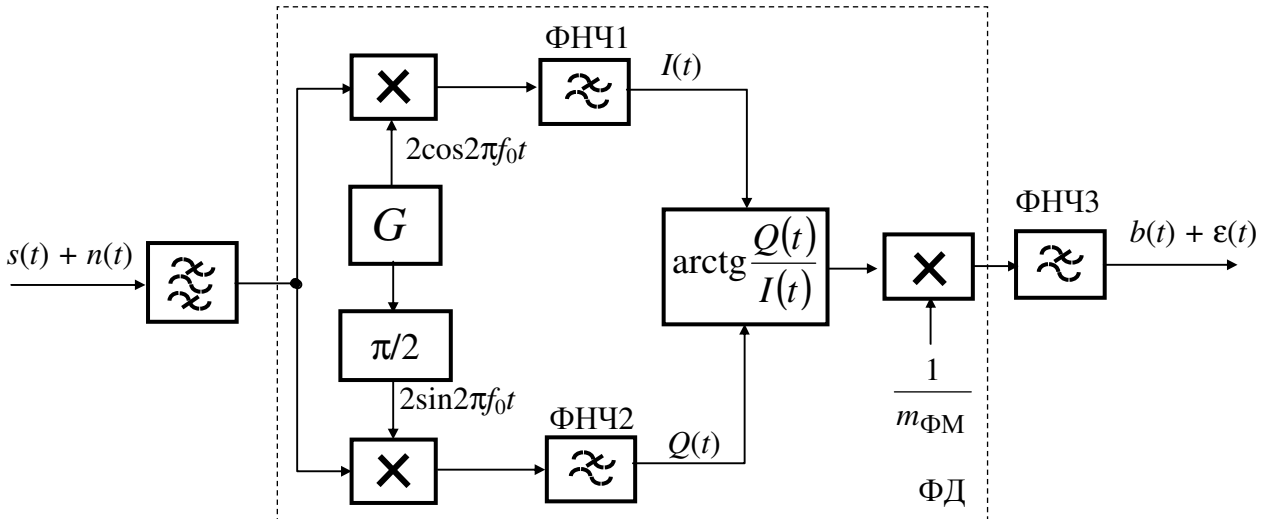


Рисунок 23.4 – Схема оптимального демодулятора сигналу ФМ

Середня потужність модульованого сигналу

$$P_s = \overline{s_{\text{ФМ}}^2(t)} = 0,5A_0^2. \quad (23.18)$$

Середня потужність вихідного сигналу  $P_b = 1/K_A^2$ .

Середня потужність завади на вході ФД  $P_n$ . Проходження завади через ФД аналізують за відсутності модулюючого сигналу, тобто  $b(t) \equiv 0$ , і  $s(t) = A_0 \cos 2\pi f_0 t$ . Заваду представляють квадратурними складовими у вигляді (23.5). Тоді

$$I(t) = (A_0 + N_c(t)) \cos 2\pi f_0 t, \quad Q(t) = N_s(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad \arctg \frac{Q(t)}{I(t)} = \frac{N_s(t)}{A_0 + N_c(t)}. \quad (23.19)$$

В умовах слабкої завади  $|N_c(t)| \ll A_0$ , і завада на виході ФД  $N_s(t)/(A_0 m_{\text{ФМ}})$ , а її потужність дорівнює  $P_n/(A_0 m_{\text{ФМ}})^2$ .

Смуга пропускання ФНЧ3 у  $\frac{(m_{\text{ФМ}} + 1)F_{\text{max}}}{F_{\text{max}}} = m_{\text{ФМ}} + 1$  раз менша, ніж смуга пропускання ФНЧ2 і ширина спектра завади  $N_s(t)$ .

