Міністерство освіти і науки України

Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М.

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

для фахівців у галузі зв'язку

Навчальний посібник
для студентів та аспірантів

Одеса 2017

УДК План УМН 2017 р.

Рецензенти: к.т.н., доц. каф. вищої математики Григор'єва Т.І.,
д.ф.-м.н., професор каф. фізики Вікулін І.М.

Стрелковська І.В. Операційне числення для фахівців в галузі зв'язку: навча. посіб. / Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. – Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2017. – 120 с.

В навчальному посібнику розглядається операційне числення на основі інтегрального перетворення Лапласа та його різноманітні застосування, зокрема, в телекомунікаціях та радіотехніці.

Ухвалено	Затверджено
На кафедрі вищої математики	методичною радою
Та рекомендовано до друку	академії зв'язку.
Протокол № ____	Протокол № 5
від «___» __________ р.	від 28.02.2017 р.

© Стрелковська І.В., Паскаленко В.М., 2017
© Одеська національна академії зв'язку ім. О.С. Попова, 2017

ПЕРЕДМОВА

В сучасних умовах вимоги до математичної культури студентів та аспірантів невпинно зростають. Автори підручника мали за мету передати більш глибокі та спеціалізовані знання студентам та аспірантам, ніж у традиційних підручниках з вищої математики, яка вивчається в теперішніх вишах.

Операційне числення – це один з методів математичного аналізу, який дозволяє приводити до досліджень властивостей спеціальних функцій, до рішень диференціальних рівнянь тощо.

Операційне числення, яке відоме вже з початку XIX століття, набуло великого поширення та розвитку завдяки працям Хевісайда, який широко застосовував операційні методи в електротехніці.

В навчальному посібнику розглядається операційне числення на основі інтегрального перетворення Лапласа та його різноманітні застосування, зокрема, в телекомунікаціях та радіотехніці.

Навчальний посібник складається з чотирьох розділів і складає чотири теми: пряме перетворення Лапласа, обернене перетворення Лапласа, застосування операційного числення до розв’язання лінійних диференціальних рівнянь та систем лінійних диференціальних рівнянь, застосування операційного числення до дослідження перехідних процесів в електричних колах.

Кожен з розділів включає велику кількість розв’язаних завдань. В кінці навчального посібника для самоперевірки містяться контрольні запитання, перевірні тести та тренувальні вправи. Також додається допоміжна література для більш детального розгляду матеріалу з кожної вищевказаної теми.

ЗМІСТ

1 ПРЯМЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1.1 Операційне числення, основні поняття

Операційне числення – один із методів математичного аналізу, що дозволяє в ряді випадків за допомогою простих засобів розв’язувати складні математичні задачі [1].

Раніше він називався *символічним обчисленням*. У 1892 році з'явилася робота англійського вченого О. Хевісайда, присвячена застосуванню методу символічного числення до розвання задач з теорії поширення електричних коливань у проводах. Праці Хевісайда поклали початок систематичного застосування символічного, або операційного, числення та вирішення фізичних і технічних завдань. Однак значно розвинене в працях Хевісайда операційне числення не отримало математичного обґрунтування, і багато його результатів залишилися недоведеними. Наукове обґрунтування з’явилось значно пізніше, коли було встановлено зв'язок між функціональним перетворенням Лапласа й оператором диференціювання [2].

Операційне числення – це *символічний* метод, який дозволяє значно спрощувати розв’язання багатьох задач. Так, операційне числення застосовується до розв’язання звичайних диференціальних рівнянь, лінійних рівнянь з частинними похідними, за допомогою яких описуються перехідні процеси лінійних систем в задачах електротехніки, радіоелектроніки імпульсної техніки та інших прикладних дисциплін. В деяких випадках саме класичними методами не вдається знайти точний розв’язок диференціального рівняння, його можна знайти методом операційного числення.

Цінність операційного числення полягає у тому, що методи операційного числення дозволяють операцію диференціювання замінити на операцію множення; операцію інтегрування замінити на операцію ділення, а лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами перевести в алгебраїчні рівняння і т.ін.

В основі операційного числення лежать так звані перетворення, а саме: перетворення Лапласа, перетворення Лапласа-Карсона, перетворення Карсона-Хевісайда, перетворення Мелліна, перетворення Рімана-Мелліна, перетворення Фур’є, перетворення Бесселя і т.ін.

У межах даного навчального посібника будемо розглядати перетворення Лапласа, як одне з найбільш поширених перетворень.

1.2 Перетворення Лапласа
1.2.1 Оригінал та умови його існування

В и з н а ч е н н я . *Оригіналом* (за Лапласом) називається комплекснозначна функція $f(t) = U(t) + iV(t)$ дійсного аргументу *t*, яка задовольняє наступні умови:

1) функція $f(t)$ у інтервалі $(-\infty;+\infty)$ та її похідні до другого порядку включно є неперервними або мають скінченну кількість точок розриву першого роду;

2) $f(t) \equiv 0$, якщо $t < 0$;

3) існують такі числа $M > 0$ та $S > 0$, що при $t > 0$

$$|f(t)| < Me^{st}. \tag{1.1}$$

Перелічені умови називаються умовами Діріхле.

Нехай число S_0 є таким, що для усіх $S = S_0 + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ нерівність (1.1) виконується, а для $S = S_0 - \varepsilon$ нерівність (1.1) не виконується, тоді число S_0 називається *показником зростання функції* $f(t)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо функція $f(t)$ є обмеженою функцією, тобто, якщо існує таке число $M > 0$, що $|f(t)| \le M$, то тоді справедлива нерівність

$$|f(t)| \le Me^{0t}.$$

Це означає, що показником зростання функції $f(t)$ є число $S_0 = 0$.

Якщо ж функція $f(t)$ не є обмежена, то для того щоб виконувалась умова

$$|f(t)| \le Me^{S_0 t}$$

характер зростання функції $f(t)$ не може перебільшувати характер зростання показникової функції $e^{S_0 t}$. У такому разі показником зростання функції $f(t)$ вважають число $S_0 > 0$.

1.2.2 Зображення та умови його існування

Визначення. *Зображенням* (за Лапласом) функції-оригіналу $f(t)$ з показником зростання S_0 називається така функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, що визначається формулою

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt, \tag{1.2}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ називається *інтегралом Лапласа*.

Теорема (достатня умова існування зображення). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, то інтеграл Лапласа у півплощині $\operatorname{Re} p > S_0$ збігається абсолютно, а у півплощині $\operatorname{Re} p > S_1 > S_0$ цей інтеграл збігається абсолютно і рівномірно, а функція $F(\varphi)$ при цьому є аналітичною у півплощині $\operatorname{Re} p > S_0$,

Теорема (необхідна умова існування зображення). Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником зростання S_0 та точка $p = s + i\sigma$

прямує до нескінченності у такий спосіб, що $\operatorname{Re} p = S$ необмежено зростає, то справедливою є формула

$$\lim_{|p|\to\infty} F(p) = 0. \qquad (1.3)$$

Формулою (1.2) встановлюється зв'язок між оригіналом та зображенням. Така формула називається *прямим перетворенням Лапласа*. Символічне позначення перетворення Лапласа є таким

$$f(t) \to F(p). \qquad (1.4)$$

Сукупність усіх функцій, які задовольняють умові Діріхле, тобто функцій, які є оригіналами, називається *простором оригіналів*, а сукупність їхніх зображень називається *простором зображень*.

Пряме перетворення Лапласа можна розглядати як певну послідовність кроків, а саме:

1) невідома функція $f(t)$ подана через деякі функції $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$, які вважаємо оригіналами;

2) знаходимо зображення функцій $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$: $F_1(p), F_2(p), ..., F_n(p)$;

3) виконуючи відповідні прості операції над зображеннями $F_1(p), F_2(p), ..., F_n(p)$, знаходимо зображення $F(p)$ функції $f(t)$;

4) за зображенням $F(p)$ можна знайти шукану функцію $f(t)$.

Розглянемо спеціальну функцію, яка називається *одиничною функцією Хевісайда*:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } t \ge 0; \\ 0, \text{ якщо } t < 0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Функція Хевісайда показана на рис. 1.1. Це найпростіша функція-оригінал з показником зростання $S_0 = 0$. В деяких випадках функцію $f(t)$, яка не задовольняє умову 2) існування оригіналу, а саме, $f(t) \equiv 0$, де $t < 0$ необхідно використовувати як оригінал. Тоді замість функції $f(t)$ можна розглядати функцію $f(t)\,\eta(t)$:

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} f(t), \text{ якщо } t \ge 0; \\ 0, \text{ якщо } t < 0. \end{cases}$$

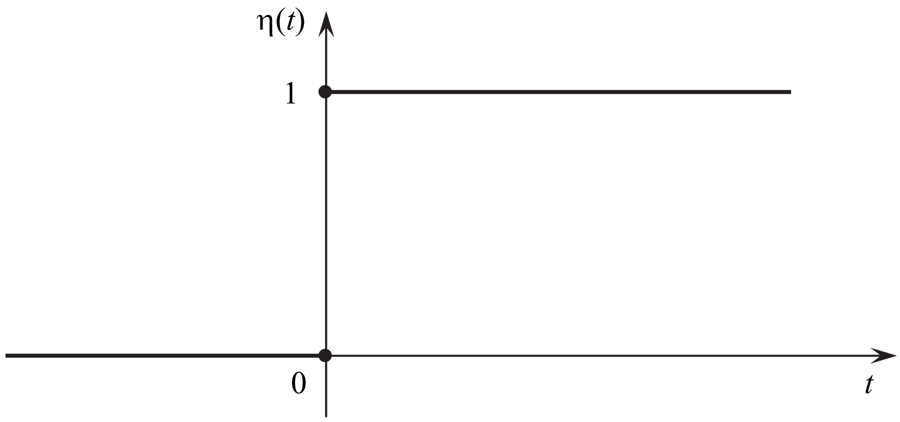


Рисунок 1.1

Така функція вже задовольняє зазначену умову. Надалі домовимося вважати, що функції $f(t)$, які ми будемо розглядати, вже задовольняють умову $f(t) \equiv 0$, коли $t < 0$, тобто ці функції вже були помножені на одиничну функцію $\eta(t)$. При цьому будемо зберігати позначення $f(t)$ замість позначення $\eta(t)\ f(t)$.

Наприклад, функція $f(t) = t^8$ не задовольняє умову $f(t) \equiv 0$, якщо $t < 0$, а функція $\eta(t) \cdot t^8$ задовольняє усі умови існування оригіналу.

Якщо розглядається деякий фізичний процес, то якщо навіть функція $f(t)$ умову 2) існування оригіналу не задовольняє на це можна не звертати уваги, оскільки будь-який фізичний процес розглядається лише за умови, що $0 \le t < +\infty$.

1.3 Основні властивості перетворення Лапласа

Властивість 1. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, то і функція $\varphi(t) = |f(t)|$ також є оригіналом з показником зростання S_0.

Властивість 2. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, то і функція $\varphi(t) = f(\alpha t)$, де α – дійсне додатне число, також є оригіналом з показником зростання S_0.

Властивість 3. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, то і функція $\varphi(t) = e^{\lambda t} f(t)$, де λ – деяке число, також є оригіналом з показником зростання $S_0 + \operatorname{Re}\lambda$, якщо $S_0 + \operatorname{Re}\lambda > 0$ і з показником зростання, який дорівнює нулю, якщо $S_0 + \operatorname{Re}\lambda < 0$.

Властивість 4. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, то і функція

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, \text{якщо}\ t < \tau\ (\tau > 0); \\ f(t-\tau), \text{якщо}\ t \ge \tau \end{cases}$$

також є оригіналом з показником зростання S_0.

Властивість 5 (лінійності). Якщо функції $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ є оригіналом з показниками зростання, які відповідно дорівнюють $S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, ..., S_0^{(n)}$, а функції $F_1(p), F_2(p), ..., F_n(p)$ – це інші оригінали, то тоді функція $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + ... + \lambda_n f_n(t)$, де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – деякі дійсні числа, також є оригіналом з показником зростання $S_0 = \max\left\{S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, ..., S_0^{(n)}\right\}$ і справедливою формула

$$\left(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + ... + \lambda_n f_n(t)\right) \to \left(\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p) + ... + \lambda_n F_n(p)\right), \quad (1.6)$$

де $\operatorname{Re} p > \max\left\{S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, ..., S_0^{(n)}\right\}$.

Властивість 6 (подібності). Якщо функція $f\ (t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, $F(p)$– її зображення, а α – дійсне число, то тоді функція

$f(\alpha t)$ також є оригіналом з показником зростання αS_0 і справедливою формулою

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \tag{1.7}$$

де $\operatorname{Re} p > \alpha S_0$.

Така властивість дозволяє знайти зображення функції зі змінним масштабом.

Властивість 7 (запізнювання). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а функція $F(p)$ – її зображення, тобто $f(t) \to F(p)$, та $t \ge \tau > 0$, то тоді функція $f(t-\tau)$ також є оригіналом з показником зростання S_0 і справедливою є формула

$$f(t-\tau) \to e^{-\tau p} F(p), \tag{1.8}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$, а τ – будь-яке дійсне додатне число таке, що $t > \tau$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Властивість запізнювання характеризує наступну ситуацію. Якщо функція $f(t)$ має графік, показано на рис. 1.2, то графік функції $f(t-\tau)$ має ту ж саму форму, але порівняно з графіком функції $f(t)$ він отриманий паралельним переносом графіка функції $f(t)$ уздовж осі Ot вправо на величину τ (рис. 3).

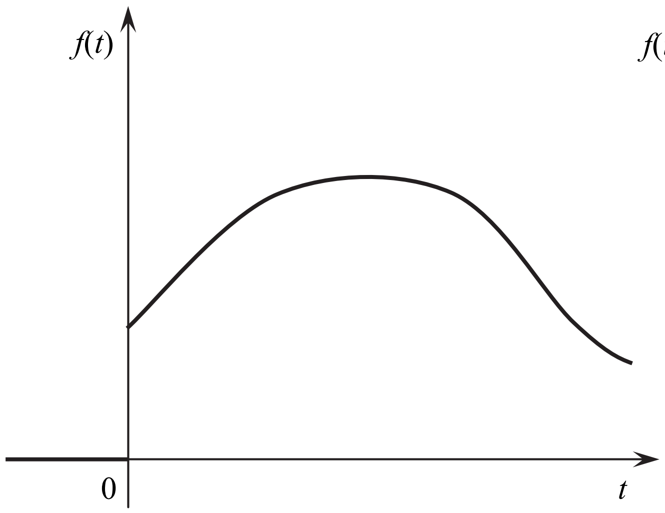


Рисунок 1.2

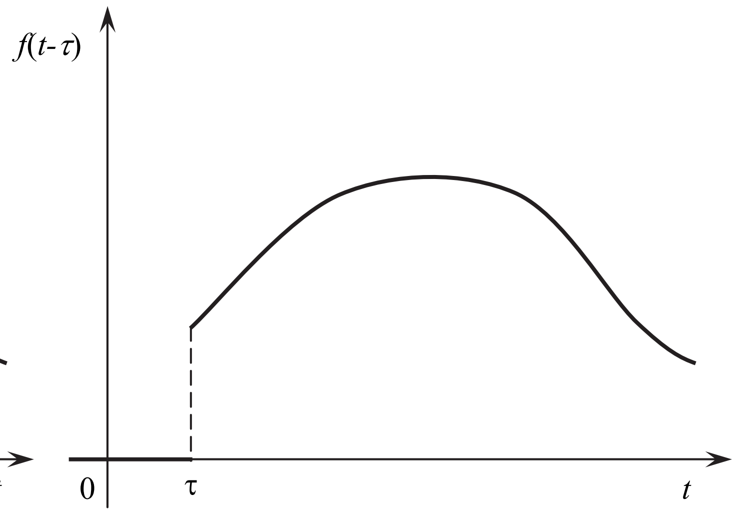


Рисунок 1.3

Властивість 8 (випередження). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а функція $F(p)$ є її оригіналом, тобто $f(t) \to F(p)$ та $t \ge \tau > 0$, то тоді функція $f(t+\tau)$ також є оригіналом з показником зростання S_0 і справедливою є формула

$$f(t+\tau) \to e^{\tau p}\left(F(p) - \int_0^{\tau} e^{-pt} f(t)\,dt\right), \tag{9}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$, а τ – будь-яке дійсне додатне число.

ЗАУВАЖЕННЯ. Графіки функцій $f\ (t)$ та $f(t+\tau)$ зображені відповідно на рис. 1.4 та 1.5.

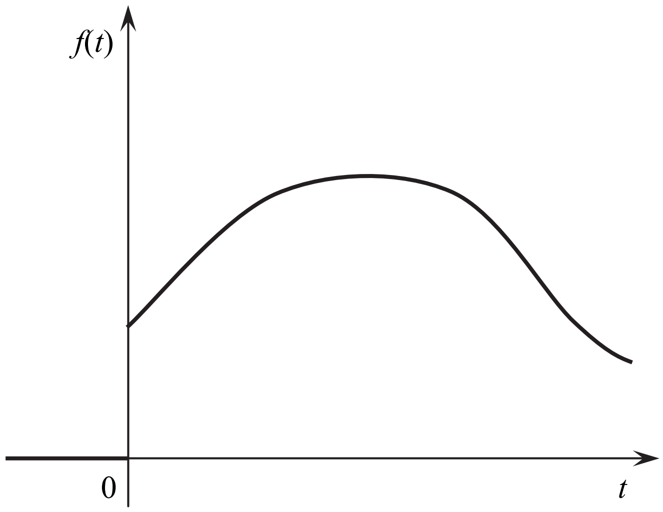


Рисунок 1.4

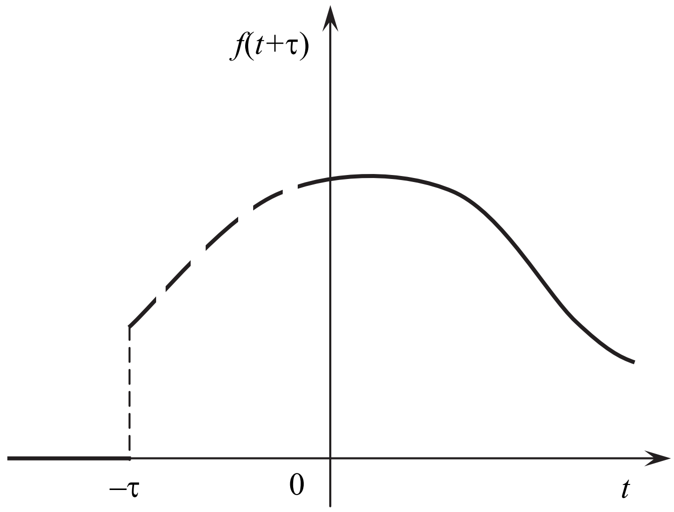


Рисунок 1.5

Властивість 9 (періодичність оригіналу). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0 та $f\ (t)$ є періодичною функцією з періодом *T*, а функція $F(p)$ є її зображенням, то функція $f_0(t)$ задана у вигляді

$$f_0(t)=\begin{cases} f(t), \text{якщо } 0\le t\le T;\\ 0, \text{якщо } t>T,\end{cases}$$

також є оригіналом з показником зростання S_0 і справедливою є формула

$$f(t)\to\frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}, \qquad (1.10)$$

якщо

$$F_0(p)=\int_0^T e^{-pt}f_0(t)dt, \qquad (1.11)$$

де $\operatorname{Re} p>S_0$.

Н а с л і д о к . Якщо періодична з періодом *T* функція $f\ (t)$ на півперіоді змінює знак на протилежний, тобто

$$f\left(t+\frac{T}{2}\right)=-f(t),$$

та функція $f_0(t)$ задана у вигляді

$$f_0(t)=\begin{cases} f(t), \text{якщо } 0<T<\dfrac{T}{2};\\ 0, \text{якщо } t>\dfrac{T}{2},\end{cases}$$

то

$$f(t) \to \frac{F_0(p)}{1 + e^{-\frac{T}{2}p}}, \qquad (1.12)$$

якщо
$$F_0(p) = \int_0^{-\frac{T}{2}} e^{-pt} f_0(t)dt, \qquad (1.13)$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Властивість 10 (про зміщення в аргументі зображення). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, функція $F(p)$ – її зображення, тобто $f(t) \to F(p)$, а p_0 – деяке комплексне число, то тоді функція $\varphi(t) = e^{-p_0 t} f(t)$ також є оригіналом з показником зростання $S_0 + \operatorname{Re} p_0$, коли $S_0 + \operatorname{Re} p_0 > 0$ та з показником зростання нуль, коли $S_0 + \operatorname{Re} p_0 < 0$ також є оригіналом і справедливою є формула
$$e^{-p_0 t} f(t) \to F(p + p_0), \qquad (1.14,\ а)$$
де $\operatorname{Re}(p + p_0) > S_0$

та
$$e^{p_0 t} f(t) \to F(p - p_0), \qquad (1.14,\ б)$$
де $\operatorname{Re}(p - p_0) > S_0$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Множення оригіналу $f(t)$ на множник $e^{-p_0 t}$, який діє як оператор обертання, призводить до того, що комплексний вектор p переходить у вектор $p + p_0$, а при множенні оригіналу $f(t)$ на множник $e^{p_0 t}$ комплексний вектор p переходить у вектор $p - p_0$.

Властивість 11 (диференціювання оригіналу). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, функція $F(p)$ – її зображення, тобто $f(t) \to F(p)$, і, до того ж, оригіналами є і функції $f'(t), f''(t), ..., f^n(t)$ з показником зростання S_0, то тоді справедливими є формули
$$\begin{cases} f'(t) \to pF(p) - f(0), \\ f''(t) \to p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \end{cases} \qquad (1.15)$$
де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Наслідок 1. Якщо $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$, то справедливою є формула
$$f^{(n)}(t) \to p^n F(p), \text{ де } \operatorname{Re} p > S_0, \qquad (1.16)$$
а
$$f^{(i)}(0) = \lim_{t \to 0+0} f^{(i)}(t),\ (i = 1; 2; ...; n).$$

Н а с л і д о к 2 . Якщо функція $f'(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а $F(p)$ – її зображення, яке є функцією аналітичною на нескінченності, то справедливою є формула

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty} pF(p) = f(0), \tag{1.17}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Н а с л і д о к 3 . Якщо функція $f'(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0 і існує границя $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, то тоді функція $f(t)$ також є оригіналом з показником зростання S_0 і справедливою є формула

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty), \tag{1.18}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Властивість 12 (диференціювання зображення). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а функція $F(p)$ – її зображення, де $\operatorname{Re} p > S_0$, то тоді функції $tf(t), t^2 f(t), ..., t^n f(t)$ також є оригіналами з показником зростання S_0 і справедливими є формули

$$\begin{cases} F'(p) \to -tf(t), \\ F''(p) \to (-1)^2 t^2 f(t), \\ \text{...} \\ F^{(n)}(p) \to (-1)^n t^n f(t), \end{cases} \tag{1.19}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Властивість 13 (інтегрування оригіналу). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а $F(p)$ – зображення функції $f(t)$, то справедливою є формула

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}, \tag{1.20}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Н а с л і д о к . Якщо неперервна на проміжку $[0;\infty)$ функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а $F(p)$ її зображення, тобто $f(t) \to F(p)$ і, до того ж, існує невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$, то справедливою є формула

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p), \tag{1.21}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Властивість 14 (інтегрування зображення). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, функція $F(p)$ – її зображення, тобто

$f(t) \to F(p)$, де $\operatorname{Re} p > S_0$ і, до того ж, інтеграл $\int_0^{+\infty} F(q)dq$ збігається у півплощині $\operatorname{Re} p > S_1 > S_0$, то тоді справедливою є формула

$$\frac{f(t)}{t} \to \int_p^{+\infty} F(q)dq, \tag{1.22}$$

якщо контур інтегрування належить півплощині $\operatorname{Re} p \geq S_1 > S_0$.

1.4 Властивості перетворення Лапласа, в основі яких лежить граничний перехід за параметром

Властивість 15 (граничний перехід за параметром). Якщо функція $f(t;\lambda)$ є оригіналом з показником зростання S_0 і λ – її параметр, а функція $F(p;\lambda)$ – зображення функції $f(t;\lambda)$ і, до того ж, існує границя $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f(t;\lambda)$, то тоді справедливою є формула

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t;\lambda) \to \lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p;\lambda), \tag{1.23}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Властивість 16 (диференціювання за параметром). Якщо функція $f(t;\lambda)$ є оригіналом з показником зростання S_0 і λ – її параметр, а функція $F(p;\lambda)$ – зображення функції $f(t;\lambda)$ і, до того ж, існує похідна $\dfrac{\partial f(t;\lambda)}{\partial\lambda}$, то тоді справедливою є формула

$$\frac{\partial f(t;\lambda)}{\partial\lambda} \to \frac{\partial F(p;\lambda)}{\partial\lambda}, \tag{1.24}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

Властивість 17 (інтегрування за параметром). Якщо функція $f(t;\lambda)$ є оригіналом з показником зростання S_0 і λ – її параметр, а функція $F(p;\lambda)$ – зображення функції $f(t;\lambda)$ і, до того ж, існують інтеграли $\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t;\lambda)d\lambda$ та $\int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p;\lambda)d\lambda$, то тоді справедливою є формула

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t;\lambda)d\lambda \to \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p;\lambda)d\lambda, \tag{1.25}$$

де $\operatorname{Re} p > S_0$.

1.5 Згортка функцій та її властивості

В и з н а ч е н н я . Згорткою двох неперервних на проміжку $[0;\infty)$ функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$ називається третьою функцією, яка позначається однією із формул

$$f_1(t)\cdot f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \qquad (1.26, а)$$

або

$$f_1(t)\cdot f_2(t)=\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau\,. \qquad (1.26, б)$$

Наведемо властивості згортки.