Оскільки спектр завади рівномірний, то потужність завади  $\epsilon(t)$  в  $m_{\text{ФМ}} + 1$  раз менша, ніж потужність завади  $N_s(t)/(A_0 m_{\text{ФМ}})$  і визначається

$$P_{\epsilon} = \frac{P_n}{A_0^2 m_{\text{ФМ}}^2 (m_{\text{ФМ}} + 1)}. \quad (23.20)$$

Визначимо виграш демодулятора

$$g_{\text{ФМ}} = \frac{1/K_A^2 \cdot A_0^2 m_{\text{ФМ}}^2 (m_{\text{ФМ}} + 1) P_n}{P_n \cdot 0,5 A_0^2} = \frac{m_{\text{ФМ}}^2}{K_A^2} 2(m_{\text{ФМ}} + 1). \quad (23.21)$$

**Оптимальний демодулятор сигналу частотної модуляції.** Математично сигнал ЧМ записується

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + 2\pi \Delta f_{\text{д}} \int b(t) dt), \quad (23.22)$$

де  $\Delta f_{\text{д}}$  – деціяція частоти. Для наступних викладень зручно використовувати індекс ЧМ  $m_{\text{ЧМ}} = \Delta f_{\text{д}}/F_{\text{max}}$ .

Схема оптимального демодулятора сигналу ЧМ подана на рис. 23.5. Схема відрізняється від схеми демодулятора ФМ сигналу (рис. 23.4) наявністю диференціатора; ЧД – частотний детектор.

Середня потужність модульованого сигналу

$$P_s = \overline{s_{\text{ЧМ}}^2(t)} = 0,5 A_0^2. \quad (23.23)$$

Середня потужність сигналу на виході демодулятора  $P_b = 1/K_A^2$ .

Середня потужність завади на вході ЧД  $P_n$ .

Проходження завади через ЧД аналогічне проходженню завади через ФД, потрібно розглянути проходження завади  $N_s(t)/(A_0 2\pi \Delta f_{\text{д}})$  через диференціатор. Оскільки завада  $N_s(t)$  – квазібілий шум у смузі частот  $F_{\text{max}}(m_{\text{ЧМ}} + 1)$ , то спектральна густина потужності цієї завади на вході диференціатора

$$\frac{P_n}{F_{\text{max}}(m_{\text{ЧМ}} + 1)(A_0 2\pi \Delta f_{\text{д}})^2}, \quad 0 \leq f \leq F_{\text{max}}(m_{\text{ЧМ}} + 1).$$

Оскільки передатна функція диференціатора  $j\omega$ , то спектральна густина потужності завади на виході диференціатора

$$\frac{P_n (2\pi f)^2}{F_{\text{max}}(m_{\text{ЧМ}} + 1)(A_0 2\pi \Delta f_{\text{д}})^2}, \quad 0 \leq f \leq F_{\text{max}}(m_{\text{ЧМ}} + 1). \quad (23.24)$$