Властивість 1 (комутативність). Згортка функцій є комутативною, тобто

$$f_1(t)\cdot f_2(t)=f_2(t)\cdot f_1(t)\,. \qquad (1.27)$$

Властивість 2 (асоціативність). Згортка функцій є асоціативною, тобто

$$\left(f_1(t)\cdot f_2(t)\right)\cdot f_3(t)=f_1(t)\cdot\left(f_2(t)\cdot f_3(t)\right). \qquad (1.28)$$

Властивість 3 (дистрибутивність відносно додавання). Згортка функцій є дистрибутивною відносно додавання, тобто

$$f_1(t)\cdot\left(f_2(t)+f_3(t)\right)=f_1(t)\cdot f_2(t)+f_1(t)\cdot f_3(t)\,. \qquad (1.29)$$

Властивість 4 (про модуль згортки). Модуль згортки двох функцій не більше, ніж згортка їхніх модулів, тобто

$$\left|f_1(t)\cdot f_2(t)\right|\le\left|f_1(t)\right|\cdot\left|f_2(t)\right|. \qquad (1.30)$$

Властивість 5 (про неперервність згортки). Якщо $f_1(t)$ та $f_2(t)$ – функції неперервні на проміжку $[0;\infty)$, то їхня згортка також є неперервною функцією на проміжку $[0;\infty)$.

Властивість 6 (теорема Тітчмарша). Якщо $f_1(t)$ та $f_2(t)$ – функції, неперервні на проміжку $[0;\infty)$, а згортка цих функцій дорівнює нулю, тобто $f_1(t)*f_2(t)=0$, то хоча б одна з функцій $f_1(t)$ або $f_2(t)$ на проміжку $[0;\infty)$ дорівнює нулю.

Властивість 7 (згортка оригіналів). Якщо $f_1(t)$ та $f_2(t)$ є оригіналами з показником зростання S_0, то згортка цих функцій $f_1(t)\cdot f_2(t)$ також є оригіналом з показником зростання S_0.

Властивість 8 (теорема Бореля). Якщо функція $f_1(t)$ є оригіналом з показником зростання S_1, а функція $F_1(p)$ є зображенням функції $f_1(t)$; функція $f_2(t)$ є оригіналом з показником зростання S_2, а функція $F_2(p)$, де $\operatorname{Re}p>S_2$ є оригіналом функції $f_2(t)$, то тоді згортка оригіналів дорівнює добутку зображень, тобто справедлива формула

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\to F_1(p)F_2(p), \qquad (1.31)$$

де $\operatorname{Re}p>\max\{S_1;S_2\}$.

Властивість 9 (теорема Ефроса). Якщо функція $f_1(t)$ є оригіналом з показником зростання S_1, а функція $F_1(p)$, де $\operatorname{Re} p > S_1$ є зображенням функції $f_1(t)$; функція $f_2(t)$ є оригіналом з показником зростання S_2, а функція $F_2(p)e^{-\tau q(p)}$, де $\operatorname{Re} p > S_2$ є зображенням функції $f_2(t)$, то тоді справедливою є формула

$$\int_0^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t;\tau) d\tau \to F_2(p) F_1(q(p)), \tag{1.32}$$

де $\operatorname{Re} p > \max\{S_1; S_2\}$.

При цьому функції $f_1(t), f_2(t), F_1(p), F_2(p), q(p)$ мають бути аналітичними.

Властивість 10 (інтеграл Дюамеля). Якщо функція $f_1(t)$ є оригіналом з показником зростання S_1, а функція $F_1(p)$, де $\operatorname{Re} p > S_1$ є зображенням функції $f_1(t)$; функція $f_2(t)$ є оригіналом з показником зростання S_2, а функція $F_2(p)$, де $\operatorname{Re} p > S_2$, є зображенням функції $f_2(t)$, то тоді за умови, що функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$ неперервні на проміжку $[0; +\infty)$, і до того ж, неперервною у проміжку $[0; +\infty)$ є похідна $f_2'(t)$, є справедливою формула

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) + f_1(t) f_2(0) \to p F_1(p) F_2(p). \tag{1.33}$$

Наслідки з формули (33):

$$p F_1(p) F_2(p) \to f_1(0) f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2(t-\tau) d\tau; \tag{1.34}$$

$$p F_1(p) F_2(p) \to f_1(0) f_2(t) + \int_0^t f_2(\tau) f_1'(t-\tau) d\tau; \tag{1.35}$$

$$p F_1(p) F_2(p) \to f_2(0) f_1(t) + \int_0^t f_2'(\tau) f_1(t-\tau) d\tau; \tag{1.36}$$

$$p F_1(p) F_2(p) \to f_2(0) f_1(t) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau, \tag{1.37}$$

де $\operatorname{Re} p > \max\{S_1; S_2\}$.

В формулах (1.33) та (1.34) передбачається, що функція $f_2(t)$ неперервна на проміжку $[0; +\infty)$, а функція $f_1(t)$ – неперервно диференційовна на цьому проміжку. У формулах (1.35) та (1.36) передбачається, що функція $f_1(t)$ є неперервною на проміжку $[0; +\infty)$, а функція $f_2(t)$ – неперервно диференційовна на цьому проміжку.

Формули (1.33) – (1.37) називаються *формулами Дюамеля*, а інтеграли, що входять до складу цих формул, називаються *інтегралами Дюамеля*.

1.6 Деякі спеціальні функції та їх застосування в операційному численні

1. Гамма-функція

Визначення. Ейлеровим інтегралом другого роду називається інтеграл

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt. \tag{1.38}$$

Такий інтеграл збігається по α за умови, що $\alpha > -1$.

Визначення. Гамма-функцією комплексної змінної z називається така функція, яка позначається символом $\Gamma(z+1)$ та визначається формулою

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt, \tag{1.39}$$

де $\operatorname{Re} z > -1$.

Інтеграл $\int_0^\infty t^z e^{-t} dt$ рівномірно збігається по z, якщо $\operatorname{Re} z > -1$ та є аналітичною функцією від z у півплощині $\operatorname{Re} z > -1$.

Якщо функція $f(t) = t^z$, де z – комплексна змінна і $\operatorname{Re} z > -1$ є оригіналом з показником зростання $S_0 > 0$, то її зображення виражається через гамма-функцію:

$$t^z \to \frac{\Gamma(z+1)}{p^{z+1}}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0. \tag{1.40}$$

Зокрема, якщо $z = -\frac{1}{2}$, то

$$t^{-\frac{1}{2}} \to \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}}}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0$$

або

$$t^{-\frac{1}{2}} \to \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0 \tag{1.41}$$

та

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \to \frac{1}{\sqrt{p}}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0. \tag{1.42}$$

2. Інтеграл імовірностей

В и з н а ч е н н я . Інтегралом імовірностей називається інтеграл, який позначається символами $\Phi(t)$ або $erf(t)$ та визначається формулою

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx \qquad (1.43,\ \text{а})$$

або

$$erf(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx\,. \qquad (1.43,\ \text{б})$$

Інтеграл імовірностей є функцією параметра *t*, яка на проміжку $[0;\infty)$ є зростаючою та неперервною функцією. При цьому $erf(0)=0$, $erf(\infty)=1$.

Нарівні з функцією $erf(t)$ використовується функція, яка є доповненням до 1 функції $erf(t)$. Така функція позначається символом $Erf(t)$ та визначається формулою

$$Erf(t)=1-erf(t)\,. \qquad (1.44,\ \text{а})$$

або

$$Erf(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-x^2}dx\,. \qquad (1.44,\ \text{б})$$

Нехай функції

$$f_1(t)=e^t erf\left(\sqrt{t}\right),\ \ f_2(t)=erf\left(\sqrt{t}\right),\ \ f_3(t)=e^t Erf\left(\sqrt{t}\right),\ \ f_4(t)=Erf\left(\sqrt{t}\right)$$

є оригіналами.

Показники зростання цих функцій є такими: $S_1=1$; $S_2=0$; $S_3=1$; $S_4=0$.

Зображення цих функцій визначається формулами:

$$e^t erf\left(\sqrt{t}\right)\to\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}},\ \text{де } \operatorname{Re}p>1; \qquad (1.45)$$

$$erf\left(\sqrt{t}\right)\to\frac{1}{p\sqrt{p+1}},\ \text{де } \operatorname{Re}p>0; \qquad (1.46)$$

$$e^t Erf\left(\sqrt{t}\right)\to\frac{1}{p+\sqrt{p}},\ \text{де } \operatorname{Re}p>1; \qquad (1.47)$$

$$Erf\left(\sqrt{t}\right)\to\frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}},\ \text{де } \operatorname{Re}p>0. \qquad (1.48)$$

3. Інтегральний синус

В и з н а ч е н н я . Інтегральним синусом називається функція, яка позначається символом $si(t)$ та визначається формулою

$$si(t)=-\int_t^\infty\frac{\sin x}{x}dx\,. \qquad (1.49,\ \text{а})$$

Інтегральним синусом також називається функція

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt, \tag{1.49, б}$$

при цьому $Si(t) = \frac{\pi}{2} + si(t)$.

Якщо функції $si(t)$ та $Si(t)$ розглядати як оригінал з показником зростання $S_0 = 0$, то їхні зображення знаходяться відповідно за формулами

$$si(t) \to -\frac{1}{p}\operatorname{arctg}, \quad \text{де } \operatorname{Re} p > 0. \tag{1.50, а}$$

$$Si(t) \to \frac{1}{p}\operatorname{arctg}, \quad \text{де } \operatorname{Re} p > 0. \tag{1.50, б}$$

4. Інтегральний косинус

В и з н а ч е н н я . Інтегральним косинусом називається функція, яка позначається символом $ci(t)$ та визначається формулою

$$ci(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos}{x} dx. \tag{1.51, а}$$

Інтегральним косинусом також називається функція

$$Ci(t) = \ln \gamma t - \int_0^t \frac{1-\cos x}{x} dx + \ln t + c_1, \text{ де } c_1 = \text{const}, \tag{1.51, б}$$

при цьому $Ci(t) = -ci(t)$.

Якщо функції $ci(t)$ та $Ci(t)$ розглядати як оригінали з показником зростання $S_0 = 0$, то їхні зображення знаходяться відповідно за формулами

$$ci(t) \to \frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}, \quad \text{де } \operatorname{Re} p > 0, \tag{1.52, а}$$

$$Ci(t) \to \frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{c_1 - c}{p}. \tag{1.52, б}$$

5. Інтеграли Френеля

1) В и з н а ч е н н я . Синусом Френеля називається функція, яка позначається символом $S(t)$ та визначається формулою

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx. \tag{1.53}$$

Якщо функцію $S(t)$ розглядати як оригінал з показником зростання $S_0 = 0$, то її зображення знаходиться за формулою

$$S(t) \to \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1} - p}}{2p\sqrt{p^2+1}}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0. \tag{1.54}$$

2) В и з н а ч е н н я. Косинусом Френеля називається функція, яка позначається символом $C(t)$ та визначається формулою

$$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\cos}{\sqrt{x}}dx\,. \qquad (1.55)$$

Якщо функцію $C(t)$ розглядати як оригінал з показником зростання $S_0=0$, то її зображення знаходиться за формулою

$$C(t)\to\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2p\sqrt{p^2+1}}\text{, де }\operatorname{Re}p>0\,. \qquad (1.56)$$

6. Інтегральна показникова функція

В и з н а ч е н н я. Інтегральною показниковою функцією називається функція, яка позначається символом $-Ei(-t)$ та визначається формулою

$$-Ei(-t)=\int_t^\infty\frac{e^{-x}}{x}dx\,. \qquad (1.57)$$

Якщо функцію $-Ei(-t)$ розглядати як оригінал з показником зростання $S_0=0$, то її зображення знаходиться за формулою

$$-E_i(-t)\to\frac{1}{p}\ln(p+1),\ \text{ де }\operatorname{Re}p>0\,. \qquad (1.58)$$

7. Циліндричні функції

В и з н а ч е н н я. Диференціальне рівняння

$$z^2y''(z)+zy'(z)+(z^2-\nu^2)y(z)=0\,, \qquad (1.59)$$

де ν – комплексна стала така, що $\operatorname{Re}\nu>-1$; z – комплексна змінна; $y(z)$ шукана функція комплексної змінної називається *рівнянням циліндричних функцій* ν*-го порядку* або *рівнянням Бесселя* ν*-го порядку*.

В и з н а ч е н н я. Циліндричними функціями називаються такі функції, які є нетривіальними розв’язками рівняння Бесселя (1.59).

В и з н а ч е н н я. Функцією Бесселя першого роду порядку ν називається така функція, яка позначається символом $I_\nu(z)$ та визначається формулою

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, \qquad (1.60)$$

де $\operatorname{Re}\nu>-1$, $\Gamma(\nu+k+1)$ – гамма-функція, а степеневий ряд, який визначає функцію $I_\nu(z)$ збігається для усіх значень z, за винятком $z = 0$.

У випадку, коли $\nu=n$, де $n=0;1;2;3;\ldots$, маємо

$$I_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}. \qquad (1.61)$$

Якщо у формулі (1.61) припустити, що $n=0$, то дістанемо циліндричну функцію нульового порядку:

$$I_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}z^{2k}\ . \tag{1.62}$$

Якщо циліндричну функцію $I_0(z)$ розглядати як оригінал з показником зростання $S_0=0$, то її зображення знаходиться за формулою

$$I_0(t)\to\frac{1}{\sqrt{p^2+1}},\ \text{ де } \operatorname{Re}p>0. \tag{1.63}$$

Якщо циліндричну функцію $I_n(z)$ розглядати як оригінал з показником зростання $S_0=0$, то її зображення знаходиться за формулою

$$I_n(t)\to\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}},\ \text{ де } \operatorname{Re}p>0, \tag{1.64}$$

$n=0;1;2;\ldots$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Усі спеціальні функції, розглянуті у п.1.6, протабульовані.

1.7 Таблиця основних властивостей перетворення Лапласа

№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	Примітки
1	$f(t)$	$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt$	Пряме перетворення Лапласа, формула (1.2)
2	$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(t)$	$F(p)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(p)$, де $\lambda_i f_i(t)\to F_i(p)$, $\operatorname{Re}p>\max_{1\le i\le n}S_{0i}$	Властивість лінійності, формула (1.6)
3	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, $\operatorname{Re}p>\alpha S_0$, $\alpha>0$.	Властивість подібності, формула (1.7)
4	$f(t-\tau)$	$e^{-\tau p}F(p)$, $\operatorname{Re}p>S_0$	Властивість запізнювання, формула (1.8)
5	$f(t+\tau)$	$e^{\tau p}\left(F(p)-\int_0^{\tau}e^{-pt}f(t)dt\right)$, $\operatorname{Re}p>S_0$	Властивість випередження, формула (1.9)

6	$f(t)$	$\dfrac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$, де $F_0(p)=\int\limits_0^T e^{-pt} f_0(t)dt$, $f_0(t)=\begin{cases} f(t),\ 0<t<T; \\ 0,\ t>T \end{cases}$	Властивість періодичного оригіналу, формули (1.10), (1.11)
7	$e^{-p_0 t} f(t)$	$F(p+p_0)$, $\operatorname{Re}(p+p_0)>S_0$, p_0 – будь-яке число	Властивість зміщення в аргументі зображення, формула (1.14, а)
8	$e^{p_0 t} f(t)$	$e^{p_0 t} f(t) \to F(p-p_0)$, $\operatorname{Re}(p-p_0)>S_0$, p_0 – будь-яке число	Властивість зміщення в аргументі зображення, формула (14, б)
9	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$, $\operatorname{Re} p>S_0$, $n=1;2;3;\ldots$.	Властивість диференціювання зображення, формула (1.19)
10	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{F(p)}{p}$, $\operatorname{Re} p>S_0$	Властивість інтегрування оригіналу, формула (1.20)
11	$\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$	$\lim\limits_{p\to 0} F(p)$, $\operatorname{Re} p>S_0$	Властивість інтегрування оригіналу, формула (1.21)
12	$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^{+\infty} F(x)dx$, $\operatorname{Re} p>S_0$	Властивість інтегрування оригіналу, формула (1.22)
13	$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f(t;\lambda)$	$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} F(p;\lambda)$, $\operatorname{Re} p>S_0$	Властивість про граничний перехід по параметру, формула (1.23)
14	$\dfrac{\partial f(t;\lambda)}{\partial\lambda}$	$\dfrac{\partial F(p;\lambda)}{\partial\lambda}$, $\operatorname{Re} p>S_0$.	Властивість диференціювання за параметром, формула (1.24)
15	$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f(t;\lambda)d\lambda$	$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} F(p;\lambda)d\lambda$, $\operatorname{Re} p>S_0$	Властивість інтегрування за параметром, формула (1.25)

16	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(p)F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \max\{S_1; S_2\}$	Згортка функцій, формула (1.31)
17	$\int_0^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t;\tau) d\tau$	$F_2(p)F_1(q(p))$, $\operatorname{Re} p > \max\{S_1; S_2\}$	Теорема Ефроса, формула (1.32)
18	$\int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) + f_1(t) f_2(0)$	$pF_1(p)F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \max\{S_1; S_2\}$	Формула Дюамеля, формула (1.33)
19	$f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$pF_1(p)F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \max\{S_1; S_2\}$	Формула Дюамеля, формула (1.34)
20	$f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_2(\tau) f_1'(t-\tau) d\tau$	$pF_1(p)F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \max\{S_1; S_2\}$	Формула Дюамеля, формула (1.35)
21	$f_2(0)f_1(t) + \int_0^t f_2'(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$	$pF_1(p)F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \max\{S_1; S_2\}$	Формула Дюамеля, формула (1.36)
22	$f_2(0)f_1(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau$	$pF_1(p)F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \max\{S_1; S_2\}$	Формула Дюамеля, формула (1.37)
23	$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp$	$F(p)$	Обернене перетворення Лапласа

1.8 Таблиця зображень за Лапласом деяких елементарних функцій

№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	Примітки
1.	1	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	N – ціле число, $\operatorname{Re} p > 0$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} \alpha$
4	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} \alpha$
5	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} \beta \rvert$ та $\operatorname{Re} p > 0$, якщо β – дійсне число

6	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	$\operatorname{Re} p >\lvert\operatorname{Im}\beta\rvert$ та $\operatorname{Re} p > 0$, якщо β – дійсне число
7	$\operatorname{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$	$\operatorname{Re} p >\lvert\operatorname{Re}\beta\rvert$
8	$\operatorname{ch}\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$	$\operatorname{Re} p >\lvert\operatorname{Re}\beta\rvert$
9	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
10	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(-\alpha)+\lvert\operatorname{Im}\beta\rvert$ та $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(-\alpha)$, якщо β – дійсне число
11	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(-\alpha)+\lvert\operatorname{Im}\beta\rvert$ та $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(-\alpha)$, якщо β – дійсне число
12	$e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$	$\operatorname{Re} p >\lvert\operatorname{Re}\beta\rvert$
13	$e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$	$\operatorname{Re} p >\lvert\operatorname{Re}\beta\rvert$
14	$t^{n-1}e^{\alpha t}$	$\dfrac{(n-1)!}{(p-\alpha)^n}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$, $n = 0;1;2;3;\ldots$, $n > -1$
15	$t^n \sin\beta t$ ($n =$ 1; 2; …)	$n!\dfrac{\operatorname{Im}(p+i\beta)^{n+1}}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p >\lvert\operatorname{Im}\beta\rvert$
16	$t^n \cos\beta t$ ($n =$ 1; 2; …)	$n!\dfrac{\operatorname{Re}(p+i\beta)^{n+1}}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p >\lvert\operatorname{Im}\beta\rvert$
17	$\cos^2\beta t$	$\dfrac{p^2+2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$	$\operatorname{Re} p > 2\lvert\operatorname{Im}\beta\rvert$ та $\operatorname{Re} p > 0$, якщо β – дійсне число
18	$\sin^2\beta t$	$\dfrac{2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$	$\operatorname{Re} p > 2\lvert\operatorname{Im}\beta\rvert$ та $\operatorname{Re} p > 0$, якщо β – дійсне число
19	$\operatorname{ch}^2\beta t$	$\dfrac{p^2-2\beta^2}{p(p^2-4\beta^2)}$	$\operatorname{Re} p > 2\lvert\operatorname{Re}\beta\rvert$ та $\operatorname{Re} p > 0$, якщо β – дійсне число

20	$\mathrm{sh}^2\beta t$	$\dfrac{2\beta^2}{p(p^2-4\beta^2)}$	$\mathrm{Re}\,p>2\lvert\mathrm{Re}\beta\rvert$ та $\mathrm{Re}\,p>0$, якщо β – дійсне число
21	$\dfrac{1}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)$	$\dfrac{1}{p(p-\alpha)}$	$\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha$
22	$1-e^{-\frac{t}{\alpha}}$	$\dfrac{1}{p(1+\alpha p)}$	$\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)$
23	$\dfrac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$	$\dfrac{1}{p(p+\alpha)}$	$\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha$
24	$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$	$\mathrm{Re}\,p>0$
25	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\alpha t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+\alpha}}$	$\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}(-\alpha)$
26	$-\ln t-c$	$\dfrac{1}{p}\ln p$	$c=\mathrm{const}$ $\mathrm{Re}\,p>0$
27	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}\ln t$	$-\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}(\ln 4p+c)$	$c=\mathrm{const}$ $\mathrm{Re}\,p>0$
28	$\dfrac{1}{t}\left(e^{\beta t}-e^{\alpha t}\right)$	$\ln\dfrac{p-\alpha}{p-\beta}$	$\mathrm{Re}\,p>\max[\alpha;\beta]$
29	$\dfrac{1}{t}\sin\beta t$	$\mathrm{arctg}\dfrac{\beta}{p}$	$\mathrm{Re}\,p>\lvert\mathrm{Im}\beta\rvert$ та $\mathrm{Re}\,p>0$, якщо β – дійсне число
30	$\dfrac{1}{t}\mathrm{sh}\beta t$	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p+\beta}{p-\beta}$	$\mathrm{Re}\,p>\lvert\mathrm{Re}\beta\rvert$
31	t^z	$\dfrac{\Gamma(z+1)}{p^{z+1}}$	$\mathrm{Re}\,p>0$, z – комплексна змінна, $\mathrm{Re}\,p>-1$, формула (1.40)
32	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$	$\mathrm{Re}\,p>0$, формула (1.41)
33	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}$	$\mathrm{Re}\,p>0$, формула (1.42)
34	$e^t erf\left(\sqrt{t}\right)$	$\dfrac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$	$\mathrm{Re}\,p>1$, формула (1.45)
35	$erf\left(\sqrt{t}\right)$	$\dfrac{1}{p\sqrt{p+1}}$	$\mathrm{Re}\,p>0$, формула (1.46)

36	$e^t Erf\left(\sqrt{t}\right)$	$\dfrac{1}{p+\sqrt{p}}$	$\operatorname{Re} p > 1$, формула (1.47)
37	$si(t)$	$-\dfrac{1}{p}\operatorname{arctg}$	$\operatorname{Re} p > 0$, формула (1.50)
38	$ci(t)$	$\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$, формула (1.52)
39	$S(t)$	$\dfrac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2p\sqrt{p^2+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$, формула (1.54)
40	$C(t)$	$\dfrac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2p\sqrt{p^2+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$, формула (1.56)
41	$-Ei(-t)$	$\dfrac{1}{p}\ln(p+1)$	$\operatorname{Re} p > 0$, формула (1.58)
42	$I_0(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$, формула (1.63)
43	$I_n(t)$	$\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$, формула (1.64)
44	$e^{i\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-i\alpha}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(i\alpha) = -\operatorname{Im}\alpha$ та $\operatorname{Re} p > 0$, якщо α – дійсне число
45	$e^{-i\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+i\alpha}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(-i\alpha) = \operatorname{Im}\alpha$ та $\operatorname{Re} p > 0$, якщо α – дійсне число

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Числа p, α, β вважаються комплексними числами, зокрема, вони можуть бути і дійсними, тобто,їх уявна частина може дорівнювати нулю.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Більш повну таблицю оригіналів та зображень для перетворення Лапласа можна знайти у книзі серії «Справочная математическая библиотека»: таблицы интегральных преобразований, том 1 (преобразования Фурье, Лапласа, Меллина). – М.: Изд-во «Наука», главная редакция физико-математической литературы, 1969.

Приклади до пунктів 1.1 – 1.8

Приклад 1.1. Користуючись визначенням прямого перетворення Лапласа, довести формулу

$$e^t \to \frac{1}{p-1}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 1.$$

Р о з в ' я з а н н я

Функція $f(t)=e^t$ є оригіналом. За домовленістю, функція $f(t)$ є результат множення на одиничну функцію $\eta(t)$. Отже,

$$f(t)=\begin{cases} e^t, \text{ якщо } 0 \le t \le +\infty; \\ 0, \text{ якщо } \infty < \mathrm{t} < 0. \end{cases}$$

1) Задана функція є неперервною на проміжку $(-\infty;+\infty)$ разом зі своїми похідними з однією точкою розриву I роду $t=0$;

2) $f(t)=0$, якщо $t<0$;

3) $|f(t)|=\left|e^t\right| \le Me^t$, де $M>0$.

Отже, показник зростання $S_0=1$, а функція $f(t)=e^t$ може вважатись оригіналом.

За формулою (1.2) знаходимо зображення функції e^t, маючи на увазі, що $\operatorname{Re} p > 1$.

$$e^t \to \int_0^{+\infty} e^t e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(1-p)t} dt = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N e^{(1-p)t} dt = \lim_{N\to+\infty} \left.\frac{e^{(1-p)t}}{1-p}\right|_0^N =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{N\to+\infty} (e^{(1-p)N} - 1) = \frac{1}{1-p} \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{(p-1)N}} - 1\right) = \frac{1}{p-1}.$$

Отже, справедливою є формула

$$e^t \to \frac{1}{p-1}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 1.$$

Приклад 1.2. Користуючись визначенням прямого перетворення Лапласа, довести формулу

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}, \text{ де } \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$$

Р о з в ' я з а н н я

Будемо розглядати функцію

$$f(t)=\begin{cases} e^{\alpha t}, \text{ якщо } 0 \le t < +\infty; \\ 0, \text{ якщо } -\infty < t < 0. \end{cases}$$

Така функція разом зі своїми похідними є неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$ з однією точкою розриву I роду $t=0$.

Якщо $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, то тоді $\left|e^{\alpha t}\right| < Me^{\alpha t}$, а отже, показник зростання функції $S_0 = \mathrm{Re}\,\alpha > 0$. Звидси, задана функція може бути оригіналом. Знаходимо її зображення, маючи на увазі, що $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha$.

$$e^{\alpha t} \to \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - p)t} dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} e^{(\alpha - p)t} dt = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\alpha - p} e^{(\alpha - p)t} \Big|_0^N =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{N\to\infty} \left(e^{(1-p)N} - 1 \right).$$

Оскільки $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha$, то $\mathrm{Re}(p-\alpha) > 0$.

Тоді $\lim\limits_{N\to\infty} e^{(\alpha-p)N} = \lim\limits_{N\to\infty} e^{-(p-\alpha)N} = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{e^{(p-\alpha)N}} = 0$.

Виходить,

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}.$$

Формулу доведено.

Приклад 1.3. Користуючись визначенням прямого перетворення Лапласа, довести формулу

$$e^{-\alpha t} \to \frac{1}{p+\alpha}, \text{ де } \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Функція $e^{-\alpha t}$ задовольняє умови Діріхле. Знайдемо показник зростання цієї функції.

Функція $e^{-\alpha t}$ є обмеженою, тому її показник зростання $S_0 = 0$

$$e^{-\alpha t} \to \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + p)t} dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} e^{-(\alpha + p)t} dt = -\frac{1}{\alpha + p} \lim_{N\to\infty} e^{-(\alpha + p)t} \Big|_0^N =$$

$$= -\frac{1}{1+p} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{e^{(\alpha+p)N}} - 1 \right) = \frac{1}{p+\alpha}, \ \mathrm{Re}(p-\alpha) > 0.$$

Виходить,

$$e^{-\alpha t} \to \frac{1}{p+\alpha}.$$

Формулу доведено.

Приклад 1.4. Користуючись визначенням прямого перетворення Лапласа, знайти зображення одиничної функції Хевісайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } t \ge 0; \\ 0, \text{ якщо } t < 0. \end{cases}$$

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція задовольняє умови Діріхле. Ця функція є обмеженою, отже, показник зростання $S_0 = 0$.

Тоді

$$\eta(t) \to \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot 1dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \lim_{N\to\infty} e^{-pt} \Big|_0^N = -\frac{1}{p} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{e^{pN}} - 1 \right) = \frac{1}{p}.$$

Таким чином,

$$\eta(t) \to \frac{1}{p}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0.$$

В і д п о в і д ь : $\eta(t) \to \frac{1}{p}$, де $\operatorname{Re} p > 0$.

Приклад 1.5. Знайти зображення функції $f(t) = 25$, користуючись визначенням зображення.

Р о з в ’ я з а н н я

Для того, щоб функція $f(t) = 25$ була оригіналом, вона має задовольняти три умови, сформульовані у визначенні оригіналу.

1) Функція $f(t)$ та її похідні $f'(t) = f''(t) = ... = 0$ є неперервними у проміжку $(-\infty;+\infty)$.

2) Для того, щоб виконувалась умова $f(t) = 0$, коли $t < 0$ необхідно функцію $f(t)$ помножити на одиничну функцію Хевісайда. Тоді

$$\eta(t) f(t) = \begin{cases} 25, \text{ якщо } t \ge 0; \\ 0, \text{ якщо } t < 0. \end{cases}$$

Функція $\eta(t) f(t)$ задовольняє умову 2), але, згідно з домовленістю, користуватись будемо функцією $\eta(t) f(t)$, а позначати її будемо, як і раніше, $f(t)$.

3) Оскільки існує таке число M та число $S = 0$, що $| f(t) |=| 25 |< Me^{0t}$, то можна стверджувати, що функція $f(t) = 25$ є оригіналом з показником зростання $S_0 = 0$.

Користуючись визначенням оригіналу, маємо

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot 25dt = 25 \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{pt} dt = -\frac{25}{p} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{e^{pt}} \Big|_0^N =$$

$$= -\frac{25}{p} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{e^{pN}} - 1 \right) = \frac{25}{p}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0$$

Таким чином, $25 \to \frac{25}{p}$, де $\operatorname{Re} p > 0$. Звідси можна зробити висновок, що

$C \to \frac{C}{p}$, де $\operatorname{Re} p > 0$ зокрема, $1 \to \frac{1}{p}$, де $\operatorname{Re} p > 0$.

В і д п о в і д ь : $25 \to \dfrac{25}{p}$, де $\operatorname{Re} p > 0$.

Приклад 1.6. Користуючись визначенням прямого перетворення Лапласа довести формулу

$$\cos t \to \frac{p}{p^2+1}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0.$$

Р о з в ' я з а н н я

Функція $f(t) = \cos t$ задовольняє умови Діріхле, якщо $f(t) \equiv 0$ за $t < 0$. Визначимо показник зростання функції. Оскільки функція $\cos t$ є обмеженою, а саме, $|\cos t| < 1$, то це означає, що показник зростання цієї функції $S_0 = 0$.

$$\cos t \to \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t dt = \lim_{N \to \infty} \int_0^N e^{-pt} \cos t dt.$$

Первісну інтеграла $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t dt$ можна знайти подвійним інтегруванням частинами. Виходить:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t dt = \frac{e^{-pt}}{p^2+1}(p \cos t - \sin t).$$

Тоді

$$\cos t \to -\lim_{N \to \infty} \frac{e^{-pt}}{p^2+1}(p \cos t - \sin t)\Bigg|_0^N = \frac{1}{p^2+1}\left(-\frac{p}{e_{pn}} \cos N + p - \frac{\sin N}{e^{pN}} + 0\right) =$$

$$= \frac{p}{p^2+1}.$$

Таким чином доведено формулу.

$$\cos t \to \frac{p}{p^2+1}.$$

Приклад 1.7. Знайти зображення функції $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$, користуючись таблицею оригіналів та зображень.

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = \frac{e^{ft} - e^{0 \cdot t}}{t}.$$

Тоді за формулою

$$f(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \to \ln \frac{p-a}{p-b},$$

де $a > 0$; $b > 0$; $\operatorname{Re} p > \max\{a; b\}$, виходить:

$$\frac{e^t-1}{t}\to\ln\frac{p}{p-1},\ \operatorname{Re}p>1.$$

В і д п о в і д ь : $\frac{e^t-1}{t}\to\ln\frac{p}{p-1},\ \operatorname{Re}p>1.$

Приклад 1.8. Знайти зображення функції $f(t)=e^{5t}\sin 6t$, користуючись таблицею оригіналів та зображень.

Р о з в ’ я з а н н я

Користуємось формулою

$e^{\lambda t}\sin\omega t\to\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$, де $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\lambda+|\operatorname{Im}\omega|$.

У даному випадку $\lambda=5, \omega=6$, отже, виходить

$$e^5\sin 6t\to\frac{6}{(p-5)^2+36},\ \operatorname{Re}p>5.$$

В і д п о в і д ь : $e^5\sin 6t\to\frac{6}{(p-5)^2+36},\ \operatorname{Re}p>5.$

Приклад 1.9. Знайти зображення функції $f(t)$ $f(t)=\sin 5(t-8)$.

Р о з в ’ я з а н н я

Запишемо функцію $f(t)$ у вигляді $f(t)=\sin(5t-40)$.

Далі користуємось формулою

$$\sin(\omega t-\varphi)\to\frac{\omega\cos\varphi-p\sin\varphi}{p^2+\omega^2},\ \text{де } \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|.$$

Оскільки $\omega=5, \varphi=40$, дістанемо

$$\sin 5(t-8)\to\frac{5\cos 40-p\sin 40}{p^2+25},\ \text{де } \operatorname{Re}p>0.$$

В і д п о в і д ь : $\sin 5(t-8)\to\frac{5\cos 40-p\sin 40}{p^2+25}$, де $\operatorname{Re}p>0$.

Приклад 1.10. Знайти зображення функції $f(t)=\sin^2 t$.

Р о з в ’ я з а н н я

Користуємось таблицею оригіналів та зображень.

$$\sin^2 t\to\frac{2}{p(p^2+4)},\ \text{де } \operatorname{Re}p>0.$$

В і д п о в і д ь : $\sin^2 t\to\frac{2}{p(p^2+4)}$, де $\operatorname{Re}p>0$.

Приклад 1.11. Знайти зображення функції $f(t)=t\cos 4t$.

Р о з в ’ я з а н н я

Користуємось таблицею оригіналів та зображень. За формулою

$t^n \cos\beta t \to n!\dfrac{\mathrm{Re}(p+i\beta)^{n+1}}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$, де $\mathrm{Re}\, p > |\mathrm{Im}\,\omega|$

знаходимо зображення заданої функції $f(t) = t\cos 4t$, вважаючи, що $n = 1$, $\chi = 4$. Виходить,

$t\cos 4t \to \dfrac{\mathrm{Re}(p+4i)^2}{(p^2+16)^2}$, де $\mathrm{Re}\, p > 0$.

В і д п о в і д ь : $t\cos 4t \to \dfrac{\mathrm{Re}(p+4i)^2}{(p^2+16)^2}$, де $\mathrm{Re}\, p > 0$.

Приклад 1.12. Користуючись властивістю лінійності знайти зображення функції $f(t) = \sin\beta t$, спираючись на зображення функцій $e^{\alpha t}, e^{-\alpha t}$.

Р о з в ’ я з а н н я

Подамо функцію $f(t) = \sin\beta t$ у вигляді

$$\sin\beta t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}\right).$$

Виходимо з формул

$e^{\alpha t} = \dfrac{1}{p-\alpha}$, де $\mathrm{Re}\, p > -\mathrm{Re}\,\alpha$ та $e^{-\alpha t} = \dfrac{1}{p+\alpha}$, де $\mathrm{Re}\, p > -\mathrm{Re}\,\alpha$.

Звідси

$\sin\beta t = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i\beta} - \dfrac{1}{p+i\beta}\right) = \dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{2i\beta}{p^2+\beta^2} = \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$,

де $\mathrm{Re}\,\alpha > \mathrm{Re}(\pm i\omega) = |\mathrm{Im}\,\omega|$.

В і д п о в і д ь : $\sin\beta t \to \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$, де $\mathrm{Re}\,\alpha > |\mathrm{Im}\,\omega|$.

Приклад 1.13. Знайти зображення функції $f(t) = \mathrm{sh}\alpha t$ користуючись зображеннями функцій $f(t) = e^{\alpha t}$ та $f(t) = e^{-\alpha t}$ та властивістю лінійності оригіналу.

Р о з в ’ я з а н н я

Функцію $\mathrm{sh} t$ подано у вигляді

$$\mathrm{sh}\,\alpha t = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right).$$

Оскільки

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}, \text{ де } \mathrm{Re}\, p > -\mathrm{Re}\,\alpha$$

та

$$e^{-\alpha t} \to \frac{1}{p+\alpha}, \text{ де} \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re}\alpha,$$

то

$$\operatorname{sh}\alpha t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}, \text{ де } \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re}\alpha.$$

В і д п о в і д ь : $\operatorname{sh}\alpha t = \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$, де $\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re}\alpha$.

Приклад 1.14. Знайти зображення функції $f(t) = \sin(\alpha t + \beta)$, користуючись зображеннями функцій $f(t) = \cos\alpha t$ та $f(t) = \sin\alpha t$ та властивістю лінійності.

Р о з в ' я з а н н я

Подамо функцію $\sin(\alpha t + \beta)$ у вигляді

$$\sin(\alpha t + \beta) = \sin\alpha t \cos\beta + \cos\alpha t \sin\beta.$$

Оскільки

$$\sin\alpha t \to \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, \text{ де } \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\alpha| \text{ та } \cos\alpha t \to \frac{p}{p^2+\alpha^2}, \text{ де } \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\alpha|,$$

тоді

$$\sin(\alpha t + \beta) \to \frac{\alpha\cos\varphi}{p^2+\alpha^2} + \frac{\alpha\sin\varphi}{p^2+\alpha^2} = \frac{\alpha\cos\varphi + p\sin\varphi}{p^2+\alpha^2}, \text{ де } \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\alpha|.$$

В і д п о в і д ь : $\sin(\alpha t + \beta) \to \dfrac{\alpha\cos\varphi + p\sin\varphi}{p^2+\alpha^2}$, де $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\alpha|$.

Приклад 1.15. Користуючись властивістю подібності оригіналу та формулою $\sin t \to \dfrac{1}{p^2+1}$, де $\operatorname{Re} p > 0$, знайти зображення функції $f(t) = \sin 8t$.

Р о з в ' я з а н н я

За властивістю подібності оригіналу

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \text{ де } \operatorname{Re} p > \alpha S_0, \text{ якщо } f(t) \to F(p), \text{ де } \operatorname{Re} p > \alpha S_0.$$

Отже,

$$\sin 8t \to \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)^2 + 1}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0,$$

оскільки $\alpha = 8 + 0i$, а отже, $\operatorname{Re} p > 0$ або $\sin 8t \to \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{8^2}{p^2+8^2}$, де $\operatorname{Re} p > 0$.

Остаточно маємо

$$\sin 8t \to \frac{8}{p^2+64}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0.$$

В і д п о в і д ь : $\sin 8t \to \dfrac{8}{p^2+64}$, де $\operatorname{Re} p > 0$.

Приклад 1.16. Задані функції

$$f_1(t)=\begin{cases}1, \text{якщо } 0 \le t < +\infty;\\ 0, \text{якщо } -\infty < t < 0,\end{cases} \qquad f_2(t)=\begin{cases}1, \text{якщо } 10 \le t < +\infty;\\ 0, \text{якщо } -\infty < t < 0,\end{cases}$$

$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$.

Знайти зображення функції $f(t)$, користуючись властивістю запізнювання оригіналу.

Р о з в ' я з а н н я

Побудуємо графіки функцій $f_1(t), f_2(t), f(t)$ (рис. 1.6, 1.7, 1.8).

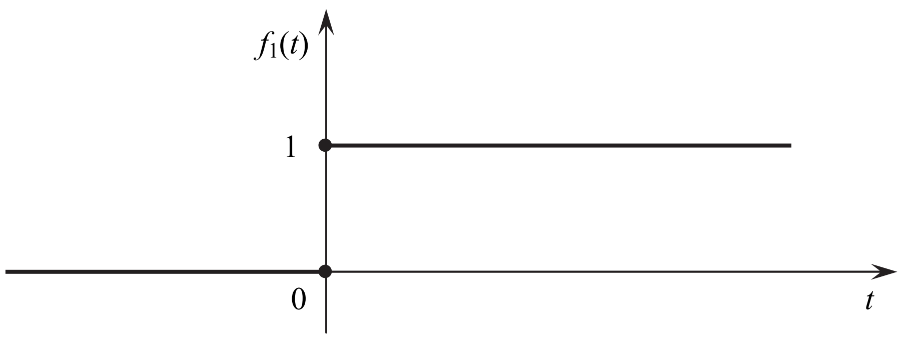


Рисунок 1.6

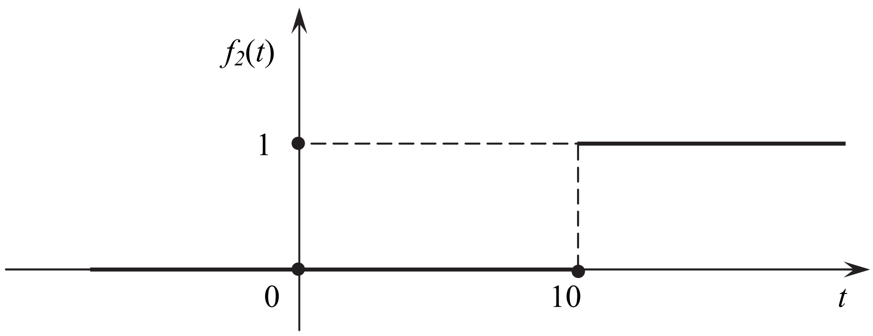


Рисунок 1.7

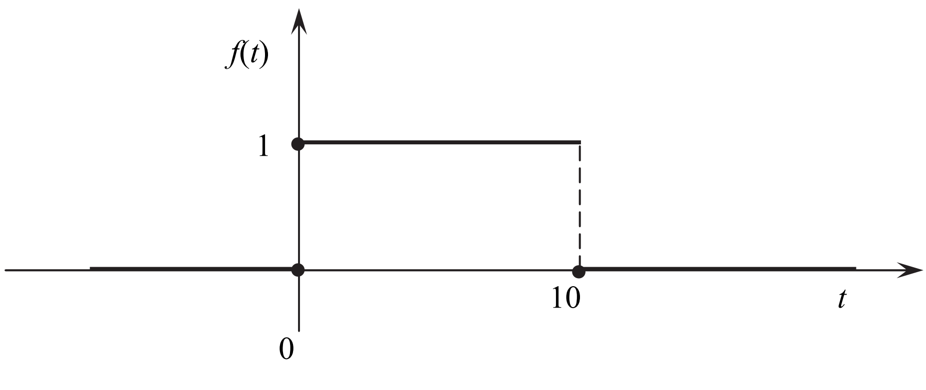


Рисунок 1.8

Звідси виходить, що

$$f(t)=\begin{cases}0, \text{ якщо } -\infty \le t < 0;\\ 1, \text{ якщо } 0 \le t < 10;\\ 0, \text{ якщо } 10 < t < +\infty.\end{cases}$$

Функція $f_1(t)$ збігається з одиничною функцією Хевісайда, тобто $f_1(t)=\eta(t)$. Тоді $f_1(t)\to\frac{1}{p}$.

Функцію $f_2(t)$ можна розглядати як функцію Хевісайда зі зміщенням аргументу, тобто $f_2(t)=\eta(t-10)$.

Тоді згідно з властивістю запізнювання оригіналу маємо: $f_2(t)\to\frac{1}{p}e^{-10t}$.

За властивістю лінійності оригіналу виходить, що

$$f(t)\to\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-10t}, \ \operatorname{Re}p>0.$$

Відповідь: $f(t)\to\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-10t}$, $\operatorname{Re}p>0$.

Приклад 1.17. Задані функції

$$f_1(t)=\begin{cases}t, \text{ якщо } t\ge 0;\\ 0, \text{ якщо } t<0,\end{cases} \qquad f_2(t)=\begin{cases}-(t-2), \text{ якщо } t\ge 2;\\ 0, \text{ якщо } t<2,\end{cases}$$

$$f_3(t)=\begin{cases}-(t-4), \text{ якщо } t\ge 4;\\ 0, \text{ якщо } t<4,\end{cases} \qquad f_4(t)=\begin{cases}t-6, \text{ якщо } t\ge 6;\\ 0, \text{ якщо } t<6.\end{cases}$$

Знайти зображення функції

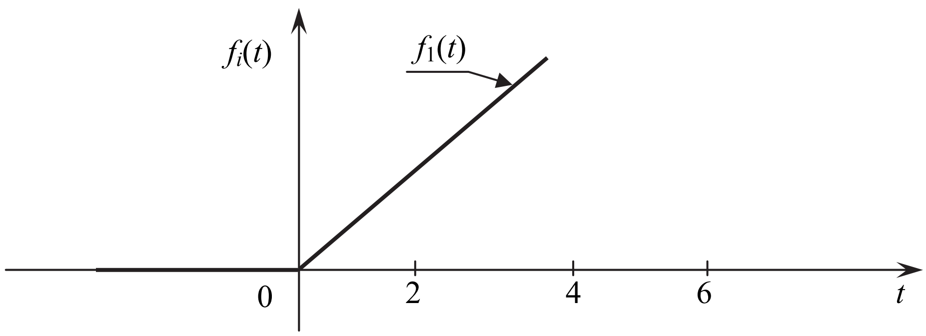
$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)+f_4(t)$:

1) за властивістю лінійності оригіналу;
2) за властивістю запізнювання оригіналу.

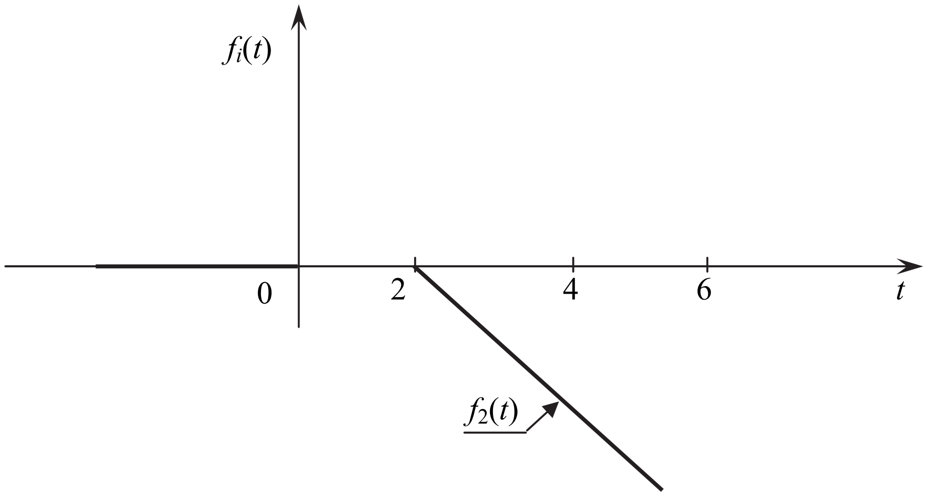
Розв'язання

Знайдемо функцію $f(t)$.

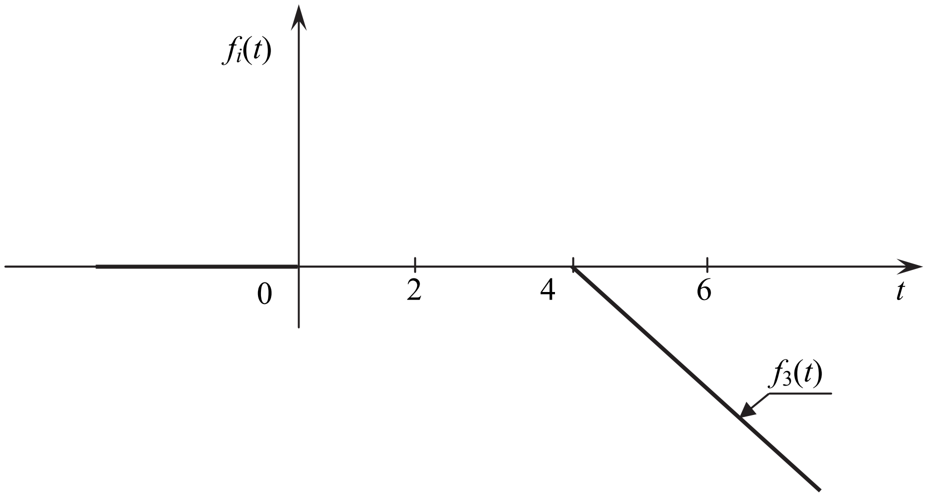
Побудуємо графіки функцій $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t), f(t)$ (рис. 1.9, 1.10).



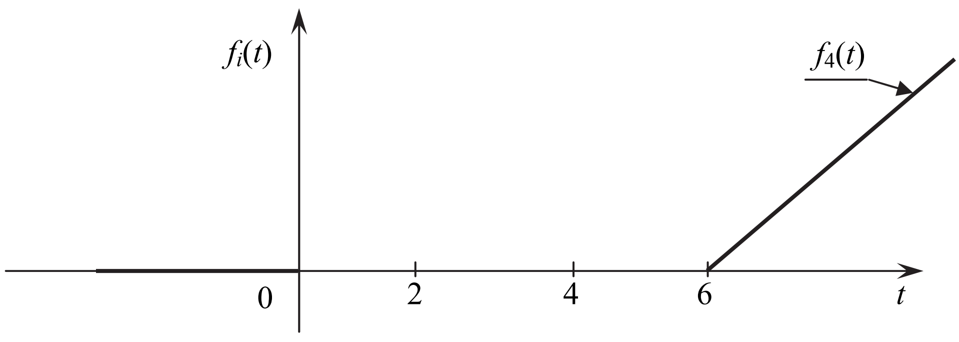
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.9

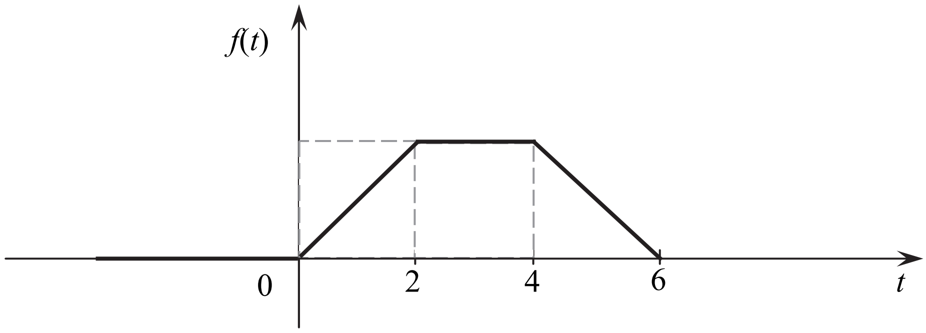


Рисунок 1.10

Звідси виходить, що

$$f(t)=\begin{cases} 0, \text{якщо } -\infty < t < 0; \\ t, \text{якщо } 0 \le t < 2; \\ 2, \text{якщо } 2 \le t < 4; \\ -t+6, \text{якщо } 4 \le t < 6; \\ 0, \text{якщо } 6 \le t < +\infty. \end{cases}$$

1) Знаходимо зображення функції $f(t)$, користуючись властивістю лінійності оригіналу (формула (1.6).