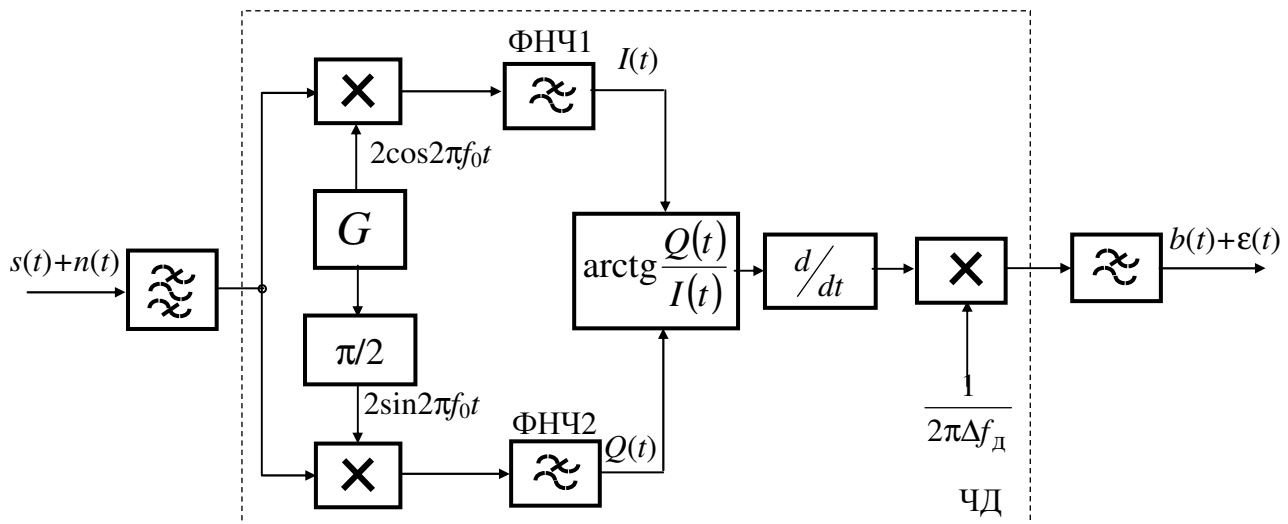


Рисунок 23.5 – Схема оптимального демодулятора сигналу ЧМ

Визначимо потужність завади  $\varepsilon(t)$

$$P_{\varepsilon} = \int_0^{F_{\max}} \frac{P_n f^2}{F_{\max} (m_{\text{ЧМ}} + 1) (A_0 \Delta f_d)^2} df = \frac{P_n \cdot F_{\max}^3}{3 F_{\max} (m_{\text{ЧМ}} + 1) A_0^2 \Delta f_d^2} = \frac{P_n}{3 A_0^2 m_{\text{ЧМ}}^2 (m_{\text{ЧМ}} + 1)}.$$

Визначимо виграш демодулятора

$$g_{\text{ЧМ}} = \frac{1/K_A^2 \cdot 3 A_0^2 m_{\text{ЧМ}}^2 (m_{\text{ЧМ}} + 1) P_n}{P_n \cdot 0,5 A_0^2} = \frac{3 m_{\text{ЧМ}}^2}{K_A^2} 2(m_{\text{ЧМ}} + 1). \quad (23.25)$$

При аналізі ми виявили, що спектральна густина потужності завади  $\varepsilon(t)$  має параболічну залежність – формула (23.24):

$$G_{\varepsilon}(f) = k f^2, \quad (23.26)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. Ця особливість спектра часто враховується при розробці систем передавання зі ЧМ.

**Порівняння аналогових систем передавання.** Основними параметрами, за якими порівнюються системи передавання, є виграш демодулятора у відношенні сигнал/шум  $g$  і коефіцієнт розширення смуги частот при модуляції  $\alpha = \Delta F_{\text{сЧМ}}/F_{\text{макс}}$ . Для розглянутих методів модуляції ці параметри зведені в табл. 23.1.

Проведемо порівняння числових значень параметрів при деяких вихідних даних:  $K_A = 5$ ;  $m_{\text{ЧМ}} = m_{\text{ФМ}} = 6$ ;  $m_{\text{АМ}} = 1$ .

Обчислення дають:  $g_{\text{АМ}} = 0,038$ ;  $g_{\text{БМ}} = 2$ ;  $g_{\text{ОМ}} = 1$ ;  $g_{\text{ЧМ}} = 60,5$ ;  $g_{\text{ФМ}} = 20,2$ .

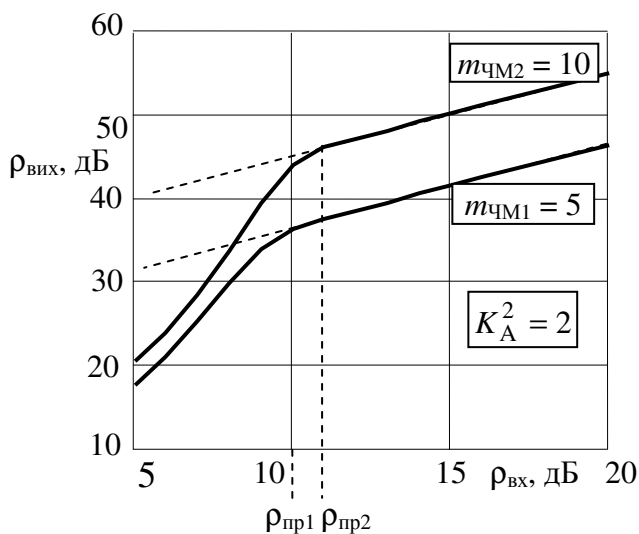
Порівняння числових значень виграшу показує, що найнижча завадостійкість властива системі передавання з АМ: виграш  $g_{\text{АМ}} \ll 1$ , що логічно назвати програшем. Проте, АМ використовується в системах радіомовлення, де цей недолік компенсується простотою демодулятора на основі детектора обвідної (величезна кількість більш простих радіоприймачів і один радіопередавач із більшою потужністю, ніж при використанні БМ і ОМ).

Найвища завадостійкість властива системі передавання з ЧМ. «Платою» за високу завадостійкість є широка смуга частот сигналу. Так, при  $F_{\text{макс}} = 3,4$  кГц  $\Delta F_{\text{ЧМ}} = 47,6$  кГц, у той час як смуга частот сигналу ОМ  $\Delta F_{\text{ОМ}} = 3,4$  кГц.

**Таблиця 23.1** – Основні параметри аналогових систем передавання

| Метод модуляції | $g$                                                         | $\alpha$               | Примітки                              |
|-----------------|-------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| АМ              | $\frac{2m_{\text{АМ}}^2}{m_{\text{АМ}}^2 + K_{\text{А}}^2}$ | 2                      | Синхронний детектор                   |
|                 | $\frac{m_{\text{АМ}}^2}{m_{\text{АМ}}^2 + K_{\text{А}}^2}$  | 2                      | Детектор обвідної                     |
| БМ              | 2                                                           | 2                      |                                       |
| ОМ              | 1                                                           | 1                      |                                       |
| ЧМ              | $\frac{3m_{\text{ЧМ}}^2}{K_{\text{А}}^2} \cdot \alpha$      | $2(m_{\text{ЧМ}} + 1)$ | $\rho_{\text{вх}} > \rho_{\text{пр}}$ |
| ФМ              | $\frac{m_{\text{ФМ}}^2}{K_{\text{А}}^2} \cdot \alpha$       | $2(m_{\text{ФМ}} + 1)$ | $\rho_{\text{вх}} > \rho_{\text{пр}}$ |

**Поріг завадостійкості демодулятора сигналу ЧМ.** Із співвідношення для виграшу демодулятора ЧМ (23.25) випливає, що, чим більший індекс  $m_{\text{ЧМ}}$ , тим більший виграш (правда, ціною збільшення смуги частот сигналу). Може

**Рисунок 23.6** – Завадостійкість демодулятора сигналу ЧМ

показатися, що це дає можливість працювати демодулятору зі слабким сигналом (низьким відношенням сигнал/шум). Але, коли відношення сигнал/шум на вході демодулятора  $\rho_{\text{вх}}$  менше порогового відношення сигнал/шум  $\rho_{\text{пр}}$ , то виграш демодулятора різко зменшується (рис. 23.6). Таке явище різкого зменшення величини виграшу називають порогом завадостійкості приймання сигналу ЧМ.

Порогове відношення сигнал/шум  $\rho_{\text{пр}}$  дещо залежить від значення  $m_{\text{ЧМ}}$  (рис. 23.6). Вважають, що демодулятор за схемою стандартного

частотного детектора характеризується орієнтовним значенням  $\rho_{\text{пр}} = 10$ . Область значень  $\rho_{\text{вх}}$ , коли  $\rho_{\text{вх}} < \rho_{\text{пр}}$ , – це неробоча область.

Були запропоновані так звані порогопонижуючі схеми демодуляторів сигналів ЧМ, які одержали назви:

- демодулятор зі слідкуючим фільтром;
- демодулятор зі зворотним зв'язком за частотою;
- демодулятор на основі синхронно-фазового детектора.

Схеми цих демодуляторів описані у спеціальній літературі. Демодулятори, що виконані за такими схемами, характеризуються пороговим відношенням сигнал/шум 5...7 дБ (залежно від вихідних даних на систему передавання). Зниження  $\rho_{\text{пр}}$  дозволяє:

- 1) працювати демодулятору з більш низьким відношенням сигнал/шум;
- 2) збільшити виграш, тому що

$$\rho_{\text{вх}} = \frac{P_s}{N_0 \Delta F_{\text{ЧМ}}} = \frac{P_s}{N_0 2F_{\text{max}} (m_{\text{ЧМ}} + 1)},$$

і якщо допустити зменшення відношення сигнал/шум  $\rho_{\text{вх}}$ , то можна збільшити індекс  $m_{\text{ЧМ}}$ , а збільшення  $m_{\text{ЧМ}}$  призводить до збільшення виграшу.