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^2 te^{-pt}dt+\int_2^4 2e^{-pt}dt+\int_4^6(-t+6)e^{-pt}dt+\int_6^{+\infty}0e^{-pt}dt;$$

$$\int_0^2 te^{-pt}dt=\begin{bmatrix} U=t; & dU=dt \\ dV=e^{-pt}dt; & V=-\dfrac{1}{p}e^{-pt} \end{bmatrix}=-\frac{t}{p}\cdot e^{-pt}\Bigg|_0^2+\frac{1}{p}\int_0^2 e^{-pt}dt=$$

$$=-\frac{2}{p}e^{-2p}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Bigg|_0^2=-\frac{2}{p}e^{-2p}-\frac{1}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}=-\frac{2}{p}e^{-2p}-\frac{1}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}.$$

$$\int_2^4 2e^{-pt}dt=-\frac{2}{p}\cdot e^{-pt}\Bigg|_2^4=-\frac{2}{p}e^{-4p}+\frac{2}{p}e^{-2p}.$$

$$\int_4^6(-t+6)e^{-pt}dt=\begin{bmatrix} U=-t+6; & dU=-dt \\ dV=e^{-pt}dt; & V=-\dfrac{1}{p}e^{-pt} \end{bmatrix}=-\frac{-t+6}{p}\cdot e^{-pt}\Bigg|_4^6-\frac{1}{p}\int_4^6 e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{2}{p}e^{-4t}+\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Bigg|_4^6=\frac{2}{p}e^{-4t}+\frac{1}{p^2}e^{-6p}-\frac{1}{p^2}e^{4t}.$$

Отже,

$$F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}e^{-2p}-\frac{1}{p^2}e^{-4p}+\frac{1}{p^2}e^{-6p}.$$

2) Знаходимо зображення функції $f(t)$, користуючись властивістю запізнювання оригіналу (формула (1.8)).

Оскільки,

$f_1(t) = t \to \dfrac{1}{p^2}$; $\qquad$ $f_2(t) = -(t-2) \to -\dfrac{1}{p^2}e^{-2p}$;

$f_3(t) = -(t-4) \to -\dfrac{1}{p^2}e^{-4p}$; $\qquad$ $f_4(t) = t-6 \to \dfrac{1}{p^2}e^{-6p}$,

то

$$f(t) \to \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-2p} - \frac{1}{p^2}e^{-4p} + \frac{1}{p^2}e^{-6p}, \ \operatorname{Re} p > 0.$$

Відповідь: $f(t) \to \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2}e^{-2p} - \dfrac{1}{p^2}e^{-4p} + \dfrac{1}{p^2}e^{-6p}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Приклад 1.18. Нехай функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а її зображенням є функція $F(t)$, де $\operatorname{Re} p > 0$. Функція $f_1(t)$ має вигляд

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t < \dfrac{\beta}{\alpha}; \\ f(\alpha t - \beta), \text{ якщо } \dfrac{\beta}{\alpha} \le t < +\infty \end{cases}$$

та також є оригіналом з показником зростання S_0. Довести, що справедливою є формула

$$f_1(t) \to \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}p} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \text{ де } \operatorname{Re} p > S_0, \text{ якщо } \alpha > 0 \text{ та } \beta > 0.$$

Розв'язання

Подамо функцію $f_1(t)$ у вигляді

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t < \dfrac{\beta}{\alpha}; \\ f\left(\alpha\left(t - \dfrac{\beta}{\alpha}\right)\right), \text{ якщо } \dfrac{\beta}{\alpha} \le t < +\infty. \end{cases}$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t \le \dfrac{\beta}{\alpha}; \\ f\left(t - \dfrac{\beta}{\alpha}\right), \text{ якщо } \dfrac{\beta}{\alpha} \le t < +\infty. \end{cases}$$

Згідно з властивістю запізнювання оригіналу маємо

$$f_2(t) \to e^{-\frac{\beta}{\alpha}p} F(p), \text{ де } \alpha > 0, \beta > 0, \ \operatorname{Re} p > S_0,$$

Враховуючи отриманий результат та властивість подібності знаходимо зображення функції $f_1(t)$:

$$f_1(t) \to \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}p} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \text{ де } \alpha > 0, \beta > 0,\ \operatorname{Re} p > S_0,$$

тобто

$$f(\alpha t - \beta) \to \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}p} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \text{ де } \alpha > 0, \beta > 0,\ \operatorname{Re} p > S_0.$$

Приклад 1.19. Нехай функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а її зображенням є функція $F(p)$, де $\operatorname{Re} p > S_0$. Функція $f_1(t)$ має вигляд

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t \le \dfrac{\beta}{\alpha}; \\ f(\alpha t + \beta), \text{ якщо } \dfrac{\beta}{\alpha} \le t < +\infty \end{cases}$$

та також є оригіналом з показником зростання S_0. Довести, що справедливою є формула

$$f_1(t) \to \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\beta}{\alpha}p} \left(F\left(\frac{p}{\alpha}\right) - \int_0^\beta e^{-\frac{p}{\alpha}t} f(t)dt \right), \text{ де } \alpha > 0, \beta > 0,\ \operatorname{Re} p > S_0, \text{ тобто}$$

$$f(\alpha t + \beta) \to \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\beta}{\alpha}p} \left(F\left(\frac{p}{\alpha}\right) - \int_0^\beta e^{-\frac{p}{\alpha}t} f(t)dt \right).$$

Р о з в ' я з а н н я

Подамо функцію $f_1(t)$ у вигляді

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t < \dfrac{\beta}{\alpha}; \\ f\left(\alpha\left(t + \dfrac{\beta}{\alpha}\right)\right), \text{ якщо } \dfrac{\beta}{\alpha} \le t < +\infty. \end{cases}$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t \le \dfrac{\beta}{\alpha}; \\ f\left(t + \dfrac{\beta}{\alpha}\right), \text{ якщо } \dfrac{\beta}{\alpha} \le t < +\infty. \end{cases}$$

Згідно з властивістю випередження оригіналу маємо

$$f_2(t) \to e^{\frac{\beta}{\alpha}p} \left(F(p) - \int_0^\beta e^{-pt} f(t)dt \right), \text{ де } \alpha > 0, \beta > 0,\ \operatorname{Re} p > S_0.$$

Враховуючи отриманий результат та властивість подібності оригіналу знаходимо зображення функції $f_1(t)$:

$$f_1(t) \to \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\beta}{\alpha}p} \left(F\left(\frac{p}{\alpha}\right) - \int_0^\beta e^{-\frac{p}{\alpha}t} f(t)dt \right), \text{ де } \alpha > 0, \beta > 0,\ \operatorname{Re} p > S_0, \text{ тобто}$$

$$f(\alpha t+\beta)\to\frac{1}{\alpha}e^{\frac{\beta}{\alpha}p}\left(F\left(\frac{p}{\alpha}\right)-\int_0^{\beta}e^{-\frac{p}{\alpha}t}f(t)dt\right),\text{ де } \alpha>0, \beta>0,\ \operatorname{Re}p>S_0.$$

Приклад 1.20. Функція $f(t)=|\sin t|$ є оригіналом з показником зростання $S_0=0$. Знайти зображення функції $f(t)$.

Розв'язання

Функція $f(t)=|\sin t|$ є періодичною функцією з періодом $T=\pi$ (рис. 1.11).

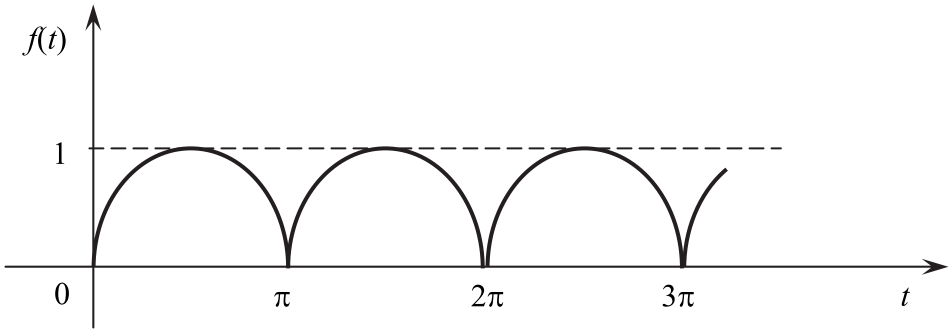


Рисунок 1.11

У зв'язку з періодичністю функції-оригіналу з показником зростання $S_0=0$ доцільно зображення функції знаходити за формулами (1.10) та (1.11).

Знаходимо за формулою (1.11) $F_0(p)=\int_0^T f_0(t)e^{-pt}dt$, де $f_0(t)$ – допоміжна функція

$$f_0(t)=\begin{cases}f(t), \text{якщо } 0\le t\le\pi;\\ 0, \text{якщо } \pi<t,\end{cases}$$

показник зростання якої $S_0=0$.

$$F_0(p)=\int_0^{\pi}|\sin t|e^{-pt}dt.$$

Оскільки на проміжку $[0;\pi]$ $\sin t\ge 0$, то $|\sin t|=\sin t$ на проміжку $[0;\pi]$. Тоді $F_0(p)=\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-pt}dt$.

Такий інтеграл знаходиться подвійним інтегруванням частинами

$$\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-pt}dt=\begin{bmatrix}U=\sin t; & dU=\cos tdt\\ dV=e^{-pt}dt; & V=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{bmatrix}=-\frac{e^{-pt}}{p}\sin t\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{p}\int_0^{\pi}\cos t\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=\begin{bmatrix}U=\cos t; & dU=-\sin tdt\\ dV=e^{-pt}dt; & V=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{bmatrix}=\frac{1}{p}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\cos t\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{p}\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-pt}dt\right)=$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{e^{-p\pi}}{p} + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p^2}\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-pt} dt .$$

Виходить, $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}(e^{-p\pi} + 1) - \frac{1}{p^2}\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-pt} dt$,

звідси,

$$\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}(e^{-p\pi} + 1) .$$

Тоді

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2 + 1}(e^{-p\pi} + 1),$$

$$F_0(p) = \frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2 + 1}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0 .$$

За формулою (1.10) знаходимо зображення функції $f(t)$.

$$f(t) \to F_0(p) = \frac{e^{-p\pi} + 1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-p\pi})}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0 .$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Функція $f(t) = |\sin t|$ описує випрямлений змінний струм.

В і д п о в і д ь : $F_0(p) = \dfrac{e^{-p\pi} + 1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-p\pi})}$, де $\operatorname{Re} p > 0$.

Приклад 1.21. Функцією $f(t)$ задано періодичний прямокутний імпульс, період якого дорівнює $2n$. Графік цієї функції подано на рис. 1.12. Знайти зображення функції $f(t)$.

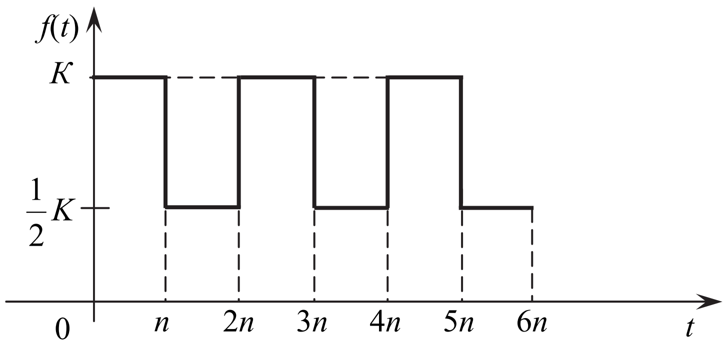


Рисунок 1.12

Р о з в ’ я з а н н я

Оскільки задана функція-оригінал з показником зростання $S_0 = 0$ є періодичною, то зображення цієї функції будемо шукати, користуючись формулами (1.10) та (1.11).

Вводимо допоміжну функцію.

$$f_0(t)=\begin{cases} f(t), \text{ якщо } 0\le t\le 2n; \\ 0, \text{ якщо } t>2n, \end{cases}$$

показник зростання якої $S_0=0$.

Дамо аналітичне описання функції $f(t)$ на проміжку $[0;2n]$, користуючись одиничною функцією Хевісайда:

$$f(t)=K\cdot\eta(t)-\frac{1}{2}K\cdot\eta(t-n),$$

враховуючи, що $\eta(t)=1$ на проміжку $[0;n]$, а $\eta(t-n)=0$ на проміжку $[0;n]$; на проміжку $[n;2n]$ $\eta(t)=0$, а $\eta(t-n)=1$.

За формулою (1.11) знаходимо функцію $F_0(p)$

$$F_0(p)=\int_0^{2n}\left(K\cdot\eta(t)-\frac{1}{2}K\cdot\eta(t-n)\right)e^{-pt}dt=\int_0^{n}\left(K\cdot\eta(t)-\frac{1}{2}K\cdot\eta(t-n)\right)e^{-pt}dt+$$

$$+\int_m^{2n}\left(K\cdot\eta(t)-\frac{1}{2}K\cdot\eta(t-n)\right)e^{-pt}dt=\int_0^{n}Ke^{-pt}dt+\int_m^{2n}\frac{1}{2}Ke^{-pt}dt=$$

$$=-\frac{1}{p}Ke^{-pt}\Big|_0^n-\frac{1}{2p}Ke^{-pt}\Big|^{2n}=-\frac{1}{p}Ke^{-pn}+\frac{1}{p}K-\frac{1}{2p}Ke^{-2pn}+\frac{1}{2p}Ke^{-2pn}=$$

$$=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2p}e^{-pn}-\frac{1}{2p}e^{-2pn}\right)K.$$

Отже, $F_0(p)=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2p}e^{-pn}-\frac{1}{2p}e^{-2pn}\right)K$, де $\operatorname{Re}p>0$.

За формулою (1.10) знаходимо зображення функції $f(t)$.

$$f(t)\to F(p)=\frac{K}{1-e^{-2pn}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2p}e^{-pn}-\frac{1}{2p}e^{-2pn}\right).$$

В і д п о в і д ь: $F(p)=\frac{K}{1-e^{-2pn}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2p}e^{-pn}-\frac{1}{2p}e^{-2pn}\right)$, де $\operatorname{Re}p>0$.

Приклад 1.22. Знайти зображення функції $f(t)=e^{-6t}\cos 7t\cos 3t$.

Р о з в ' я з а н н я

Функція $f(t)=e^{-6t}\cos 7t\cos 3t$ є оригіналом з показником зростання $S_0=0$. Розглянемо допоміжну функцію $f_0(t)=\cos 7t\cos 3t$, яка також є оригіналом з показником зростання $S_0=0$. Запишемо функцію $f_0(t)$ у вигляді

$$f_0(t)=\frac{1}{2}(\cos\omega t\cos\varphi t) \text{ або } f_0(t)=\frac{1}{2}\cos\omega t+\frac{1}{2}\cos\varphi t.$$

Згідно з таблицею оригіналів та зображень маємо

$$\cos 10t\to\frac{p}{p^2+100}, \text{ де } \operatorname{Re}p>0; \ \cos 4t\to\frac{p}{p^2+16}, \text{ де } \operatorname{Re}p>0.$$

Користуючись властивістю лінійності дістанемо

$$f_0(t) \to \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+16}, \text{ де } \operatorname{Re} p > 0.$$

Далі переходимо до функції $f(t)=\frac{1}{2}e^{-6t}(\cos 10t+\cos 4t)$.

Згідно з теоремою зміщення зображення (формула (1.14, а)), знаходимо зображення функції $f(t)$.

$$f(t) \to F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{p+6}{(p+6)^2+100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p+4}{(p+4)^2+16}, \text{ де } \operatorname{Re}(p+6)>0.$$

В і д п о в і д ь: $F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{p+6}{(p+6)^2+100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p+4}{(p+4)^2+16}$,

де $\operatorname{Re}(p+6)>0$.

Приклад 1.23. Знайти зображення функції $f(t)=t^n\sin\beta t$, де $n\in N$.

Р о з в ' я з а н н я

Дамо функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t)=t^n\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}\right) \text{ або } f(t)=-\frac{i}{2}t^n e^{i\beta t}+\frac{i}{2}t^n e^{-i\beta t}.$$

Показник зростання функції $f(t)$: $S_0=\beta$.

Згідно з таблицею оригіналів та зображень маємо: $t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Далі, користуючись властивістю зміщення зображення в аргументі зображення, знаходимо

$$t^n e^{i\beta t} \to \frac{n!}{(p-\beta)^{n+1}} \text{ та } t^n e^{-i\beta t} \to \frac{n!}{(p+\beta)^{n+1}}.$$

За властивістю лінійності можемо знайти зображення функції $f(t)$:

$$F(p)=-\frac{i}{2}\cdot\frac{n!}{(p-\beta)^{n+1}}+\frac{i}{2}\cdot\frac{n!}{(p+\beta)^{n+1}}, \text{ де } \operatorname{Re} p>\beta.$$

Після спрощення виходить

$$F(p)\to\frac{i\cdot n!}{2}\left(\frac{(p-\beta)^{n+1}-(p+\beta)^{n+1}}{(p^2-\beta^2)^{n+1}}\right), \text{ де } \operatorname{Re} p>\beta.$$

В і д п о в і д ь: $F(p)\to\frac{i\cdot n!}{2}\left(\frac{(p-\beta)^{n+1}-(p+\beta)^{n+1}}{(p^2-\beta^2)^{n+1}}\right)$, де $\operatorname{Re} p>\beta$.

Приклад 1.24. Функція $f(t)=\sqrt{t}$ є оригіналом. Знайти зображення функції $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, користуючись властивістю диференціювання оригіналу (формула (1.15)).

Р о з в ' я з а н н я

Функція $f(t)=\sqrt{t}$ задовольняє усі умови існування оригіналу. Функція $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ задовольняє майже усі умови існування оригіналу. Справа у тому, що коли $t=0$, то функція $f'(t)$ має нескінченний розрив.

Але коли $t>0$, то усі умови існування оригіналу виконуються і формулою (1.15) можна користуватись.

Оскільки $\sqrt{t}\to\dfrac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$, де $\operatorname{Re}p>0$, а $f(0)=\sqrt{0}=0$, то

$\left(\sqrt{t}\right)'\to p\cdot\dfrac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$, де $\operatorname{Re}p>0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\to\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$, де $\operatorname{Re}p>0$.

В і д п о в і д ь: $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\to\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$, де $\operatorname{Re}p>0$.

Приклад 1.25. Знайти зображення функції $f(t)=t^2\cos t$.

Р о з в ' я з а н н я

Користуємось формулою (1.19) диференціювання зображення.

Виходимо з того, що $\cos t\to\dfrac{p}{p^2+1}$, де $\operatorname{Re}p>0$.

Тоді $t\cos t\to-\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)'$, $t\cos t\to\dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$, де $\operatorname{Re}p>0$.

Далі

$t\cos t\to\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)''$, $t^2\cos t\to\dfrac{2p(3-p^2)}{(p^2+1)^3}$, де $\operatorname{Re}p>0$.

В і д п о в і д ь: $t^2\cos t\to\dfrac{2p(3-p^2)}{(p^2+1)^3}$, де $\operatorname{Re}p>0$.

Приклад 1.26. Знайти оригінал $f(t)$, якщо його зображення $F(p)$ має вигляд

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2-6p+25)},\ \text{де } \operatorname{Re}p>0.$$

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо зображення $F(p)$ у вигляді

$$F(p)=\frac{\left(\dfrac{1}{p^2-6p+25}\right)}{p},\ \text{де } \operatorname{Re}p>0.$$

Вводимо допоміжну функцію-зображення

$$F_0(p)=\frac{1}{p^2-6p+25}\text{, де } \operatorname{Re} p>0.$$

Знайдемо функцію $f_0(t)$, зображенням якої є функція $F_0(p)$.

Оскільки функцію $F_0(p)$ можна подати у вигляді

$$F_0(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(p+3)^2+4^2}\text{, де } \operatorname{Re} p>0,$$

то це, згідно з формулою (1.10) таблиці оригіналів та зображень, означає, що

$$f_0(t)=\frac{1}{4}e^{-3t}\sin 4t.$$

Функція $F(p)$ є результат ділення на p функції $F_0(p)$. Отже, доцільно користуватися властивістю інтегрування оригіналу (формула (1.20)):

$$f(t)=\frac{1}{4}\int_0^t f_0(x)dx,$$

тобто

$$f(t)=\frac{1}{4}\int_0^t e^{-3x}\sin 4xdx.$$

Інтегруємо методом інтегрування чистинами

$$I=\int_0^t e^{-3x}\sin 4xdx=\begin{bmatrix} U=\sin 4x; & dU=4\cos 4xdx \\ dV=e^{-3x}dx; & V=-\frac{1}{3}e^{-3x} \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 4x\Big|_0^t+\frac{4}{3}\int_0^t e^{-3x}\cos 4xdx=\begin{bmatrix} U=\cos 4x; & dU=-4\sin 4xdx \\ dV=e^{-3x}dx; & V=-\frac{1}{3}e^{-3x}dx \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3t}\sin 4t+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 4x\Big|_0^t-\frac{4}{3}\int_0^t e^{-3x}\sin 4xdx\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3t}\sin 4t+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 4t+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\int_0^t e^{-3x}\sin 4xdx\right).$$

Виходить,

$$\int_0^t e^{-3x}\sin 4xdx=-\frac{1}{3}e^{-3t}\sin 4t-\frac{4}{9}e^{-3t}\cos 4t+\frac{4}{9}-\frac{16}{9}\int_0^t e^{-3x}\sin 4xdx.$$

Звідси маємо

$$\left(1+\frac{16}{9}\right)\int_0^t e^{-3x}\sin 4xdx=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}e^{-3t}\cos 4t-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 4t,$$

$$\int_0^t e^{-3x}\sin 4xdx=\frac{9}{25}\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{9}e^{-3t}\cos 4t-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 4t\right).$$

Таким чином,

$$f(t)=\frac{9}{100}\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{9}e^{-3t}\cos 4t-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 4t\right).$$

В і д п о в і д ь : $f(t)=\frac{9}{100}\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{9}e^{-3t}\cos 4t-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 4t\right)$.

Приклад 1.27. Функція-оригінал має вигляд

$$f(t)=\frac{\sin^2 8t}{t}.$$

Знайти її зображення $F(p)$.

Р о з в ' я з а н н я

Вводимо допоміжну функцію $f_0(t)=\sin^2 8t$. Подамо функцію $f_0(t)$ у вигляді

$$f_0(t)=\frac{1}{2}(1-\cos 16t).$$

Зображення $F_0(p)$ функції $f_0(t)$ знаходимо за таблицею оригіналів та зображень маємо $f_0(t)\to F_0(p)$, тобто

$$f_0(t)\to\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+16^2}\right),\text{ де } \operatorname{Re}p>0.$$

Функція $f(t)$ є результат ділення функції $f_0(t)$ на *t*, тобто

$$f(t)=\frac{f_0(t)}{t},\text{ а } \frac{f_0(t)}{t}\to F(p).$$

Користуємось властивістю інтегрування зображення (формула (1.22)):

$$\frac{f(t)}{t}\to\int_p^{+\infty}F(q)dq,\text{ де } \operatorname{Re}p\ge S_1>S_0.$$

Отже, $F(p)=\int_p^{+\infty}F_0(q)dq$, тобто

$$F(p)=\frac{1}{2}\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x(x^2+256)}\right)dx=\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\int_p^{N}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^2+256)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left(\ln|x|\Big|_p^N-\frac{1}{2}\int_p^N\frac{2x}{x^2+256}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left(\ln|N|-\ln|p|-\frac{1}{2}\ln|x^2+256|\Big|_p^N\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left(\ln|N|-\ln|p|-\ln\sqrt{N^2+256}+\ln\sqrt{p^2+256}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left(\ln\frac{|N|}{\sqrt{N^2+256}}-\ln\frac{|p|}{\sqrt{p^2+256}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+256}}{p},\text{ де } \operatorname{Re}p>0.$$

Таким чином,

$$F(p)=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+256}}{p}, \text{ де } \operatorname{Re}p>0.$$

В і д п о в і д ь : $F(p)=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+256}}{p}$, де $\operatorname{Re}p>0$.

Приклад 1.28. Знайти згортку функцій $f_1(t)=t$ та $f_2(t)=\sin t$.

Р о з в ' я з а н н я

Згортку функцій будемо шукати за формулою (1.26,а):

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

Отже,

$$f(t)=t*\sin t=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)d\tau=\begin{bmatrix} U=\tau; & dU=d\tau \\ dV=\sin(t-\tau)dt; & V=\cos(t-\tau)\end{bmatrix}=$$

$$=\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_o^t\cos(t-\tau)d\tau=t+\sin(t-\tau)\Big|_0^t=t-\sin t.$$

В і д п о в і д ь : $t*\sin t=t-\sin t$.

Приклад 1.29. Знайти згортку функцій $f_1(t)=\sin t$ та $f_2(t)=\cos t$.

Р о з в ' я з а н н я

Згортку функцій будемо знаходити за формулою (1.26,б):

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau.$$

Отже,

$$\sin t*\cos t=\int_0^t\cos\tau\sin(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\big(\sin(t-\tau+\tau)+\sin(t-\tau-\tau)\big)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\big(\sin t+\sin(t-2\tau)\big)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\sin t d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\sin(t-2\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\tau\sin t\Big|_0^t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos(t-2\tau)\Big|_0^t=\frac{1}{2}t\sin t+\frac{1}{4}\cos t-\frac{1}{4}\cos t=\frac{1}{2}t\sin t.$$

Виходить,

$$\sin t*\cos t=\frac{1}{2}t\sin t.$$

В і д п о в і д ь : $\sin t*\cos t=\frac{1}{2}t\sin t$.

2 ОБЕРНЕНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

2.1 Обернене перетворення Лапласа

У розділі 1 було розглянуте пряме перетворення Лапласа, яке задано формулою (1.2). Пряме перетворення Лапласа дозволяє за заданим оригіналом $f(t)$ знайти його відображення $F(p)$.

У розділі 2 буде розглянуто обернене перетворення Лапласа, яке дозволяє за заданим зображенням $F(p)$ відновити його оригінал $f(t)$.

Теорема. Нехай функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а $F(p)$ – його зображення, якщо $\operatorname{Re} p > S_0$, при цьому оригінал $f(t)$ є неперервною функцією у півплощині $\operatorname{Re} p > S$, де $S > S_0$. Тоді оригінал $f(t)$ визначається формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\infty}^{S+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \qquad (2.1)$$

де $\operatorname{Re} p > S$, а невласний інтеграл розглядається у розумінні головних значень.

Формула (2.1) називається формулою обернення Рімана-Мелліна.