### ***Контрольні питання***

1. Проведіть порівняння виграшу у відношенні сигнал/шум демодуляторів сигналів АМ, БМ, ОМ, ЧМ і ФМ.
2. Поясніть, у чому полягає явище «порог завадостійкості приймання сигналу ЧМ».
3. Що таке порогопонижуюча схема?

## РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота студентів над матеріалом модуля має такі складові:

- опрацювання додаткового матеріалу, що задається на лекціях;
- підготовка до лабораторних та практичних занять;
- виконання курсової роботи (частини 1); завдання на виконання курсової роботи викладач видає на початку семестру на електронних або паперових носіях;
- підготовка до іспиту.

### *Перелік питань до іспиту*

1. Кількісні міри завадостійкості цифрових та аналогових систем передавання.

2. Критерій оптимальності демодуляторів сигналів цифрової модуляції. Алгоритми демодуляції:

- правило рішення за максимумом апостеріорної ймовірності;
- правило рішення за максимумом правдоподібності;
- правило рішення з розбивкою простору канальних символів на області сигналів.

3. Способи обчислення координат сигналу, що демодулюється, у просторі канальних символів.

4. Узгоджений фільтр, визначення, вивід формул і їх аналіз:

- пікового відношення сигнал/шум на виході фільтра;
- виграшу фільтра у відношенні сигнал/шум;
- комплексної передатної функції, АЧХ і ФЧХ фільтра;
- імпульсного відгуку фільтра;
- форми сигналу на виході фільтра при дії на його вході узгодженого з ним сигналу;
- форми сигналу на виході фільтра при дії на його вході сигналу, не узгодженого з фільтром.

5. Призначення формуючого та узгодженого фільтрів у модемах сигналів цифрової модуляції. АЧХ цих фільтрів.

6. Корелятор, схема, призначення. Порівняти оброблення сигналу в демодуляторі корелятором і узгодженим фільтром.

7. Схема оптимального демодулятора сигналу цифрової модуляції (АІМ-4, АМ-2, ЧМ-2, ФМ-2, ФМ-4, ФМ-8, КАМ-16). Пояснити принцип роботи схеми. Сформулювати вимоги до окремих блоків демодулятора.

8. Вивести формулу ймовірності помилки канального символу в двійковій системі передавання: канал з АБГШ, задана віддаль між сигналами.

9. Використавши формулу ймовірності помилки канального символу в двійковій системі передавання, вивести формулу ймовірності помилки біта в системі передавання заданим сигналом (АІМ-4, АМ-2, ЧМ-2, ФМ-2, ФМ-4, ФМ-8, КАМ-16), якщо задано середню потужність модульованого сигналу, швидкість цифрового сигналу.

10. Порівняти завадостійкість систем передавання заданими сигналами (АІМ-2, АІМ-4, АМ-2, ЧМ-2, ФМ-2, ФМ-4, ФМ-8, КАМ-16).

11. Двійковий цифровий сигнал зі швидкістю  $R$  передається каналом зв'язку зі смугою пропускання  $F_k$  заданим сигналом (АІМ-2, АІМ-4, АМ-2, ЧМ-2, ФМ-2, ФМ-4, ФМ-8, КАМ-16). Задано відношення середніх потужностей сигналу і шуму на вході демодулятора  $P_s/P_n$ . Обчислити ймовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора, вважаючи, що демодулятор оптимальний.

12. Визначити необхідне відношення середніх потужностей сигналу і шуму на вході демодулятора  $P_s/P_n$  для забезпечення ймовірності помилки  $p$ . Задано сигнал (АІМ-2, АІМ-4, АМ-2, ЧМ-2, ФМ-2, ФМ-4, ФМ-8, КАМ-16), швидкість цифрового сигналу  $R$  і смуга пропускання каналу зв'язку  $F_k$ .

13. Пояснити призначення тактової синхронізації в демодуляторах сигналів цифрової модуляції. Описати принцип побудови схеми тактової синхронізації.

14. Пояснити призначення схеми відновлення несінного коливання в демодуляторах сигналів цифрової модуляції. Описати принцип побудови схеми відновлення несінного коливання. Пояснити, що таке детектор помилки Костаса.