Теорема (достатня умова існування оригіналу). Нехай p є комплексною змінною, тобто $p = S + i\sigma$, а $F(p)$ – функція комплексної змінної p, яка задовольняє таким умовами:

1) $F(p)$ є аналітичною функцією, у півплощині $\operatorname{Re} p > S_0$;

2) якщо $|p| \to \infty$, то функція $F(p)$ рівномірно збігається до нуля у півплощині $\operatorname{Re} p > S > S_0$;

3) невласний інтеграл $\int_{S-i\infty}^{S+i\infty} |F(S+i\sigma)|\,d\sigma$ збігається, то тоді існує функція $f(t)$, для якої функція $F(p)$ є зображенням, коли $\operatorname{Re} p > S_0$ та справедливою є формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\infty}^{S+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \qquad (2.2)$$

де $\operatorname{Re} p > S > S_0$; $t > 0$.

Теорема (єдиності оригіналу). Якщо в деякій напівплощині $\operatorname{Re} p > S$ функція $F(p)$ є зображеннями і функції-оригіналу $f_1(t)$, і функції-оригіналу $f_2(t)$, то ці функції задовольняють умову

$$f_1(t) \equiv f_2(t)$$

у тій області, де обидві функції задовольняють умови існування оригіналу.

2.2 Методи знаходження оригіналу за заданим зображенням

2.2.1 Перша теорема розкладання зображення на прості дроби

Теорема. Якщо зображення $F(p)$ є дробно-раціональною функцією, тобто

$$F(p)=\frac{Q_m(p)}{\Phi_n(p)},$$

де дріб $\frac{Q_m(p)}{\Phi_n(p)}$ є правильним $(m<n)$ та нескоротним і при цьому корені $p_1, p_2, ..., p_n$ многочлена $\Phi_n(p)$ є дійсними або комплексними, простими коренями, то відповідний оригінал $f(t)$ знаходиться за формулою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_m(p_k)}{\Phi'_n(p_k)}e^{p_k t}. \tag{2.3}$$

2.2.2 Друга теорема розкладання зображення на прості дроби

Теорема. Якщо зображення $F(p)$ є дробно-раціональною функцією, тобто,

$$F(p)=\frac{Q_m(p)}{\Phi_n(p)},$$

де дріб $\frac{Q_m(p)}{\Phi_n(p)}$ є правильним $(m<n)$ та нескоротним і при цьому корені $p_1, p_2, ..., p_e$ многочлена $\Phi_n(p)$ є дійсними або комплексними, кратними коренями, кратності яких відповідно дорівнюють $r_1, r_2, ..., r_e$, то відповідний оригінал $f(t)$ знаходиться за формулою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left((p-p_k)^{r_k}\cdot\frac{Q_m(p)}{\Phi_n(p)}e^{pt}\right). \tag{2.4}$$

Приклади до пунктів 2.1 та 2.2

Приклад 2.1. За заданим зображенням, користуючись методом розкладання дробу на простіші, знайти відповідний оригінал:

$$F(p)=\frac{p+1}{p^2+1}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Зображення $F(p)$ подано у вигляді

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}.$$

Користуючись таблицею оригіналів та зображень, знаходимо $f(t)$.

$$f(t) = \cos t + \sin t.$$

В і д п о в і д ь : $f(t) = \cos t + \sin t$.

Приклад 2.2. За заданим зображенням, користуючись формулою (2.3) знайти відповідний оригінал:

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2+1}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо функцію $F(p)$ у вигляді

$$F(p) = \frac{p+1}{(p+1)(p-i)}.$$

Оригінал $F(p)$ – це правильний нескоротний дріб. Коренями знаменника є уявні числа $p = -i$ та $p = i$. Обидва корені прості. Будемо користуватись формулою (2.3). У даному випадку

$Q_1(p) = p+1$; $\Phi_2(p) = p^2+1$; $\Phi_2'(p) = 2p$.

Складаємо допоміжну таблицю

p_k	$Q_1(p_k)$	$\Phi_1'(p_k)$	$\dfrac{Q_1(p_k)}{\Phi_2'(p_k)}$	$\dfrac{Q_1(p_k)}{\Phi_2'(p_k)} e^{p_k t}$
$p_1 = -i$	$-i+1$	$-2i$	$\dfrac{-i+1}{-2i}$	$\dfrac{-i+1}{-2i} e^{-it}$
$p_2 = i$	$i+1$	$2i$	$\dfrac{i+1}{2i}$	$\dfrac{i+1}{2i} e^{it}$

Звідси маємо

$$f(t) = \frac{-i+1}{-2i} e^{-it} + \frac{i+1}{2i} e^{it}.$$

Отриманий результат доцільно спростити

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-it} - \frac{1}{2i} e^{-it} + \frac{1}{2} e^{it} - \frac{1}{2i} e^{it}, \quad f(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Згідно з формулами Ейлера маємо:

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \sin = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, звідки $f(t) = \cos t + \sin t$.

В і д п о в і д ь : $f(t) = \cos t + \sin t$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте з розв'язанням прикладу 2.1.

Приклад 2.3. За заданим зображенням, користуючись методом розкладання дробу на простіші, знайти оригінал

$$F(p)=\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Оскільки кореннями знаменника є дійсні числа $p_1=-3, p_2=-2, p_3=-1, p_4=0$ і при цьому усі корені є простими, то розвинення раціонального дробу на простіші має вигляд

$$\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+2}+\frac{D}{p+3}.$$

Звідси

$$A=\left.\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}\right|_{p=0}=\frac{1}{6};\quad B=\left.\frac{p^2+1}{p(p+2)(p+3)}\right|_{p=-1}=\frac{2}{-2}=-1;$$

$$C=\left.\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+3)}\right|_{p=-2}=\frac{5}{2};\qquad D=\left.\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}\right|_{p=-3}=\frac{10}{-6}=-\frac{5}{3}.$$

Тоді

$$\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

За таблицею оригіналів та зображень маємо

$$f(t)=\frac{1}{6}-e^{-t}+\frac{5}{2}\cdot e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-3t}.$$

В і д п о в і д ь: $f(t)=\frac{1}{6}-e^{-t}+\frac{5}{2}\cdot e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-3t}$.

Приклад 2.4. Зображення $F(t)$ має вигляд

$$F(p)=\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Знайти відповідний оригінал $f(t)$, користуючись формулою (2.3).

Р о з в ’ я з а н н я

Оригінал $F(t)$ – це правильний нескоротний дріб.

Знаходимо корені знаменника:

$p(p+1)(p+2)(p+3)=0$, $p_1=0, p_2=-1,\ \ p_3=-2, p_4=-3$.

Корені знаменника є дійсними числами. Усі корені прості.

Для знаходження оригіналу користуємося формулою (2.3).

У даному випадку

$Q_2(p)=p^2+1;\ \Phi_4(p)=p(p+1)(p+2)(p+3)$

або $\Phi_4(p)=p^4+6p^3+11p^2+6p$. Звідси $\Phi_4'(p)=4p^4+18p^2+22p+6$.

Складаємо допоміжну табл. 2.1.

Таблиця 2.1

p_k	$Q_2(p_k)$	$\Phi'_4(p_k)$	$\dfrac{Q_2(p_k)}{\Phi'_4(p_k)}$	$\dfrac{Q_2(p_k)}{\Phi'_4(p_k)}e^{p_k t}$
$p_1=0$	1	6	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$
$p_2=-1$	2	–2	-1	$-e^{-t}$
$p_3=-2$	5	2	$\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{5}{2}e^{-2t}$
$p_4=-3$	10	–6	$-\dfrac{5}{3}$	$-\dfrac{5}{3}e^{-3t}$

Таким чином,

$f(t)=\dfrac{1}{6}-e^{-t}+\dfrac{5}{2}\cdot e^{-2t}-\dfrac{5}{3}e^{-3t}$.

Відповідь: $f(t)=\dfrac{1}{6}-e^{-t}+\dfrac{5}{2}\cdot e^{-2t}-\dfrac{5}{3}e^{-3t}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте з розв'язаннями прикладу 2.3.

Приклад 2.5. За заданим зображенням, користуючись методом розкладання дробу на простіші, знайти оригінал:

$$F(p)=\frac{p^2+3p+3}{(p^2-1)(p^2-4)}.$$

Розв'язання

Запишемо зображення $F(t)$ у вигляді

$$F(p)=\frac{p^2+3p+3}{(p-1)(p+1)(p-2)(p+2)}.$$

Коренями знаменника є дійсні числа $p_1=-2, p_2=-1,\quad p_3=1, p_4=2$.

Усі корені є простими. У цьому випадку розвинення дробу на простіші має вигляд

$$\frac{p^2+3p+3}{(p+3)(p+1)(p-1)(p-2)}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{p-2}.$$

Звідси,

$$A=\left.\frac{p^2+3p+3}{(p+1)(p-2)(p-2)}\right|_{p=-2}=-\frac{1}{12};$$

$$B=\left.\frac{p^2+3p+3}{(p+2)(p-1)(p-2)}\right|_{p=-1}=\frac{1}{6};$$

$$C=\left.\frac{p^2+3p+3}{(p+2)(p+1)(p-2)}\right|_{p=1}=-\frac{7}{6};$$

$$D = \left.\frac{p^2+3p+3}{(p+2)(p+1)(p-1)}\right|_{p=2} = \frac{13}{12}.$$

Отже,

$$\frac{p^2+3p+3}{(p+2)(p+1)(p-1)(p-2)} = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p+2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p+1} - \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{13}{12}\cdot\frac{1}{p-2}.$$

За таблицею оригіналів та зображень маємо

$$f(t) = -\frac{1}{12}\cdot e^{-2t} + \frac{1}{6}\cdot e^{-t} - \frac{7}{6}\cdot e^{t} + \frac{13}{12}\cdot e^{2t}.$$

Відповідь: $f(t) = -\frac{1}{12}\cdot e^{-2t} + \frac{1}{6}\cdot e^{-t} - \frac{7}{6}\cdot e^{t} + \frac{13}{12}\cdot e^{2t}$.

Приклад 2.6. За заданим зображенням знайти відповідний оригінал, користуючись формулою (2.3)

$$F(p) = \frac{p^2+3p+3}{(p^2-1)(p^2-4)}.$$

Розв'язання

Запишемо зображення $F(p)$ у вигляді

$$F(p) = \frac{p^2+3p+3}{(p-1)(p+1)(p-2)(p+2)}.$$

Знаходимо корені многочлена

$\Phi_4(p) = (p-1)(p+1)(p-2)(p+2)$;

$(p-1)(p+1)(p-2)(p+2) = 0$, $p_1 = -2, p_2 = -1$, $p_3 = 1, p_4 = 2$.

Для знаходження $\Phi_4'(p)$ запишемо многочлен $\Phi_4(p)$ у вигляді

$\Phi_4(p) = p^4 - 5p^2 + 4$. Звідси $\Phi_4'(p) = 4p^3 - 10p$

Складаємо допоміжну табл. 2.2.

Таблиця 2.2

p_k	$Q_2(t)$	$\Phi_4'(t)$	$\frac{Q_2(t)}{\Phi_4'(t)}$	$\frac{Q_2(t)}{\Phi_4'(t)}e^{p_k t}$
$p_1 = -2$	1	–12	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}e^{-2t}$
$p_2 = -1$	2	6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}e^{-t}$
$p_3 = 1$	7	–6	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{7}{6}e^{t}$
$p_4 = 2$	13	12	$\frac{13}{12}$	$\frac{13}{12}e^{2t}$

Отже,

$$f(t) = -\frac{1}{12}\cdot e^{-2t} + \frac{1}{6}\cdot e^{-t} - \frac{7}{6}\cdot e^{t} + \frac{13}{12}\cdot e^{2t}.$$

В і д п о в і д ь : $f(t) = -\frac{1}{12} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{-t} - \frac{7}{6} \cdot e^{t} + \frac{13}{12} \cdot e^{2t}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте з розв'язаннями прикладу 2.5.

Приклад 2.7. За заданим зображенням знайти відповідний оригінал, користуючись методом розкладання дробу на простіші

$$F(p) = \frac{p - p^2 + 1}{p^4 - 2p^3 - 5p^2 + 6p}.$$

Р о з в ' я з а н н я

За умовою маємо $Q_3(p) = p^3 - p^2 + 1$, $\Phi_4(p) = p^4 - 2p^3 - 5p^2 + 6p$.

Многочлен $\Phi_4(p)$ маємо розкласти на множники, щоб знайти його корені.

$$\Phi_4(p) = p(p^3 - 2p^2 - 5p + 6).$$

Якщо многочлен $p^3 + 2p^2 - 5p + 6$ має цілі корені, то вони є дільниками вільного члена 6, тобто, це можуть бути числа $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

Безпосередньою підстановкою можемо впевнитись у тому, що $p = 1$ є коренем цього многочлена.

Це означає, що многочлен $p^3 - 2p^2 - 5p + 6$ ділиться націло на $p - 1$. Виконаємо ділення:

$$\begin{array}{rl|l}
 & p^3 - 2p^2 - 5p + 6 & p - 1 \\ \cline{3-3}
- & p^3 - p^2 & p^2 - p - 6 \\ \cline{1-2}
 & -p^2 - 6p & \\
- & -p^2 + p & \\ \cline{1-2}
 & -6p + 6 & \\
- & -6p + 6 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Таким чином, виходить, що $\Phi_4(p) = p(p - 1)(p^2 - p - 6)$.

Оскільки $p^2 - p - 6 = (p - 3)(p + 2)$, то

$\Phi_4(p) = p(p - 1)(p - 3)(p + 2)$.

Коренями многочлена $\Phi_4(p)$ є дійсні числа: $p = -2$; $p = 0$; $p = 1$; $p = 3$.

Усі корені є простими. Розкладаємо $F(p)$ на суму простіших

$$F(p) = \frac{p^3 - p^2 + 1}{p(p - 1)(p - 3)(p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - 1} + \frac{C}{p - 3} + \frac{D}{p - 2}.$$

Звідси

$$A = \left.\frac{p^3 - p^2 + 1}{(p - 1)(p - 2)(p + 2)}\right|_{p=0} = \frac{1}{6}; \quad B = \left.\frac{p^3 - p^2 + 1}{p(p - 3)(p + 2)}\right|_{p=1} = -\frac{1}{6};$$

$$C=\left.\frac{p^3-p^2+1}{p(p-1)(p+2)}\right|_{p=3}=\frac{19}{30};\;\; D=\left.\frac{p^3-p^2+1}{p(p-1)(p-3)}\right|_{p=-2}=\frac{11}{30}.$$

Тоді

$$F(p)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{19}{30}\cdot\frac{1}{p-3}+\frac{11}{30}\cdot\frac{1}{p+2},$$

$$f(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}e^{t}+\frac{19}{30}e^{3t}+\frac{11}{30}e^{-2t}.$$

В і д п о в і д ь : $f(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}e^{t}+\frac{19}{30}e^{3t}+\frac{11}{30}e^{-2t}$.

Приклад 2.8. За заданим зображенням знайти відповідний оригінал, користуючись формулою (2.3):

$$F(p)=\frac{p^3-p^2+1}{p^4-2p^3-6p^2+6p}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Запишемо $F(p)$ у вигляді

$$F(p)=\frac{p^3-p^2+1}{p(p-1)(p-3)(p+2)}$$

$Q_3(p)=p^3-p^2+1$, $\Phi_4(p)=p(p-1)(p-3)(p+2)$.

Корені знаменника: $p_1=-2$; $p_2=0$; $p_3=1$; $p_4=3$. Ці корені є дійсними та простими.

Складаємо допоміжну табл. 2.3.

Таблиця 2.3

p_k	$Q_3(p_k)$	$\Phi_4'(p_k)$	$\frac{Q_3(p_k)}{\Phi_4'(p_k)}$	$\frac{Q(p_k)}{\Phi_4'(p_k)}e^{p_k t}$
$p_1=-2$	–11	–30	$\frac{11}{30}$	$\frac{11}{30}e^{-2t}$
$p_2=0$	1	6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$p_3=1$	1	–6	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{6}e^{t}$
$p_4=3$	19	30	$\frac{19}{30}$	$\frac{19}{30}e^{3t}$

Таким чином, $f(t)=\frac{11}{30}e^{-2t}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}e^{t}+\frac{19}{30}e^{3t}$.

В і д п о в і д ь : $f(t)=\frac{11}{30}e^{-2t}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}e^{t}+\frac{19}{30}e^{3t}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте з розв'язанням прикладу 2.7.

Приклад 2.38. Знайти оригінал за заданим зображенням, користуючись методом розкладання дробу на простіші:

$$F(p)=\frac{p^2+4}{(p-4)(p+1)(p-2)^2}.$$

Розв'язання

Коренями знаменника є дійсні числа $p_1=4$; $p_2=-1$; $p_3=2$. Корені $p_1=4$ та $p_2=-1$ є простими, а корінь $p=2$ є кратним коренем з кратністю $r=2$. У такому разі розвинення раціонального дробу має вигляд:

$$\frac{p^2+4}{(p-4)(p+1)(p-2)^2}=\frac{A_1}{p-4}+\frac{A_2}{p+1}+\frac{B_1}{p-2}+\frac{B_2}{(p-2)^2}.$$

Знаходимо шукані коефіцієнти A_1, A_2, B_1, B_2.

$p^2+4=A_1(p+1)(p-2)^2+A_1(p-4)(p-2)^2+$

$+B_1(p-4)(p+1)(p-2)+B_2(p-4)(p+1).$

Якщо $p=4$, то $20 = 20A_1$, звідси $A_1 = 1$.

Якщо $p=-1$, то $5 = -45A_2$, звідси $A_2=-\frac{1}{9}$.

Якщо $p=2$, то $8 = -6B_2$, звідси $B_2=-\frac{4}{3}$.

Якщо $p=0$, то $4 = 4A_1 - 16A_2 + 8B_1 - 4B2$,

звідси $4=4+\frac{16}{9}+\frac{16}{3}+8B$, $8B_1=-\frac{64}{9}$, $B_1=-\frac{8}{9}$.

Отже,

$$F(p)=\frac{1}{p-4}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(p-2)^2}.$$

Згідно з таблицею оригіналів та зображень, маємо:

$$f(t)=e^{4t}-\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{8}{9}e^{2t}-\frac{4}{3}e^{2t}t.$$

Відповідь: $f(t)=e^{4t}-\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{8}{9}e^{2t}-\frac{4}{3}e^{2t}t$.

Приклад 2.10. Знайти оригінал за заданим зображенням, використовуючи формули (2.3) та (2.4):

$$F(p)=\frac{p^2+4}{(p-4)(p+1)(p-2)^2}.$$

Розв'язання

$Q_2(p)=p^2+4$; $\Phi_4(p)=p(p-4)(p+1)(p-2)^2$.

Корені знаменника $p_1=4$; $p_2=-1$ – дійсні та прості, корінь $p=2$ – дійсний та кратний з кратністю $r=2$.

Запишемо $\Phi_4(p)$ у вигляді

$\Phi_4(p) = p^4 - 7p^3 + 12p^2 + 4p - 16$. Тоді $\Phi_4'(p) = 4p^3 - 21p^2 + 24p + 4$.

Складаємо допоміжну табл. 2.4 для простих коренів.

Таблиця 2.4

p_k	$Q_2(p)$	$\Phi_4'(p)$	$\dfrac{Q_2(p)}{\Phi_4'(p)}$	$\dfrac{Q(p)}{\Phi_4'(p)}e^{p_k t}$
$p_1 = 4$	20	20	$\dfrac{20}{20} = 1$	e^{4t}
$p_2 = -1$	5	–45	$-\dfrac{5}{45} = -\dfrac{1}{9}$	$-\dfrac{1}{9}e^{-t}$

Для кратного кореня $p = 2$ маємо

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 2}\left(\frac{(p^2+4)(p-2)^2}{(p-2)^2(p-4)(p+1)}e^{pt}\right)' = \lim_{p\to 2}\left(\frac{(p^2+4)e^{pt}}{(p-4)(p+1)}\right)' =$$

$$= \lim_{p\to 2}\left(\frac{(p^2+4)e^{pt}}{(p-4)(p+1)}\right)' = \lim_{p\to 2}\left(\frac{2p(p^2-3p-4)-(p^2+4)(2p-3)}{(p^2-3p-4)^2}e^{pt} +\right.$$

$$\left. + \frac{t(p^2+4)e^{pt}}{p^2-3p-4^2}\right) = -\frac{8}{9}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{2t}t\,.$$

Остаточно маємо

$$f(t) = e^{4t} - \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{8}{9}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{2t}t\,.$$

В і д п о в і д ь: $f(t) = e^{4t} - \dfrac{1}{9}e^{-t} - \dfrac{8}{9}e^{2t} - \dfrac{4}{3}e^{2t}t$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте з розв’язанням прикладу 2.9.

Приклад 2.11. За заданим зображенням знайти відповідний оригінал, користуючись формулою (2.4)

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}\,.$$

Р о з в ’ я з а н н я

За умовою $Q_0(p) = 1$; $\Phi_5(p) = (p-1)^2(p-2)^3$. Коренями знаменника є дійсні числа $p = 1$ та $p = 2$. Кратність кореня $p = 1$ дорівнює $r_1 = 2$, а кратність кореня $p = 3$ дорівнює $r_2 = 3$. Оскільки корені знаменника є кратними, то доцільно користуватись формулою (2.4).

Тоді

$$f(t)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 1}\left(\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)^3}\cdot(p-1)^2\right)'+$$
$$(*)$$
$$+\frac{1}{(3-1)!}\lim_{p\to 2}\left(\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)^3}(p-2)^3\right)''.$$

Після спрощення маємо

$$f(t)=\lim_{p\to 1}\left((p-2)^{-3}e^{pt}\right)'+\frac{1}{2}\lim_{p\to 2}\left((p-1)^{-2}e^{pt}\right)''.$$

Знайдемо відповідні похідні.

$$\left((p-2)^{-3}e^{pt}\right)'=-3(p-2)^{-4}e^{pt}+t(p-2)^{-3}=\left(\frac{-3}{(p-2)^4}+\frac{t}{(p-2)^3}\right)e^{pt}=$$
$$=\frac{-3+t(p-2)}{(p-2)^4}e^{pt}=\frac{tp-2t-3}{(p-2)^4}e^{pt}.$$

$$\left((p-1)^{-2}e^{pt}\right)'=-2(p-1)^{-3}e^{pt}+t(p-1)^{-2}e^{pt}=\left(\frac{-2}{(p-1)^3}+\frac{t}{(p-1)^2}\right)e^{pt}=$$
$$=\frac{-2+tp-t}{(p-1)^3}e^{pt}.$$

$$\left(\frac{-2+tp-t}{(p-1)^3}e^{pt}\right)'=\frac{t(p-1)^3-3(-2+tp-t)(p-1)^2}{(p-1)^6}e^{pt}+$$
$$+\frac{t(-2+tp-t)^2}{(p-1)^3}e^{pt}+\frac{tp-t+6-3tp+3t}{(p-1)^4}e^{pt}+\frac{-2t+t^2p-t^2}{(p-1)^3}e^{pt}=$$
$$=\frac{e^{pt}}{(p-1)^4}(tp-t+6-3tp+3t-2tp+t^2p^2-t^2p+2t-t^2p+t^2)=$$
$$=\frac{e^{pt}}{(p-1)^4}(t^2p^2-2t^2p-4tp+4t+t^2+6)=\frac{e^{pt}}{(p-1)^4}(-4t+t^2+6).$$

Повертаємось до рівності (*). Виходить,

$$f(t)=\lim_{p\to 1}\frac{tp-2t-3}{(p-2)^4}e^{pt}+\frac{1}{2}\lim_{p\to 2}\frac{-4t+t^2+6}{(p-1)^4}e^{pt}=$$
$$=-te^t-3e^t+\frac{1}{2}t^2e^{2t}-2te^{2t}+3e^{2t}.$$

В і д п о в і д ь : $f(t)=\lim_{p\to 1}\frac{tp-2t-3}{(p-2)^4}e^{pt}+\frac{1}{2}\lim_{p\to 2}\frac{-4t+t^2+6}{(p-1)^4}e^{pt}=$

$$=-te^t-3e^t+\frac{1}{2}t^2e^{2t}-2te^{2t}+3e^{2t}.$$

Приклад 2.12. Знайти оригінал за заданим зображенням, користуючись методом розкладання дробу на простіші:

$$F(p)=\frac{p^2-p+2}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо $F(p)$ у вигляді

$$F(p)=\frac{p^2-p+2}{(p+i)(p-i)(p+2i)(p-2i)}.$$

Тоді

$$\frac{p^2-p+2}{(p+i)(p-i)(p+2i)(p-2i)}=\frac{A_1}{p+i}+\frac{A_2}{p-i}+\frac{A_3}{p+2i}+\frac{A_4}{p-2i}.$$

$$A_1=\left.\frac{p^2-p+2}{(p-i)(p+2i)(p-2i)}\right|_{p=-i}=\frac{1+i}{-6i}=\frac{i-1}{6};$$

$$A_2=\left.\frac{p^2-p+2}{(p+i)(p+2i)(p-2i)}\right|_{p=i}=\frac{1-i}{6i}=-\frac{i+1}{6};$$

$$A_3=\left.\frac{p^2-p+2}{(p+i)(p-i)(p-2i)}\right|_{p=-2i}=\frac{-2+2i}{12i}=-\frac{-2i-2}{12}=\frac{1+i}{6};$$

$$A_4=\left.\frac{p^2-p+2}{(p+i)(p-i)(p+2i)}\right|_{p=2i}=\frac{-2-2i}{-12i}=-\frac{-2i+2}{12}=\frac{1-i}{6}.$$

Звідси маємо

$$F(p)=\frac{i-1}{6}\cdot\frac{1}{p+i}-\frac{i+1}{6}\cdot\frac{1}{p-i}+\frac{i+1}{6}\cdot\frac{1}{p+2i}-\frac{1-i}{6}\cdot\frac{1}{p-2i}.$$

Знаходимо оригінал

$$f(t)=\frac{-1+i}{6}e^{-it}-\frac{1+i}{6}e^{-it}+\frac{1+i}{6}\cdot e^{-2it}+\frac{1-i}{6}\cdot e^{2it}.$$

Користуючись формулами Ейлера цей результат можна спростити. Виходить,

$$f(t)=\frac{1}{6}\left(-e^{-it}+ie^{-it}-e^{it}-ie^{it}+ie^{-2it}+ie^{-2it}-e^{2it}+ie^{2it}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}(-\cos t+i\sin t+i\cos t+\sin t-\cos t-i\sin t-i\cos t+\sin t+\cos 2t-i\sin 2t+$$

$$+i\cos 2t+\sin 2t+\cos 2t+i\sin 2t-i\cos 2t+\sin 2t)=\frac{1}{3}(\cos 2t+\sin 2t-\cos t+\sin t).$$

В і д п о в і д ь : $f(t)=\dfrac{1}{3}(\cos 2t+\sin 2t-\cos t+\sin t)$.

Приклад 2.13. Знайти оригінал за заданим зображенням, користуючись методом розкладання дробу на простіші:

$$F(p)=\frac{p^2-p+2}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Інколи буває доцільним розкладати дріб на суму дробів у такий спосіб:

$$F(p)=\frac{p^2-p+2}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{A_1p+B_1}{p^2+1}+\frac{A_2p+B_1}{p^2+1}.$$

Коефіцієнти A_1, B_1, A_2, B_2 знаходимо методом порівняння коефіцієнтів

$p^2-p+2=(A_1p+B_1)(p^2+4)+(A_2p+B_2)(p^2+1)$.

$$\begin{array}{r|l} p^3 & A_1+A_2=0; \\ p^2 & B_1+B_2=1; \\ p & 4A_1+A_2=-1; \\ p^0 & 4B_1+B_2=2. \end{array}$$

Звідси знаходимо

$$A_1=-\frac{1}{3},\ A_2=-\frac{1}{3},\ B_1=\frac{1}{3},\ B_2=\frac{2}{3}.$$

Тоді

$$F(p)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2+4}.$$

За таблицею оригіналів та зображень знаходимо оригінал $f(t)$.

$$f(t)=\frac{1}{3}\left(-\cos t+\sin t+\cos 2t+\sin 2t\right).$$

В і д п о в і д ь : $f(t)=\frac{1}{3}\left(-\cos t+\sin t+\cos 2t+\sin 2t\right)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте з розв’язанням прикладу 2.12.

Приклад 2.14. Знайти оригінал за заданим зображенням, користуючись формулою (2.3):

$$F(p)=\frac{p^2-p+2}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Запишемо $F(p)$ у вигляді

$$F(p)=\frac{p^2-p+2}{(p+i)(p-i)(p+2i)(p-2i)}.$$

Тоді $Q_2(p)=p^2-p+2$; $\Phi_4(p)=(p+i)(p-i)(p+2i)(p-2i)$ або $\Phi_4(p)=p^4+5p^2+4$, а $\Phi_4'(p)=4p^4+10p$.

Складаємо допоміжну табл. 2.5.

Таблиця 2.5

p_k	$Q_2(p)$	$\Phi_4'(p)$	$\dfrac{Q_3(p)}{\Phi_4'(p)}$	$\dfrac{Q_2(p)}{\Phi_4'(p)}e^{p_k t}$
$p_1=-i$	$1+i$	$-6i$	$\dfrac{1+i}{-6i}=\dfrac{-1+i}{6}$	$-\dfrac{1+i}{6}e^{-it}$
$p_2=i$	$1-i$	$6i$	$\dfrac{1-i}{6i}=\dfrac{-1-i}{6}$	$\dfrac{-1-i}{6}e^{it}$
$p_3=-2i$	$-2+2i$	$12i$	$\dfrac{-2+2i}{12i}=\dfrac{1+i}{6}$	$\dfrac{1+i}{6}e^{-2it}$
$p_4=2i$	$-2-2i$	$-12i$	$\dfrac{-2-2i}{-12i}=\dfrac{1-i}{6}$	$\dfrac{1-i}{6}e^{2it}$

Звідси виходить, що

$$f(t)=-\frac{1+i}{6}e^{-it}+\frac{-1-i}{6}e^{it}+\frac{1+i}{6}e^{-2it}+\frac{1-i}{6}e^{2it}.$$

Після спрощення за формулами Ейлера отримаємо такий результат:

$$f(t)=\frac{1}{3}(\cos 2t+\sin 2t-\cos t+\sin t).$$

В і д п о в і д ь : $f(t)=\dfrac{1}{3}(\cos 2t+\sin 2t-\cos t+\sin t)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте з розв'язанням прикладів 2.12 та 2.13.

Приклад 2.15. Знайти оригінал за заданим зображенням, користуючись формулою (2.4):

$$F(p)=\frac{1}{(p+2)^4}.$$

Р о з в ' я з а н н я

$$f(t)=\frac{1}{3!}\lim_{p\to-2}\frac{d^3}{dp^3}\left(\frac{1}{(p+2)^4}\cdot(p+2)^4\cdot e^{pt}\right)=\frac{1}{3!}\lim_{p\to-2}\frac{d^3}{dp^3}\left(e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{p\to-2}\left(te^{pt}\right)''=\frac{1}{3!}\lim_{p\to-2}\left(t^2e^{pt}\right)'=\frac{1}{3!}\lim_{p\to-2}\left(t^3e^{pt}\right)=\frac{1}{6}t^3e^{-2t}.$$

В і д п о в і д ь : $f(t)=\dfrac{1}{6}t^3e^{-2t}$.

Приклад 2.16. Знайти оригінал за заданим зображенням, користуючись формулою інтегрування оригіналу:

$$F(p)=\frac{p^2+4}{p^2(p^4-7p^3+12p^2+4p-16)}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Якщо у знаменнику є множник p^n, то розв'язування можна дещо спростити, користуючись формулою інтегрування оригіналу.

Спочатку розглянемо зображення

$$F(p)=\frac{p^2+4}{p^4-7p^3+12p^2+4p-16}$$

та знайдемо його оригінал. Користуючись результатами прикладу 2.39, маємо

$$\frac{p^2+4}{p^4-7p^3+12p^2+4p-16}\to e^{4t}-\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{8}{9}e^{2t}-\frac{4}{3}e^{2t}t\,.$$

Далі розглядаємо таке зображення

$$F(p)=\frac{p^2+4}{p(p^4-7p^3+12p^2+4p-16)}\,.$$

Наявність множника p у знаменнику дозволяє користуватись формулою інтегрування оригіналу.

$$\frac{p^2+4}{p(p^4-7p^3+12p^2+4p-16)}\to\int_0^t\left(e^{4\tau}-\frac{1}{9}e^{-\tau}-\frac{8}{9}e^{2\tau}-\frac{4}{3}e^{2\tau}\tau\right)d\tau=$$

$$=\left(\frac{1}{4}e^{4\tau}+\frac{1}{9}e^{-\tau}-\frac{4}{9}e^{2\tau}\right)\Bigg|_0^t-\frac{4}{3}\int_0^t\tau e^{2\tau}d\tau=\begin{bmatrix}U=\tau; & dU=d\tau\\ dV=e^{2\tau}d\tau; & V=\dfrac{1}{2}e^{2\tau}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}(e^{4t}-1)+\frac{1}{9}(e^{-t}-1)-\frac{4}{9}(e^{2t}-1)-\frac{4}{3}\left(\frac{\tau}{2}e^{2\tau}\Bigg|_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau}d\tau\right)=$$

$$=\frac{1}{4}e^{4t}+\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{4}{9}e^{2t}+\frac{1}{12}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}te^{2t}-\frac{1}{4}e^{2\tau}\Bigg|_0^t\right)=\frac{1}{4}e^{4t}+\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{4}{9}e^{2t}+\frac{1}{12}-$$

$$-\frac{2}{3}te^{2t}+\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}e^{4t}+\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{1}{9}e^{2t}-\frac{2}{3}te^{2t}-\frac{1}{4}.$$

Нарешті розглянемо зображення

$$F(p)=\frac{p^2+4}{p(p^4-7p^3+12p^2+4p-16)}\,.$$

Наявність ще одного множника p у знаменнику дозволяє знов виконати інтегрування щойно знайденого оригіналу.

$$f(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{4}e^{4t}+\frac{1}{9}e^{-\tau}-\frac{1}{9}e^{2\tau}-\frac{2}{3}\tau e^{2\tau}-\frac{1}{4}\right)d\tau=\left(\frac{1}{16}e^{4\tau}-\frac{1}{9}e^{-\tau}-\frac{1}{18}e^{2\tau}-\frac{1}{4}\tau\right)\Bigg|_0^t-$$

$$-\frac{2}{3}\int_0^t\tau e^{2\tau}d\tau=\frac{1}{16}\left(e^{4t}-1\right)-\frac{1}{9}\left(e^{-t}-1\right)-\frac{1}{18}\left(e^{2t}-1\right)-\frac{1}{4}\left(t-0\right)-$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\tau}{2}e^{2\tau}\Bigg|_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau}d\tau\right)=\frac{1}{16}e^{4t}-\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{1}{18}e^{2t}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{3}te^{2t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{16}.$$

$$f(t)=\frac{1}{16}e^{4t}-\frac{1}{9}e^{-t}+\frac{1}{9}e^{2t}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{3}te^{2t}-\frac{1}{16}.$$

В і д п о в і д ь : $f(t)=\dfrac{1}{16}e^{4t}-\dfrac{1}{9}e^{-t}+\dfrac{1}{9}e^{2t}-\dfrac{1}{4}t-\dfrac{1}{3}te^{2t}-\dfrac{1}{16}$.

3 ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1 Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь методами операційного числення

Як відомо, що за допомогою операційного числення операцію диференціювання функції можна замінити множенням оригіналу, а операцію інтегрування функції можна замінити операцією ділення оригіналу.

Такі властивості операційного числення дозволяють розв'язування диференціального рівняння замінити розв'язуванням алгебраїчного рівняння, що значно простіше.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \qquad (3.1)$$

де $a_i = \text{const}(i = 1; 2;...; n)$; $f(t)$ – деяка функція, яка може бути оригіналом.

Поставимо за мету знайти частинний розв'язок диференціального рівняння (3.1), який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0; \\ y'(t_0) = y_0'; \\ .... \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Будемо вважати, що $t_0 = 0$; $t_0 = t_0$, а якщо $t_0 \neq 0$, то замість t можна ввести нову змінну $\tau = t - t_0$. Тоді, якщо t_0, то $\tau = 0$. Внаслідок такого припущення початкові умови набувають такий вигляд:

$$\begin{cases} y(0) = y_0; \\ y'(0) = y_0'; \\ .... \\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Нехай зображенням шуканої функції-оригіналу $y(t)$ є функція $Y(p)$, тобто

$$y(t) \rightarrow Y(p).$$

Далі користуючись формулою диференціювання оригіналу дістанемо наступні рівності:

$$y'(t) \rightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - y_0;$$

$$y''(t) \rightarrow p(pY(p) - y_0) - y'(0) = p^2 Y(p) - py_0 - y_0';$$

$$y''(t) \rightarrow p(p^2 Y(p) - py_0 - y_0') - y''(0) = p^3 Y(p) - p^2 y_0 - py_0' - y_0'';$$

……………………………………………………………………..

……………………………………………………………………..

$$y^n(t) \rightarrow p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y_0' - ... - py_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)}.$$

Зображення функції-оригіналу $f(t)$ позначимо $F(p)$.

Замість функції $y(t)$ та її похідних та замість функції $f(t)$ підставимо у диференціальне рівняння відповідні зображення внаслідок чого дістанемо таке алгебраїчне рівняння:

$$a_0\left(p^nY(p)-p^{n-1}y_0-p^{n-2}y_0'-...-py_0^{(n-2)}-y_0^{(n-1)}\right)+$$
$$+a_1\left(p^{n-1}Y(p)-p^{n-2}y_0-p^{n-3}y_0'-...-y_0^{(n-1)}\right)+...+a_0\left(pY(p)-y_0\right)+a_nY(p)=$$
$$=F(p).$$

З цього рівняння знаходимо $Y(p)$.

$$Y(p)=\frac{F(p)+a_0\left(p^{n-1}y_0+...+y_0^{(n-1)}\right)+a_1\left(p^{n-1}y_0+...+y_0^{(n-1)}\right)+...+a_ny_0}{a_np^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+...+a_{n-1}p+a_n}.$$

Для зручності позначимо чисельник через $Q_{n-1}(p)$, а знаменник через $\Phi_n(p)$.

Отже,

$$Y(p)=\frac{Q_{n-1}(p)}{\Phi_n(p)}.$$

У той чи інший спосіб за заданим зображенням знаходимо оригінал, який і є шуканим частинним розв’язком диференціального рівняння.

Слід звернути увагу на те, що при знаходженні частинного розв’язку диференціального рівняння звичайно спочатку знаходять загальний розв’язок, а за допомогою загального розв’язку диференціального рівняння знаходиться і частинний розв’язок.

Якщо ж диференціальне рівняння розв’язується операторним методом, то частинний розв’язок знаходять незалежно від загального розв’язку, що дає значну перевагу у розв’язанні диференціального рівняння.

Приклади до пункту 3.1

Приклад 3.1. Розв’язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y''+y=e^{-t}+2; \\ y(0)=0; \\ y'(0)=0. \end{cases}$$

Р о з в ’ я з а н н я

Шукаємо частинний розв’язок $y(t)$ заданого диференціального рівняння операторним методом.

Нехай $Y(p)$ є зображенням оригіналу $y(t)$. Тоді виходить

$$y'(t)\to pY(p)-y(0);$$

$$y''(t)\to p^2Y(p)-y'(0),$$

а з урахуванням початкових умов маємо

$$y'(t)\to p(Y(p);$$

$y''(t) \to p^2 Y(p)$.

Оскільки $e^{-t} \to \dfrac{1}{p+1}, 2 \to \dfrac{2}{p}$, то диференціальне рівняння переходить у таке алгебраїчне рівняння:

$$p^2 Y(p) + Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p}.$$

Звідси,

$$Y(p) = \frac{3p+2}{p(p+1)(p^2+1)}.$$

За знайденим зображенням шукаємо відповідний оригінал.

У даному випадку $Q_0(p) = 3p + 2$; $\Phi_3(p) = p(p+1)(p+i)(p-i)$.

Корені знаменника: $p_1 = 0$; $p_2 = -1$; $p_3 = -i$; $p_4 = i$. Усі корені прості. Запишемо $\Phi_4(p)$ у вигляді $\Phi_4(p) = p^4 + p^3 + p^2 + p$ та знайдемо похідну $\Phi_4'(p)$:

$$\Phi_4'(p) = 4p^3 + 3p^2 + 2p + 1.$$

Складаємо допоміжну табл. 3.1.

Таблиця 3.1

p_k	$Q_1(p)$	$\Phi_4'(p)$	$\dfrac{Q_1(p)}{\Phi_4'(p)}$	$\dfrac{Q_1(p)}{\Phi_4'(p)} e^{p_k t}$
$p_1 = 0$	2	1	$\dfrac{2}{1} = 2$	2
$p_2 = -1$	–1	–2	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2} e^{-t}$
$p_3 = -i$	$2 - 3i$	$-2 + 2i$	$\dfrac{2-3i}{-2+2i} = -\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{4}i$	$\left(-\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{4}i\right) e^{-it}$
$p_4 = i$	$2 + 3i$	$-2 - 2i$	$\dfrac{2+3i}{-2-2i} = -\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}i$	$\left(-\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}i\right) e^{it}$

Звідси маємо

$$y(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{4}e^{-it} + \frac{1}{4}ie^{-it} - \frac{5}{4}e^{it} - \frac{1}{4}ie^{it}.$$

Отриманий результат доцільно спростити.

$$y(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{2} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - \frac{1}{2}i\frac{e^{it} - e^{-it}}{2} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{2} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2},$$

$$y(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

В і д п о в і д ь : $y(t)=2+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{5}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$.

Приклад 3.2. Розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y''+2y'+y=\sin t; \\ y(0)=0; \\ y'(0)=-1. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Нехай $y(t)\to Y(p)$.

Тоді $y'(t)\to pY(p)$; $y''(t)\to p^2Y(p)+1$.

При цьому $\sin t\to\frac{1}{p^2+1}$.

Складаємо операторне рівняння, яке відповідає заданому диференціальному рівнянню:

$$p^2Y(p)+1+2pY(p)+Y(p)=\frac{1}{p^2+1};$$

$$(p^2+2p+1)Y(p)=\frac{1}{p^2+1}-1;$$

$$Y(p)=-\frac{p^2}{(p^2+1)(p+1)^2}.$$

Знаходимо оригінал, що відповідає знайденому зображенню

$Q_2(p)=-p^2$; $\Phi_3(p)=(p^2+1)(p+1)^2$ або $\Phi_4(p)=(p-i)(p+i)(p+1)^2$.

Знаходимо похідну:

$\Phi_4'(p)=2p(p+i)^2+2(p^2+1)(p+1)$

або після спрощення $\Phi_4'(p)=4p^3+6p^2+4p+2$.

Для коренів $p=i$ та $p=-i$, які є простими коренями, складаємо допоміжну табл. 3.2.

Таблиця 3.2

p_k	$Q_2(p)$	$\Phi_4'(p)$	$\frac{Q_2(p)}{\Phi_4'(p)}$	$\frac{Q_2(p)}{\Phi_4'(p)}e^{p_kt}$
$p_1=i$	1	–4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}e^{it}$
$p_2=-i$	1	–4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}e^{-it}$

Оригінал, який відповідає кратному кореню $p=-1$ і має кратність $r_3=2$, знаходимо за формулою (2.4).

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to-1}\left(-\frac{p^2\cdot(p+1)^2}{(p^2+1)(p+1)^2}\right)' = -\lim_{p\to-2}\left(\frac{p^2e^{pt}}{p^2+1}\right)'.$$

Спочатку знайдемо похідну від $\dfrac{p^2}{p^2+1}$.

$$\left(\frac{p^2}{p^2+1}\right)' = \frac{2p(p^2+1)-2p\cdot p}{(p^2+1)^2} = \frac{2p^3+2p-2p^3}{(p^2+1)^2} = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

Тоді

$$\lim_{p\to-1}\left(-\frac{p^2e^{pt}}{p^2+1}\right)' = -\lim_{p\to-1}\left(\frac{2p}{(p^2+1)^2}e^{pt} + \frac{p^2\cdot t}{p^2+1}e^{pt}\right) = -\left(-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{t}{2}e^{-t}\right).$$

Остаточно, маємо:

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{it} - \frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}.$$

Цей результат можна спростити:

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t};$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}.$$

В і д п о в і д ь : $y(t) = -\dfrac{1}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}e^{-t} - \dfrac{1}{2}te^{-t}$.

Приклад 3.3. Розв’язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 4; \\ y(0) = 4; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Р о з в ’ я з а н н я

Нехай $y(t) \to Y(p)$. Тоді $y'(t) \to pY(p) - y(0)$;

$y''(t) \to p(Y(p) - 4) - y'(0)$ або $y'(t) \to pY(p) - 4$; $y'' \to pY(p) - 4p - 2$.

При цьому $4 \to \dfrac{4}{p}$.

Складаємо відповідне операторне рівняння:

$$p^2Y(p) - 4p - 2 - 2p - 2pY(p) + 8 + Y(p) = \frac{4}{p},$$

Звідси, маємо

$Y(p) = \dfrac{2(2p^2-3p+2)}{(p-1)^2 p}$. $Q_2(p) = 2(2p^2-3p+2)$; $\Phi_3(p) = (p-1)^2 p$ або $\Phi_3(p) = p^3 - 2p^2 + p$.

Коренями знаменника є дійсні числа $p=0$ та $p=1$. При цьому корінь $p=0$ є простим, а корінь $p=1$ є коренем кратності $r=2$.

Оригінали шукаємо за формулами (2.3) та (2.4).

Виходить,

$$\frac{4p^2-6p+4}{p(p-1)^2} \to \lim_{p\to 0}\left(p-\left(\frac{4p^2-6p+4}{p(p-1)^2}\right)e^{pt}\right)+$$

$$+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 1}\left((p-1)^2\frac{4p^2-6p+4}{p(p-1)^2}e^{pt}\right)' =$$

$$=4+\lim_{p\to 1}\left(\frac{p(8p-6)e^{pt}-(4p^2-6p+4)}{p^2}e^{pt}+\frac{4p^2-6p+4}{p}\cdot te^{pt}\right)=4+2te^t.$$

Таким чином, $y(t)=4+2te^t$.

В і д п о в і д ь : $y(t)=4+2te^t$.

Приклад 3.4. Розв’язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y'''(t)-y''(t)-4y(t)=\sin t; \\ y(-2)=0; \\ y'(-2)=0; \\ y''(-2)=1. \end{cases}$$

Р о з в ’ я з а н н я

Для того, щоб провести операторне розв’язання диференціального рівняння доведеться ввести нову змінну τ замість t у такий спосіб:

$\tau=t+2$, звідси $t=\tau-2$.

Тоді, якщо $t\in[-2;+\infty)$, то $\tau\in[0;+\infty)$.

Після цього задача Коші набуває такий вигляд:

$$\begin{cases} y'''(\tau-2)-y''(\tau-2)-4y(\tau-2)=\sin(\tau-2); \\ y(0)=0; \\ y'(0)=0; \\ y''(0)=1. \end{cases}$$

Нехай $y(\tau)\to Y(p)$. Тоді $y'(\tau)\to pY(p)$, $y''(\tau)\to p^2Y(p)$, $y'''(\tau)\to p^3Y(p)-1$. При цьому $\sin\tau\to\frac{1}{p^2+1}$.

Скористаємося формулою запізнювання:

$y(\tau-2)\to e^{-2p}Y(p)$; $y'(\tau-2)\to pe^{-2p}Y(p)$;

$y''(\tau-2)\to p^2e^{-2p}Y(p)$; $y'''(\tau-2)\to p^3e^{-2p}Y(p)-e^{-2p}$.

При цьому $\sin(\tau-2) \to \dfrac{e^{-2p}}{p^2+1}$. Диференціальне рівняння в операторній формі набуває вигляд:

$$p^3 e^{-2p} Y(p) - e^{-2p} - p^2 e^{-2p} Y(p) - 4e^{-2p} Y(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2+1},$$

звідки

$$Y(p) = \frac{p^2+2}{(p-2)(p^2+1)(p^2+p+2)}.$$

Будемо шукати оригінал методом розкладання дробу на простіші.

$Q_3(p) = p^2+2$; $\Phi_5(p) = (p-2)(p^2+1)(p^2+p+2)$;

$$\frac{p^2+2}{(p-2)(p-i)(p+i)(p^2+p+2)} = \frac{A_1}{p-2} + \frac{A_2 p + A_3}{p^2+1} + \frac{A_4 p + A_5}{p^2+p+2}.$$

$$p^2+2 = A_1(p^2+1)(p^2+p+2) + (A_2 p + A_3)(p-2)(p^2+p+2) +$$
$$+ (A_4 p + A_5)(p-2)(p^2+1).$$

Порівнюючи коефіцієнти при p в однакових степенях, дістанемо:

$A_1 = \dfrac{3}{20}$; $A_2 = \dfrac{1}{10}$; $A_3 = -\dfrac{3}{10}$; $A_4 = -\dfrac{1}{4}$; $A_5 = -\dfrac{1}{4}$.

Тоді

$$Y(p) = \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} -$$
$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}.$$

Переходимо до оригіналів:

$$y(\tau) = \frac{3}{20}e^{2\tau} + \frac{1}{10}\cos\tau - \frac{3}{10}\sin\tau - \frac{1}{4}e^{-\frac{\tau}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}\tau - \frac{1}{4\sqrt{7}}e^{-\frac{\tau}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}\tau.$$

Повертаємось до старої змінної t:

$$y(t+2) = \frac{3}{20}e^{2(t+2)} + \frac{1}{10}\cos(t+2) - \frac{3}{10}\sin(t+2) - \frac{1}{4}e^{-\frac{t+2}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}(t+2) -$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{7}}e^{-\frac{t+2}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}(t+2).$$

В і д п о в і д ь : $y(t+2) = \dfrac{3}{20}e^{2(t+2)} + \dfrac{1}{10}\cos(t+2) - \dfrac{3}{10}\sin(t+2) -$

$$-\frac{1}{4}e^{-\frac{t+2}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}(t+2) - \frac{1}{4\sqrt{7}}e^{-\frac{t+2}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}(t+2).$$

Приклад 3.5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 5y = e^t \cos 2t.$$

Розв'язання

На відміну від попередніх прикладів маємо знайти не частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння, а загальний.

Для знаходження загального розв'язку будемо розглядати задане диференціальне рівняння у сукупності з такими початковими умовами:

$$\begin{cases} y(0) = C_1; \\ y'(0) = C_2, \text{ де } C_1, C_2 - \text{будь які сталі}. \end{cases}$$

Нехай шукана функція $y(t)$ має зображення $Y(p)$, тобто

$y(t) \to Y(p)$.

Тоді $y'(t) \to pY(p) - C_1$; $y''(t) \to p^2 Y(p) - pC_1 - C_2$.

При цьому

$$e^t \cos 2t \to \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4}.$$

Складаємо операторне рівняння:

$$Y(p)(p^2 - 2p + 5) = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + C_1 p + C_2 - 2C_1.$$

Звідси, маємо

$$Y(p) = \frac{p-1}{\left((p-1)^2 + 4\right)^2} + C_1 \frac{p}{(p-1)^2 + 4} + (C_2 - 2C_1)\frac{1}{(p-1)^2 + 4}$$

або

$$Y(p) = \frac{p-1}{\left((p-1)^2 + 4\right)^2} + C_1 \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + (C_2 - C_1)\frac{1}{(p-1)^2 + 4}.$$

Знаходимо оригінали

$$\frac{1}{(p-1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(p-1)^2 + 4} \to \frac{1}{2} e^t \sin 2t; \quad \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} \to e^t \cos 2t.$$

Для знаходження оригіналу функції $\dfrac{p-1}{\left((p-1)^2 + 4\right)^2}$ скористаємось властивістю диференціювання зображення:

$$\left(\frac{1}{(p-1)^2 + 4}\right)' = -\frac{2(p-1)}{\left((p-1)^2 + 4\right)^2} \to -\frac{1}{2} t e^t \sin 2t.$$

Отже,

$$\frac{p-1}{\left((p-1)^2 + 4\right)^2} \to \frac{1}{4} t e^t \sin 2t.$$

Шуканий розв'язок має вигляд:

$$y(t) = \frac{1}{4} t e^t \sin 2t + C_1 e^t \cos 2t + (C_2 - C_1)\frac{1}{2} e^t \sin 2t$$

або

$$y(t)=\frac{1}{4}te^t\sin 2t+e^t(C_1\cos 2t+C_2^*\sin 2t),\text{ де } C_2^*=C_2-C_1.$$

Відповідь: $y(t)=\frac{1}{4}te^t\sin 2t+e^t(C_1\cos 2t+C_2^*\sin 2t)$, де $C_2^*=C_2-C_1$, де $C_1, C_2 -$ будь-які сталі.