15. Пояснити, що таке невизначеність фази опорного коливання в демодуляторах сигналів цифрової модуляції. Пояснити принцип формування й демодуляції, завадостійкість приймання сигналу:

- двійкової фазорізницевої модуляції (ФРМ-2);
- четвіркової фазорізницевої модуляції (ФРМ-4).

16. Пояснити принцип (схеми) некогерентної демодуляції сигналів АМ-2, ЧМ-2 і ФРМ-2. Провести порівняння завадостійкості когерентного і некогерентного способів демодуляції сигналів АМ-2, ЧМ-2 і ФРМ-2.

17. Пояснити причини виникненням МСІ в системах передавання, методи зменшення чи усунення МСІ, методи оцінювання завадостійкості систем передавання в умовах МСІ.

18. Перелічити причини неоптимальності реальних демодуляторів сигналів цифрової модуляції. Пояснити, що таке енергетичні втрати демодуляції.

19. Пояснити, що таке дружні та частотно-селективні завмирання, принципи просторового, часового, частотного та поляризаційного рознесення, методи обробки рознесених сигналів, принцип оброблення сигналу Rake-приймачем, принцип передавання методом OFDM.

20. Джерела виникнення та характеристики зосереджених і імпульсних завад. Пояснити методи захисту від зосереджених і імпульсних завад.

21. Навести схему оптимального демодулятора заданого сигналу аналогової модуляції (АМ, БМ, ОМ, ЧМ, ФМ). Сформулювати вимоги до окремих блоків демодулятора.

22. Сформулювати критерій оптимальності оптимального лінійного фільтра (ОЛФ). Вивести формулу для АЧХ ОЛФ. Пояснити, за якої умови помилку відновлення сигналу можна звести до нуля. Пояснити відмінність ОЛФ і узгодженого фільтра з точки зору ослаблення завади.

23. Провести порівняння виграшу у відношенні сигнал/шум демодуляторів сигналів АМ, БМ, ОМ, ЧМ і ФМ. Пояснити, у чому полягає явище «поріг завадостійкості приймання сигналу ЧМ».

## ПЕРЕЛІК ЗНАНЬ І УМІНЬ, ЯКІ ПОВИНЕН НАБУТИ СТУДЕНТ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ 3

### **Знання:**

1. Задачі та методи оброблення сигналів електрозв'язку в демодуляторах.
2. Оптимальні демодулятори сигналів аналогових та цифрових видів модуляції (критерії, алгоритми).
3. Завадостійкість приймання сигналів аналогових та цифрових видів модуляції.

### **Уміння:**

1. Розраховувати потенційну завадостійкість сигналів цифрових видів модуляції.
2. Розраховувати завадостійкість демодуляторів сигналів аналогових видів модуляції.

## ЛІТЕРАТУРА

### Основна

1. **Стеглов В.К.** Теорія електричного зв'язку: [підручник для ВНЗ] / В.К.Стеглов, Л.Н. Беркман; за ред. В.К. Стеглова. – К.: Техніка, 2006.
2. **Теория** электрической связи: [учебник для вузов] / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров; под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1998.

### Додаткова

3. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Скляр Б. [2-е изд., испр.]; пер. с англ. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2003. – 1104 с.
4. **Теория** передачи сигналов: [учебник для вузов] / [А.Г. Зюко и др.]; под ред. А.Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1986.
5. **Панфілов І.П.** Теорія електричного зв'язку: [Підручник для вузів першого та другого рівнів акредитації] / І.П. Панфілов, В.Ю. Дирда, А.В. Капацін – К.: Техніка, 1998.
6. **Методичні** вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни “Теорія електричного зв'язку” – Частина 1 та 2/ [П.В. Іващенко та ін.]. – Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2004.

*Навчальне видання*

**Іващенко Петро Васильович**

**ТЕОРІЯ ЗВ'ЯЗКУ**

**Модуль 3. Теорія завадостійкості приймання сигналів електрозв'язку**

**Навчальний посібник**

для студентів, що навчаються

за напрямом вищої освіти **6.050903 – Телекомунікації**

Редактор – *Гусак В.Т.*

Комп'ютерне редагування та макетування – *Кірдогло Т.В.*