3.2 Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь методами операційного числення

Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами розв'язуються у такий самий спосіб, як і окремі диференціальні рівняння. Спочатку від системи диференціальних рівнянь переходять до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, де невідомими є зображення шуканих функцій. Розв'язуючи таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь знаходимо зображення невідомих функцій. За знайденими зображеннями можемо знайти їх оригінали, тобто шукані функції.

Приклади до пункту 3.2

Приклад 3.6. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} y_1'(t)=y_1(t)-2y_2(t)-2y_3(t); \\ y_2'(t)=2y_1(t)+7y_2(t)+5y_3(t); \\ y_3'(t)=-2y_1(t)-4y_2(t)-2y_3(t); \\ y_1(0)=0; \\ y_2(0)=3; \\ y_3(0)=-2. \end{cases}$$

Розв'язання

Нехай

$$y_1(t)\to Y_1(p);$$
$$y_2(t)\to Y_2(p);$$
$$y_3(t)\to Y_3(p).$$

Тоді

$$y_1'(t)\to pY_1(p);$$
$$y_2'(t)\to pY_2(p)-3;$$
$$y_3'(t)\to pY_3(p)+2.$$

На основі системи диференціальних рівнянь складаємо систему операторних рівнянь:

$$\begin{cases}(p-1)Y_1(p)+2Y_2(p)+2Y_3(p)=0;\\ -2Y_1(p)+(p-7)Y_2(p)-5Y_3(p)=3;\\ 2Y_1(p)+4Y_2(p)+(p+2)Y_3(p)=-2.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за правилом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}p-1 & 2 & 2\\ -2 & p-7 & -5\\ 2 & 4 & p+2\end{vmatrix}=(p-3)(p-2)(p-1);\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\ 3 & p-3 & -5\\ -2 & 4 & p+2\end{vmatrix}=-2(p-2);$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}p-1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & -5\\ 2 & -24 & p+2\end{vmatrix}=3p^2-7p;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}p-1 & 2 & 0\\ -2 & p-7 & 3\\ 2 & 4 & -2\end{vmatrix}=-2p^2+4p+2.$$

Тоді

$$Y_1(p)=\frac{-2}{(p-1)(p-3)};\ Y_2(p)=\frac{3p^2-7p}{(p-3)(p-2)(p-1)};$$

$$Y_3(p)=\frac{-2p^2+4p+2}{(p-3)(p-2)(p-1)}.$$

За знайденими зображеннями знаходимо оригінал

$$Y_1(p)=\frac{-2}{(p-1)(p-3)}=\frac{A_1}{p-1}+\frac{A_2}{p-3},$$

Звідси, $A_1=1$; $B_1=-1$ і тоді

$$Y_1(p)=\frac{-2}{(p-1)(p-3)}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p-3}.$$

Далі знаходимо оригінал $y_1(t)$:

$$y_1(t)=e^t-e^{3t};$$

$$Y_2(p)=\frac{3p^2-7p}{(p-3)(p-2)(p-1)}=\frac{A_3}{p-1}+\frac{A_4}{p-2}+\frac{A_5}{p-3},$$

Звідси, $A_3=-2$, $A_4=2$, $A_5=3$ і тоді

$$Y_2(p)=\frac{3p^2-7p}{(p-3)(p-2)(p-1)}=\frac{-2}{p-1}+\frac{2}{p-2}+\frac{3}{p-3}.$$

Далі знаходимо оригінал $y_2(t)$:

$$y_2(t)=-2e^t+2e^{2t}+3e^{3t};$$

$$Y_3(p)=\frac{-2p^2+4p+2}{(p-3)(p-2)(p-1)}=\frac{A_6}{p-3}-\frac{A_7}{p-2}-\frac{A_8}{p-1},$$

Звідси, $A_6=2$; $A_7=-2$; $A_8=-2$ і тоді

$$Y_3(p)=\frac{-2p^2+4p+2}{(p-3)(p-2)(p-1)}=\frac{2}{p-3}-\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p-1}.$$

Далі знаходимо оригінал $y_3(t)$:

$y_3(t) = 2e^t - 2e^{2t} - 2e^{3t}$.

Розв'язок задачі Коші для заданої системи диференціальних рівнянь знайдено:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^t - e^{3t}; \\ y_2(t) = -2e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t}; \\ y_3(t) = 2e^t - 2e^{2t} - 2e^{3t}. \end{cases}$$

Відповідь:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^t - e^{3t}; \\ y_2(t) = -2e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t}; \\ y_3(t) = 2e^t - 2e^{2t} - 2e^{3t}. \end{cases}$$

Приклад 3.7. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1'(t) + 3y_1(t) - 4y_2(t) = 9e^{2t}; \\ y_2'(t) + 2y_1(t) - 3y_2(t) = 3e^{2t}; \\ y_1(0) = 2; \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Нехай $y_1(t) \to Y_1(p);\ y_2(t) \to Y_2(p)$. Тоді $y_1'(t) \to pY_1(p) - 2;\ y_2'(t) \to pY_2(p)$.

При цьому

$$e^{2t} \to \frac{1}{p-2}.$$

Операторна форма системи рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} pY_1(p) - 2 + 3Y_1(p) - 4Y_2(p) = \dfrac{9}{p-2}; \\ 2Y_1(p) + pY_2(p) - 3Y_2(p) = \dfrac{3}{p-2} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (p+3)Y_1(p) - 4Y_2(p) = \dfrac{5+2p}{p-2}; \\ 2Y_1(p) + (p-3)Y_2(p) = \dfrac{3}{p-2}. \end{cases}$$

Отримали лінійну відносно $Y_1(p)$ та $Y_2(p)$ систему алгебраїчних рівнянь.

Знаходимо $Y_1(p)$ та $Y_2(p)$:

$$Y_1(p)=\frac{2p-3}{(p-2)(p-1)}; \qquad Y_2(p)=-\frac{1}{(p-2)(p-1)}.$$

За знайденими зображеннями будемо знаходити оригінали.

$$Y_1(p)=\frac{2p-3}{(p-2)(p-1)}=\frac{A_1}{p-2}+\frac{A_2}{p-1},$$

Звідси, $A_1=1$; $A_2=1$ і тоді

$$Y_1(p)=\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p-1}.$$

Виходить, що $y_1(t)=e^{2t}+e^t$

$$Y_2(p)=\frac{-1}{(p-2)(p-1)}=\frac{A_3}{p-2}+\frac{A_4}{p-1},$$

Звідси, $A_3=-1$; $A_4=1$.

$$Y_2(p)=-\frac{1}{(p-2)(p-1)}=-\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p-1}.$$

Звідси виходить, що $y_2(t)=-e^{2t}+e^t$.

Розв'язок задачі Коші для заданої системи диференціальних рівнянь знайдено:

$$\begin{cases} y_1(t)=e^{2t}+e^t; \\ y_2(t)=-e^{2t}+e^t. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь: $\begin{cases} y_1(t)=e^{2t}+e^t; \\ y_2(t)=-e^{2t}+e^t. \end{cases}$

3.3. Застосування формул Дюамеля до розв'язування диференціальних рівнянь

3.3.1 Дельта-функція

1) Поняття дельта-функції

Деякі фізичні, радіотехнічні та інші процеси характеризуються короткочастотною дією. Математичною моделлю таких процесів є функції виду

$$\delta(t;\lambda)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty<t<-\lambda; \\ \dfrac{1}{2\lambda}, \text{ якщо } -\lambda<t<\lambda; \\ 0, \text{ якщо } \lambda<t<+\infty. \end{cases}$$

Графік такої функції зображено на рис. 3.1.

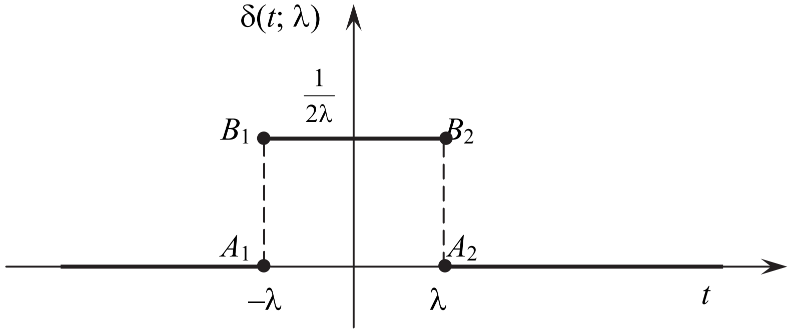


Рисунок 3.1

Особливістю такою функції є те, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t;\lambda)dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2\lambda} dt = 1 . \tag{3.4}$$

З геометричної точки зору це означає, що площа прямокутника $A_1B_1B_2A_2$ дорівнює одиниці.

Якщо припустити, що $\lambda \to 0$, то основа прямокутника $A_1B_1B_2A_2$ буде прямувати до нуля, а його висота при цьому буде прямувати до нескінченності. Площа прямокутника при цьому буде залишатися рівною 1 (рис. 3.2).

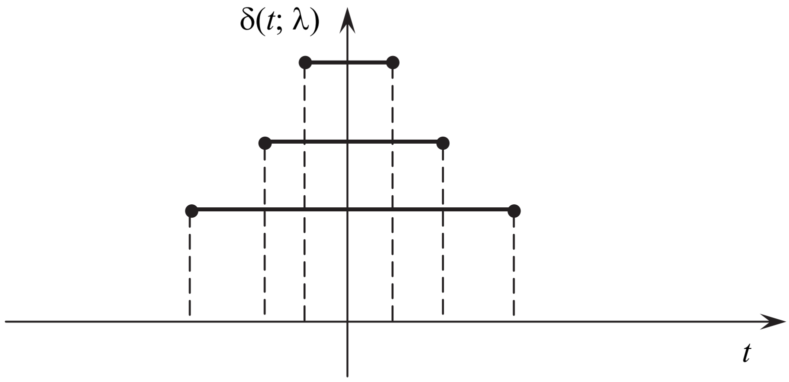


Рисунок 3.2

2) Поняття гілкообразної функції та її зв'язок з δ-функцією

Розглянемо функцію (рис. 3.3):

$$f(t;\lambda) = \begin{cases} 0, \text{якщо} -\infty < t \le -\lambda; \\ \dfrac{1}{2\lambda} t + \dfrac{1}{2}, \text{якщо} -\lambda < t < \lambda; \\ 1, \text{якщо}\ t \ge \lambda. \end{cases}$$

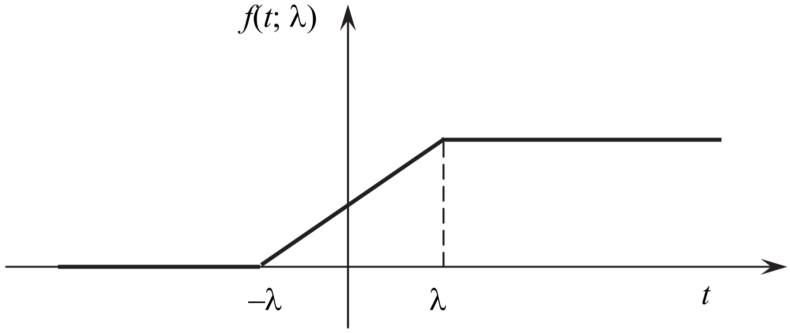


Рисунок 3.3

Границя функції $f(t;\lambda)$ за умови, що $\lambda \to 0$ є одиничною функцією $\eta(t)$. Функція $f(t;\lambda)$ є диференційовною функцією за змінною t за будь-якого значення t за винятком двох значень $t = -\lambda$ та $t = \lambda$.

$$\frac{df(t;\lambda)}{dt} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t \le -\lambda; \\ \dfrac{1}{2\lambda}, \text{ якщо } -\lambda < t < \lambda; \\ 1, \text{ якщо } \lambda < t < +\infty. \end{cases}$$

Отже,

$$f'(t;\lambda) = \delta(t;\lambda), \tag{3.5}$$

а

$$\lim_{\lambda \to 0} f(t;\lambda) = \eta(t), \tag{3.6}$$

якщо $|t| > \lambda$.

Якщо $t = 0$, то

$$\lim_{\lambda \to 0} \delta(t;\lambda) = \infty \ , \tag{3.7}$$

але

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t;\lambda) dt = 1, \tag{3.8}$$

якщо $f(t)$ – деяка неперевна у інтервалі $(a;b)$ функція, а $\delta(t;\lambda)$ – гілкообразна функція.

3) Фільтруюча властивість δ*-функції*

Розглянемо такий інтеграл

$\int_a^b f(t)\delta(t;\lambda)dt$ за умови, що $\lambda \to 0$.

Припустимо, що $t = 0 \in (a;b)$. У такому разі можна показати, що виконується рівність

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(t)\delta(t;\lambda)\,dt = f(0). \tag{3.9}$$

Тепер припустимо, що $t = 0 \,\overline{\in}\, (a;b)$.

Тоді

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(t)\delta(t;\lambda)\,dt = 0. \tag{3.10}$$

Позначимо

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(t)\delta(t;\lambda)\,dt = \int_a^b f(t)\delta(t)\,dt. \tag{3.11}$$

З формул (3.9) та (3.11) виходить, що

$$\int_a^b f(t)\delta(t)\,dt = \begin{cases} f(0), \text{ якщо } 0 \in (a;b); \\ 0, \text{ якщо } 0 \,\overline{\in}\, (a;b). \end{cases} \tag{3.12}$$

Позначимо

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(t)\delta(t-t_0;\lambda)\,dt = \int_a^b f(t)\delta(t-t_0)\ldots dt. \tag{3.13}$$

Тоді можна показати, що

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} f(t_0), \text{ якщо } t_0 \in (a;b); \\ 0, \text{ якщо } t_0 \,\overline{\in}\, (a;b). \end{cases} \tag{3.14}$$

Формули (3.12) та (3.13) описують так звану фільтруючу властивість δ-функції.

Зокрема, якщо $f(t) \equiv 1$, то формули (3.12) та (3.14) набувають такий вигляд:

$$\int_a^b \delta(t)\,dt = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 0 \,\overline{\in}\, (a;b); \\ 1, \text{ якщо } 0 \in (a;b). \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} 0, \text{ якщо } t_0 \,\overline{\in}\, (a;b); \\ 1, \text{ якщо } t_0 \in (a;b), \end{cases} \tag{3.16}$$

де

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b \delta(t;\lambda)\,dt = \int_a^b \delta(t)\,dt. \tag{3.17}$$

4) Похідна δ-функції

Введемо поняття похідної від δ-функції.

Нехай $f(t)$ – диференційовна у інтервалі $(a;b)$ функція, а інтервал $(a;b)$ містить точки $t = 0$ та $t = h$.

Позначимо

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b f(t)\frac{\delta(t+h)-\delta(t)}{h}\,dt = \int_a^b f(t)\delta'(t)\,dt. \tag{3.18}$$

Тоді можна показати справедливість наступних формул:

$$\int_a^b f(t)\delta'(t)\,dt = \begin{cases} -f'(0), \text{якщо}\, 0 \in (a;b); \\ 0, \text{ якщо } 0 \,\overline{\in}\, (a;b). \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} 0, \text{якщо}\, t_0 \,\overline{\in}\, (a;b); \\ 1, \text{ якщо } t_0 \in (a;b), \end{cases} \tag{3.20}$$

Символом $\delta'(t)$ позначено похідну першого порядку від функції $\delta(t)$.

Нехай функція $f(t)$ є двічі диференційовною в інтервалі $(a;b)$. Зробимо позначення:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b f(t)\frac{\delta'(t+h)-\delta'(t)}{h}dt = \int_a^b f(t)\delta''(t)\,dt\,. \tag{3.21}$$

Можна довести справедливість таких формул:

$$\int_a^b f(t)\delta''(t)\,dt = \begin{cases} (-1)^2 f''(0), \text{якщо}\, 0 \in (a;b); \\ 0, \text{ якщо } 0 \,\overline{\in}\, (a;b). \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\int_a^b f(t)\delta''(t-t_0)\,dt = \begin{cases} (-1)^2 f''(t_0), \text{якщо}\, t_0 \in (a;b); \\ 1, \text{ якщо } t_0 \,\overline{\in}\, (a;b). \end{cases} \tag{3.23}$$

Символом $\delta''(t)$ позначено похідну другого порядку від функції $\delta(t)$.

Аналогічно може бути введено поняття похідних більш високого порядку:

$$\int_a^b f(t)\delta^{(n)}(t)dt = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(0), \text{ якщо}\, 0 \in (a;b); \\ 0, \text{ якщо } 0 \,\overline{\in}\, (a;b). \end{cases} \tag{3.22’}$$

$$\int_a^b f(t)\delta^{(n)}(t-t_0)dt = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(t_0), \text{ якщо}\, t_0 \in (a;b); \\ 1, \text{ якщо } t_0 \,\overline{\in}\, (a;b). \end{cases} \tag{3.23’}$$

Символом $\delta^{(n)}(t)$ позначено похідну *n*-го порядку від функції $\delta(t)$.

5) Зображення δ-функції

Функція $\delta(t)$ належить до так званих узагальнених функцій. Ця функція не задовольняє умови, за яких її можна вважати оригіналом.

Будемо розглядати функцію $\delta(t-t_0)$ за умови, що $t \geq 0$.

За допомогою фільтруючої властивості δ-функції можна знайти зображення цієї функції

$$\delta(t-t_0) \to \int_0^\infty e^{-pt}\delta(t-t_0)dt = e^{-pt_0}\Big|_{t=t_0} = e^{-pt_0}, \text{ тобто } \delta(t-t_0) \to e^{-pt_0}.$$

Нехай тепер $t_0 = 0$, тоді

$$\delta(t) \to \int_0^\infty e^{-pt}\delta(t)dt = e^{-pt}\Big|_{t=0} = 1, \text{ тобто } \delta(t) \to 1.$$

Зображення похідної $\delta^{(n)}(t)$ визначається рівністю

$$\delta^{(n)}(t) \to \int_0^\infty e^{-pt}\delta^{(n)}(t)dt = p^n \text{, тобто } \delta^{(n)}(t) \to p^n .$$

3.3.2 Розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами за допомогою формул Дюамеля

Розглянемо задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (не порушуючи загальність обмежимось диференціальним рівнянням другого порядку):

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Для розв'язування задачі Коші (3.24) вводимо ще одну задачу Коші:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = \eta(t); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Нехай функція $h(t)$ є розв'язком задачі Коші (3.25).

Тоді

$$\begin{cases} ah'' + bh'' + ch = \eta(t); \\ h(0) = 0; \\ h'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Позначимо через $H(p)$ зображення функції $h(t)$, тобто

$$h(t) \to H(p).$$

Звідси, маємо

$$h'(t) \to pH(p);$$

$$h''(t) \to p^2 H(p).$$

До того ж, як выдомо,

$$\eta(t) \to \frac{1}{p}.$$

Отже, можна скласти операторне рівняння для диференціального рівняння (3.26)

$$ap^2 H(p) + bpH(p) + cH(p) = \frac{1}{p}.$$

Знаходимо $H(p)$

$$H(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{ap^2 + bp + c}. \tag{3.27}$$

За зображенням $H(p)$ маємо можливысть знайти $h(t)$.

Повертаэмось до задачі Коші (3.24). Позначимо через $Y(p)$ зображення функції $y(t)$, тобто $y(t) \to Y(p)$, а через $F(p)$ позначимо зображення функції $f(t)$, тобто $f(t) \to F(p)$.

Операторне рівняння, яке відповідає диференціальному рівнянню задачі Коші (3.23), буде таким

$$ap^2 Y(p) + bpY(p) + cY(p) = F(p).$$

Звідси,

$$Y(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + c} F(p). \tag{3.28}$$

В и з н а ч е н н я . Передатною функцією рівняння $ay'' + by' + cy = f(t)$ чи передатною функцією системи, робота якої описується цим рівнянням, називається функція

$$K(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + c}. \tag{3.29}$$

Почленним діленням рівнянь (3.28) та (3.27) дістанемо

$$Y(p) = p(H(p)F(p),$$

а користуючись формулою Дюамеля дістанемо

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) f(t - \tau) d\tau + h(0) f(t).$$

Оскільки за умовою $h(0) = 0$, то виходить таке

$$y(t) = \int_0^t h'(\tau) f(t - \tau) d\tau. \tag{3.30}$$

Формула (3.30) виражає розв’язок лінійного диференціального рівняння з довільною правою частиною $f(t)$, нульовими початковими умовами (3.24) через розв’язок $h(t)$ диференціального рівняння (3.25) з правою частиною $\eta(1)$ у вигляді згортки $f(t) * h'(t)$.

Якщо напруга дорівнює одиничній функції $\eta(t)$, то така напруга називається *одиничною функцією включення*.

Реакція струму $h(t)$ лінійної системи на одиничну функцію включення називається *перехідною функцією для струму*.

Реакція напруги $h(t)$ лінійної системи на одиничну функцію включення називається *перехідною функцією для напруги*.

Струм, який знайдено через перехідну функцію для напруги, називається *перехідною функцією для струму*.

Напруга, яку знайдено через перехідну функцію для струму, називається *перехідною функцією для напруги*.

Зазначені перехідні функції для струму та напруги вже не задовольняють нульові початкові умови.

Приклади до пункту 3.3

Приклад 3.8. Розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y'' + y = e^{\alpha t}; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Вводимо допоміжну задачу Коші:

$$\begin{cases} h'' + h = \eta(1); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Нехай $h(t) \to H(p)$, тоді $h'(t) \to pH(p)$; $h''(t) \to p^2 H(p)$.

Складаємо операторне рівняння:

$$p^2 H(p) + H(p) = \frac{1}{p},$$

Звідси,

$$H(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

За зображенням $H(p)$ знаходимо оригінал $h(t)$.

$$H(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 1}.$$

Методом частинних значень знаходимо невизначені коефіцієнти A; B; C.

$1 = A(p^2 + 1) + p(Bp + C)$.

Якщо $p = 0$, то $A = 1$.

Якщо $p = 1$, то $1 = 2A + B + C$, а $B + C = -1$.

Якщо $p = -1$, то $1 = 2A + B - C$, а $B - C = -1$.

Тоді $B = -1$, $C = 0$.

Отже,

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Переходимо до оригіналів:

$h(t) = 1 - \cos t$, звідси $h'(t) = \sin t$.

Тепер можна знайти розв'язок $y(t)$ заданої задачі Коші за формулою (3.30)

$$y(t) = \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \sin\tau d\tau.$$

Для знаходження заданого інтеграла скористаємось формулою $\sin\tau = \dfrac{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}{2i}$. Маємо:

$$y(t)=\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\,\frac{e^{i\tau}-e^{-i\tau}}{2i}\,d\tau=\frac{1}{2i}\left(\int_0^t e^{\alpha t}e^{(i-\alpha)\tau}d\tau-\int_0^t e^{\alpha t}e^{-(i+\alpha)\tau}d\tau\right)=$$

$$=\frac{e^{\alpha\tau}}{2i}\left(\frac{e^{(i-\alpha)\tau}}{i-\alpha}\Bigg|_0^t+\frac{e^{-(i+\alpha)\tau}}{i+\alpha}\Bigg|_0^t\right)=\frac{e^{\alpha\tau}}{2i}\left(\frac{e^{it}\cdot e^{-\alpha t}}{i-\alpha}-\frac{1}{i-\alpha}+\frac{e^{-it}\cdot e^{-\alpha t}}{i+\alpha}-\frac{1}{i+\alpha}\right)=$$

$$=\frac{e^{it}}{2i(i-\alpha)}+\frac{e^{-it}}{2i(i+\alpha)}-\frac{e^{\alpha t}(i+\alpha+i-\alpha)}{2i(-1-\alpha^2)}=\frac{e^{it}(i+\alpha)+e^{-it}(i-\alpha)}{2i(-1-\alpha^2)}+\frac{e^{\alpha t}}{1+\alpha^2}=$$

$$=-\frac{e^{it}+e^{-it}}{2(1+\alpha^2)}-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}+\frac{e^{\alpha t}}{1+\alpha^2};$$

$$y(t)=\frac{1}{\alpha^2+1}\left(e^{\alpha t}-\cos t-\alpha\sin t)\right).$$

В і д п о в і д ь : $y(t)=\dfrac{1}{\alpha^2+1}\left(e^{\alpha t}-\cos t-\alpha\sin t)\right)$

ЗАУВАЖЕННЯ. Як виходить з розв’язання прикладу, користування формулою Дюамеля викликає певні труднощі.

З’ясуємо, в яких випадках є доцільним користування формулою Дюамеля.

Сукупність фізичних приладів називається лінійною системою, якщо робота цієї сукупності приладів описується лінійним диференціальним рівнянням.

Багато задач електрорадіокіл формуються таким чином: на вхід лінійної системи подається сигнал $X(t)$. Потрібно знайти реакцію системи на цей сигнал. Сигнал та реакція системи зв’язані лінійним диференціальним рівнянням:

$$a_0(t)y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+...+a_n(t)y(t)=X(t). \tag{3.31}$$

Наприклад, нехай електричне коло складається з послідовно з’єднаних активного опору R та котушки індуктивності L (рис. 3.4).

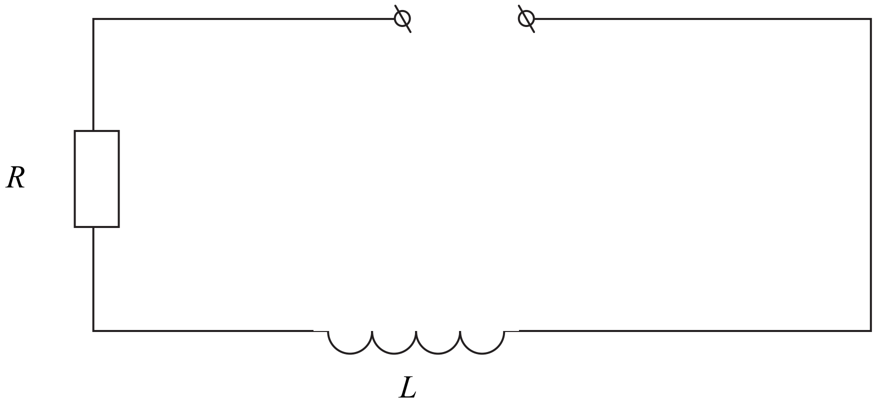


Рисунок 3.4

Якщо на затискач подати напругу $U(t)$, то в колі виникає струм $i(t)$. Якщо $U(t)$ – сигнал, то $i(t)$ – реакція на цей сигнал. У даному колі відбувається процес, який описується наступним лінійним диференціальним рівнянням:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=U(t).$$

Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами за формулами Дюамеля є доцільним, якщо відбувається дослідження деякої лінійної системи, робота якої описуються лівою частиною диференціального рівняння (3.31). Для такої системи спочатку знаходиться розв’язок, якщо права частина рівняння (3.31) дорівнює $\eta(t)$, а потім – якщо права частина рівняння дорівнює будь-якій функції $f(t)$, за умови, що у кожному з випадків початкові умови є нульовими.

3.4. Вагова функція

Розглянемо задачу Коші для лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами та нульовими початковими умовами:

$$\begin{cases} a_0(t)y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_n(t)y(t)=f(t),\ \text{де}\ t\in(a;b); \\ \quad y(t_0)=0; \\ \quad y'(t_0)=0; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad y^{(n-1)}(t_0)=0. \end{cases} \tag{3.32}$$

Вводимо допоміжну задачу Коші:

$$\begin{cases} a_0(t)y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_n(t)y(t)=0; \\ \quad y(\theta)=0; \\ \quad y'(\theta)=0; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad y^{(n-2)}(\theta)=0; \\ \quad y^{(n-1)}(\theta)=\dfrac{1}{a_0(\theta)},\ \text{де}\ \theta\in(a;b). \end{cases} \tag{3.33}$$

Нехай $y(t)\to Y(p)$.

Складаємо операторне рівняння для задачі Коші (3.33) та знаходимо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\ldots+c_ny_n(t),$$

де $c_1,c_2,\ldots,c_n$ – довільні сталі, а $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ – частинні розв’язки диференціального рівняння, які утворюють фундаментальну систему розв’язків.

Довільні сталі $c_1,c_2,\ldots,c_n$, які задовольняють початкові умови (3.33), можуть бути знайдені з наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 y_1(\theta) + c_2 y_2(\theta) + ... + c_n y_n(\theta) = 0; \\ c_1 y_1'(\theta) + c_2 y_2'(\theta) + ... + c_n y_n'(\theta) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_1^{(n-2)}(\theta) + c_2 y_2^{(n-2)}(\theta) + ... + c_n y_n^{(n-2)}(\theta) = 0; \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\theta) + c_2 y_2^{(n-1)}(\theta) + ... + c_n y_n^{(n-1)}(\theta) = \dfrac{1}{Q_0(\theta)}. \end{cases}$$

Довільні сталі, знайдені з цієї системи, залежать від θ, у зв’язку з чим і функція $y(t)$ також буде залежати від θ. У зв’язку з цим будемо позначати цю функцію як $y(t;\theta_n)$.

В и з н а ч е н н я . Ваговою функцією лінійного диференціального оператора

$$L(y(T)) = a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_n y(t)$$

називається така функція $K(t;\theta)$, яка визначається формулою

$$K(t;\theta) = \begin{cases} 0, \text{якщо} -\infty < t < 0; \\ y(t;\theta)\cdot\eta(t-\theta), \text{якщо } t < +\infty. \end{cases}$$

$a_i(t)$, де $t = 0; 1; ..., n$ є коефіцієнтами лінійного диференціального оператора.

Вагова функція задовольняє умови:

1. $K(t;\theta) \equiv 0$, якщо $-\infty < t < 0$.

2. $K(t;\theta)$ при фіксованому значенні θ в усіх точках інтервалу $(a;b)$ за винятком значення $t = 0$, задовольняє рівняння $L(K(t;\theta)) = 0$, де $t \neq \theta$.

3. Функція $K(t;\theta)$ та її похідні по t до n-го порядку включно є неперервними в інтервалі $(a;b)$, за винятком значення $t = \theta$, а в точці $t = \theta$ неперервними є функція $K(t;\theta)$ та її похідні до $(n-2)$ порядку включно, при цьому похідна $(n-1)$ порядку у точці $t = \theta$ має розрив першого роду зі скачком $\dfrac{1}{a_0(\theta)}$, де $\theta \in (a;b)$, тобто

$$\left.\frac{\partial^{n-1}K(t;\theta)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=\theta+0} - \left.\frac{\partial^{n-1}K(t;\theta)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=\theta-0} = \frac{1}{a_0(\theta)}.$$

4. Якщо $t = 0$, то

$$K(\theta;\theta) = K'(\theta;\theta) = ... = K^{(n-2)}(\theta;\theta) = 0,$$

$$K^{(n-1)}(\theta;\theta) = \frac{1}{a_0(\theta)}.$$

Дамо теорему, за допомогою якої можна знайти розв’язок задачі Коші (3.32).

Теорема. Розв'язок $y(t)$ задачі (3.32)

$$\begin{cases} a_0(t)y^{(a)}(t)+a_1(t)y^{(a-1)}(t)+...+a_{n-1}(t)y'(t)+a_n(t)y(t)=f(t), \\ \quad y(t_0)=0; \\ \quad y'(t_0)=0; \\ \quad .... \\ \quad y^{(n-1)}(t_0)=0, \end{cases}$$

де $t>t_0$ визначається формулою, а $a_i(t)$, де $t=0;1;...,n$ – коефіцієнти лінійного диференціального рівняння.

$$Y(t)=\int_0^t K(t;\theta)f(\theta)d\theta,$$

а $K(t;\theta)$ – вагова функція лінійного диференціального оператора

$$L(Y)=a_0(t)y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+...+a_{n-1}(t)y'(t)+a_n(t)y(t).$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Вагову функцію ще називають функцією вириву та імпульсною характеристикою.

Приклад 3.9. Знайти вагову функцію для лінійного диференціального оператора $L(y)=2y'+5y$.

Р о з в ' я з а н н я

Для знаходження вагової функції розглянемо таку задачу Коші:

$$\begin{cases} 2y'+5y=0; \\ y(0)=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння

$$2y'+5y=0$$

та знайдемо його характеристичне рівняння:

$$2r+5=0.$$

Значення $r=-\dfrac{5}{2}$ є коренем характеристичного рівняння.

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y(t)=ce^{-\frac{5}{2}t}.$$

Згідно з початковою умовою маємо:

$$y(\theta)=ce^{-\frac{5}{2}\theta};\ \ \frac{1}{2}=ce^{-\frac{5}{2}\theta};\ \ c=\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}\theta}.$$

Таким чином, $y(t;\theta)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{5}{2}\theta}e^{-\frac{5}{2}\theta}$ або $y(t;\theta)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{5}{2}(\theta-t)}$.

Вагова функція $K(t;\theta)$ є такою:

$$K(t;\theta) = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{2}(\theta - t)} \cdot \eta(t - \theta) \text{, де } t \geq 0.$$

Відповідь: $K(t;\theta) = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{2}(\theta - t)} \cdot \eta(t - \theta)$, де $t \geq 0$.

Приклад 3.10. Знайти вагову функцію для лінійного диференціального оператора $L(y) = y'' + \omega^2 y$, де $\omega = \mathrm{const}$.

Розв'язання

Розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0; \\ y(\theta) = 0; \\ y'(\theta) = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$.

Складаємо та розв'язуємо його характеристичне рівняння:

$r^2 + \omega^2 y = 0$, $r^2 = -\omega^2$, $r_1 = -i\omega$, $r_2 = i\omega$.

Загальний розв'язок $y(t)$ є таким:

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin \omega t.$$

Далі складаємо систему рівнянь для знаходження довільних сталих c_1 та c_2.

$$\begin{cases} c_1 \cos \omega\theta + c_2 \sin \omega\theta = 0; \\ -c_1 \sin \omega\theta + c_2 \cos \omega\theta = 1. \end{cases}$$

Розв'язком системи рівнянь є

$$c_1 = -\frac{\sin \omega\theta}{\omega}; \quad c_2 = -\frac{\cos \omega\theta}{\omega}.$$

Частинний розв'язок у такому разі має вигляд:

$y(t;\theta) = -\frac{\sin \omega\theta}{\omega} \cos \omega t + \frac{\cos \omega\theta}{\omega} \sin \omega t$ або $y(t;\theta) = \frac{\sin \omega(t - \theta)}{\omega}$,

а вагова функція є такою

$$K(t;\theta) = \frac{\sin \omega(t - \theta)}{\omega} \cdot \eta(t - \theta).$$

Відповідь: $K(t;\theta) = \frac{\sin \omega(t - \theta)}{\omega} \cdot \eta(t - \theta)$.

4 ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

4.1 Основні відомості про перехідні процеси в електричних колах

Електричне коло – це сукупність джерела електричної енергії E, активного опору R, котушки індуктивності L та ємності C, які з'єднані послідовно або паралельно. Зображення електричного кола називається *електричною схемою* (рис. 4.1).

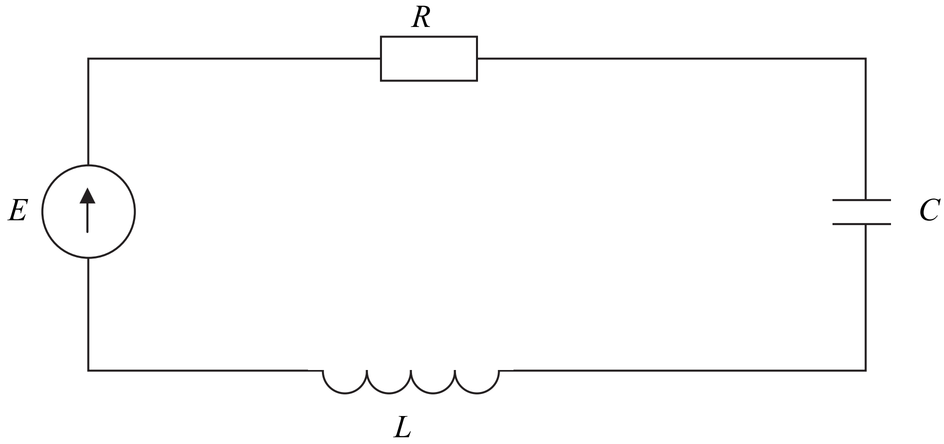


Рисунок 4.1

Якщо в електричному колі один режим роботи переходить в інший, то такий процес називається *перехідним процесом*. Перехідний процес в електричному колі виникає внаслідок замикання або розмикання, тобто комутації.

Перехідні процеси в електричному колі є швидкоплинними, але незважаючи на це, вони суттєво впливають на роботу електричного кола.

Одна з характеристик електричного кола – це напруга. Напругою $u(t)$ електричного кола на деякій її ділянці називається *різниця потенціалів між крайніми точками цієї ділянки*.

Опір, який входить до електричного кола може бути індуктивним, ємнісним, активним, реактивним.

Струм $i(t)$, який проходить через опір R, залежить від напруги $u(t)$ на цьому опорі. Характер цієї залежності називається *вольтамперною характеристикою.*

Якщо в електричному колі вольтамперна характеристика є лінійною функцією, то опір в цьому електричному колі називається *лінійним опором*. Якщо до складу електричного кола входять лише лінійні опори, то таке *електричне коло* називається *лінійним*.

Якщо вольтамперна характеристика не є лінійною функцією, тоді відповідний опір називається *нелінійним* й електричне *коло* також називається *нелінійним*.

Якщо до складу електричного кола входить лише активний опір R, то залежність між напругою $u(t)$ та струмом $i(t)$ виражається формулою

$$u(t) = R \cdot i(t). \tag{4.1}$$

Якщо до складу електричного кола входить лише котушка індуктивності L, то залежність між напругою $u(t)$ та струмом $i(t)$ виражається формулою

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}. \tag{4.2}$$

Якщо до складу електричного кола входить лише ємність C, то залежність між напругою $u(t)$ та струмом $i(t)$ виражається формулою

$$u(t) = \frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt + q_0\right), \tag{4.3}$$

де q_0 – початковий заряд на обкладинках конденсатора.

4.2 Операторна характеристика перехідних процесів в електричному колі

Розглядаючи струм $i(t)$ та напругу $u(t)$ як оригінали, вводимо їхні перетворення:

$$i(t) \to I(p); \qquad u(t) \to U(p).$$

Залежність між оригіналами, що виражаються формулами (4.1) – (4.3) в операторній формі буде такою:

$$U(p) = RI(p); \tag{4.4}$$

$$U(p) = L(pI(p) - i_0); \tag{4.5}$$

$$U(p) = \frac{1}{Cp}(I(p) + q_0), \tag{4.6}$$

де $i_0 = i(0)$ – початковий струм;

q_0 – початковий заряд на обкладинках конденсатора.

Якщо припустимо, що $i_0 = 0$ та $q_0 = 0$, то формули (4.4) – (4.6) переходять відповідно у такі формули:

$$U(p) = RI(p), \tag{4.7}$$

$$U(p) = LpI(p), \tag{4.8}$$

$$U(p) = \frac{1}{Cp}I(p). \tag{4.9}$$

У формулі (4.7) величина R називається *операторним опором*, у формулі (4.8) – операторним опором є величина Lp, а у формулі (4.9) – операторним опором є величина $\frac{1}{Cp}$.

Операторний опір називають *імпедансом*.

Позначимо операторний імпеданс через $Z(p)$.

У формул (4.7) $Z(p)$ позначається через Z_R, у формулі (4.7) $Z(p)$ позначається як Z_L, а у формулі (4.8) $Z(p)$ – це Z_C. Виходить,

$$Z_R = R; \tag{4.10}$$

$$Z_L = Lp; \tag{4.11}$$

$$Z_C = \frac{1}{Cp}. \tag{4.12}$$

Залежність (4.7), (4.8), (4.9) можна подати однією формулою

$$U(p) = Z(p)I(p). \tag{4.13}$$

Розглянемо два елементи, кожен з яких має свій імпеданс $Z(p)$, а саме: $U_1(p) = Z_1(p)I(p)$ та $U_2(p) = Z_2(p)I(p)$.

Якщо ці елементи з'єднати послідовно, то виходить, що $U(p) = U_1(p) + U_2(p)$ або $U(p) = (Z_1(p) + Z_2(p))I(p)$.

Маємо новий елемент, імпеданс якого $Z(p)$ дорівнює сумі імпедансів $Z_1(p)$ та $Z_2(p)$.

Отже,

$$U(p) = Z(p)I(p), \tag{4.14}$$

де

$$Z(p) = Z_1(p) + Z_2(p). \tag{4.15}$$

Зокрема, якщо електричне коло складається з послідовно з'єднаних елементів R, L, C, то імпеданс такого електричного кола $Z(p)$ має вигляд

$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}. \tag{4.16}$$

Якщо елементи $U_1(p)$ та $U_2(p)$ з'єднуються паралельно, то маємо такі залежності

$$U(p) = Z_1(p)I_1(p), \tag{4.17}$$

$$U(p) = Z_2(p)I_2(p), \tag{4.18}$$

$$I(p) = I_2(p) + I_2(p). \tag{4.19}$$

Якщо припустити, що

$$U(p) = Z(p)I(p),$$

то

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}. \tag{4.20}$$

Позначимо

$$V(p) = \frac{1}{Z(p)}. \tag{4.21}$$

Величина $V(p)$ називається *операторною провідністю*.

Тоді рівність (4.13) можна записати у вигляді

$$U(p) = \frac{I(p)}{V(p)} \tag{4.22}$$

або

$$I(p) = V(p)U(p). \tag{4.23}$$

Далі розглянемо випадок, коли електричне коло включене на одиничну напругу $u_1(t) \equiv 1$.

Одинична напруга $u_1(t) \equiv 1$ називається *часовою напругою.*

Якщо $U_1(t)$ вважати оригіналом, то

$$u_1(t) \to \frac{1}{p}. \tag{4.24}$$

Нехай $i_1(t)$ – це струм у колі з одиничною напругою.

Якщо $i_1(t)$ вважати оригіналом, то

$$i_1(t) \to I_1(p).$$

При цьому формула (4.23) переходить у таку формулу

$$I_1(p) \to V(p)\frac{1}{p}. \tag{4.25}$$

Тепер розглянемо випадок, коли в електричному колі діє довільна напруга $u(t)$, тоді справедливою є така операторна формула

$$I(p) = pI_1(p)U(p). \tag{4.26}$$

Знаючи струм у колі, яке включене на одиничну напругу $u_1(t)$, можна знайти струм у цьому ж електричному колі, якщо воно включене на довільну напругу $u(t)$.

Для цього можуть бути використані наведені нижче формули Дюамеля, якщо за $f_1(t)$ взяти $i_1(t)$, тобто, якщо $f_1(t) = i_1(t)$, за $f_2(t)$ взяти довільну напругу $u(t)$, тобто $f_2(t) = u(t)$:

$$i(t) = i_1(t)u(t) + \int_0^t i_1(\tau)uU(t-\tau)d\tau; \tag{4.27}$$

$$i(t) = i_1(0)u(t) + \int_0^t i_1'(\tau)u(t-\tau)d\tau; \tag{4.28}$$

$$i(t) = \int_0^t i_1'(\tau)u(t-\tau)d\tau; \tag{4.29}$$

$$i(t) = i_1(t)u(0) + \int_0^t i_1(t-\tau)u'(\tau)d\tau; \tag{4.30}$$

$$i(t) = \int_0^t i_1'(t-\tau)u(\tau)d\tau. \tag{4.31}$$

Електричне коло, яке має два полюси (два затискачі), називається *двополюсником.*

Електричне коло, яке має чотири полюси (чотири затискачі) називається *чотириполюсником.*

Розглянемо чотириполюсник, в якому напруга на вході дорівнює $u_{\text{вх}}(t)$, а напруга на виході дорівнює $u_{\text{вих}}(t)$. Приймаючи $u_{\text{вх}}(t)$ та $u_{\text{вих}}(t)$ за оригінали, маємо їх зображення

$$u_{\text{вх}}(t) \to U_{\text{вх}}(p),$$

$$u_{\text{вих}}(t) \to U_{\text{вих}}(p).$$

Операторним коефіцієнтом передачі називається величина $K(p)$, яка визначається формулою

$$K(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}. \tag{4.32}$$

Звідси

$$U_{\text{вих}}(p) = K(p)U_{\text{вх}}(p). \tag{4.33}$$

Припустимо, що чотириполюсник включено на одиничну напругу

$$u_{\text{вх}}(t) = u_1(t) \equiv 1.$$

Вважаємо, що $u_{\text{вх}}(t)$ – оригінал. Тоді $u_{\text{вх}}(t) \to \dfrac{1}{p}$.

Справедливими є такі рівності:

$$U_1(p) = K(p)\frac{1}{p}, \tag{4.34}$$

$$U_{\text{вих}}(p) = pU_1(p)U_{\text{вх}}(p). \tag{4.35}$$

Якщо у той чи інший спосіб знайдено коефіцієнт $K(p)$, то за формулою (4.34) можна знайти $U_1(p)$, далі, за формулою (4.35), знаючи $U_{\text{вх}}(p)$ можна знайти $U_{\text{вих}}(p)$. За знайденим перетворенням знаходяться відповідні оригінали.

Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами описуються лінійними диференціальними рівняннями або системами лінійних диференціальних рівнянь, а їх розв’язання стає набагато простішим, якщо це робити методами операційного числення.

В основі дослідження лінійних електричних кіл лежать закони Ома та Кіргофа. Закон Ома застосовується до нерозгалужених електричних кіл, а перший та другий закони Кірхгофа застосовуються до розгалужених електричних кіл.

Аналізуючи рекомендовані для дослідження лінійних електричних кіл формули, неважко помітити, що ці формули являють собою операторний закон Ома та операторні закони Кірхгофа, або ж наслідки із них.

Отримати операторні закони Ома або Кірхгофа можна замінивши оригінали їхніми зображеннями, а p на $j\omega$, де j – уявна одиниця.

Доцільно мати на увазі, що коли досліджується розгалужене електричне коло, то струм перехідного процесу шукають лише на тій вітці електричного кола, яка утримує джерело е.р.с., тобто, у процесі дослідження складне електричне коло зводиться до простого нерозгалуженого кола.

Розглянемо більш детально операторні методи розрахунку деяких електричних кіл.

1. Електричне коло, зображене на рис. 4.2, складається із послідовно з’єднаних опору R, котушки з самоіндукцією, ємності C. У момент $t = 0$ до електричного кола підключається стала е.р.с. ε, внаслідок чого у колі виникають перехідні процеси.

Дослідимо струм $i(t)$.

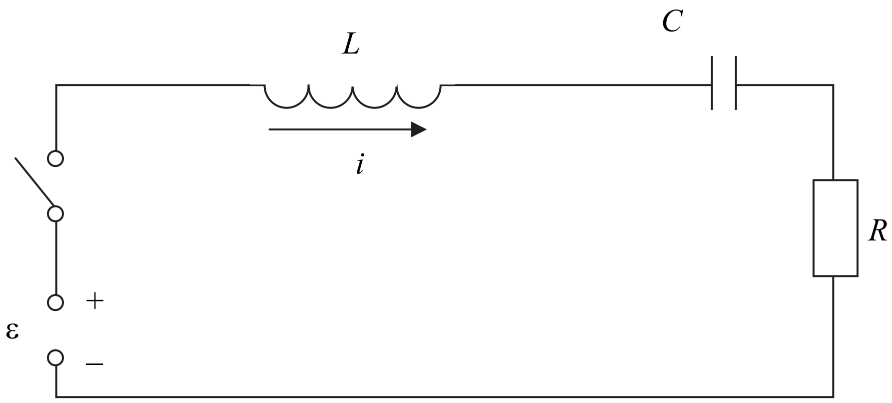


Рисунок 4.2

Операторний імпеданс для цього кола має вигляд

$$Z(p) = pL + R + \frac{1}{pC}.$$

Для е.р.с. ε перетворення $E(p)$ має вигляд

$$E(p) = \frac{\varepsilon}{p},$$

оскільки

$$E(p) = \int_0^\infty \varepsilon e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon}{p}.$$

Перетворення струму $i(t)$ позначимо $I(p)$, тобто

$$i(t) \to I(p).$$

Тоді, за законом Ома в операторній формі, маємо

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)},$$

тобто

$$I(p) = \frac{\varepsilon}{p\left(pL + R + \dfrac{1}{pC}\right)}.$$

Запишемо $I(p)$ у вигляді

$$I(p) = \frac{\varepsilon}{L\left(p^2 + \dfrac{R}{L}p + \dfrac{1}{LC}\right)}.$$

Позначимо $Q_0(p) = \varepsilon$; $\Phi_2(p) = L\left(p^2 + \dfrac{R}{L}p + \dfrac{1}{LC}\right)$. При цьому $\Phi_2'(p) = 2Lp + R$. Коренями рівняння $p^2 + \dfrac{R}{L}p + \dfrac{1}{LC} = 0$ є наступні значення:

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{CR^2 - 4R}{C}}; \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{CR^2 - 4R}{C}}.$$

Тоді

$$I(p) = \frac{\varepsilon}{L(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Для знаходження оригіналу $i(t)$ за зображенням $I(p)$ складаємо допоміжну табл. 4.1.

Таблиця 4.1

p_k	$Q_0(p)$	$\Phi_2'(p_k)$	$\frac{Q_0(p_k)}{\Phi_2'(p_k)}$	$\frac{Q_0(p_k)}{\Phi_2'(p_k)} e^{p_k t}$
$p_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{C}}$	ε	$\sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{C}}$	$\frac{\varepsilon\sqrt{C}}{\sqrt{CR^2 - 4L}}$	$\frac{\varepsilon\sqrt{C}}{\sqrt{CR^2 - 4L}} e^{\left(-\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{C}}\right)t}$
$p_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{C}}$	ε	$-\sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{C}}$	$-\frac{\varepsilon\sqrt{C}}{\sqrt{CR^2 - 4L}}$	$\frac{-\varepsilon\sqrt{C}}{\sqrt{CR^2 - 4L}} e^{\left(-\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{C}}\right)t}$

Таким чином,

$$i(t) = \frac{\varepsilon\sqrt{C}}{\sqrt{CR^2 - 4L}} e^{-\frac{R}{2L}t}\left(e^{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{C}}t} - e^{-\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{C}}t}\right)$$

або

$$i(t) = \frac{\varepsilon\sqrt{C}}{\sqrt{CR^2 - 4L}} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh}\sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{C}}t.$$

Отриманий результат передбачає, що є справедливою умова $\frac{CR^2 - 4L}{C} \geq 0$, тобто $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Якщо ж $\frac{CR^2 - 4L}{C} < 0$, тобто $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то для $i(t)$ буде інша формула.

Отже, $\frac{CR^2 - 4L}{C} < 0$, тоді $-\frac{CR^2 - 4L}{C} > 0$,

$$\sqrt{-\left(\frac{CR^2 - 4L}{C}\right)} = \sqrt{\frac{4L - CR^2}{C}j^2} = \sqrt{\frac{4L - CR^2}{C}}j;$$

$$i(t)=\frac{\varepsilon\sqrt{C}}{j\sqrt{CR^2-4L}}e^{-\frac{R}{2L}t}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{4L-CR^2}{C}}\,jt\,,$$

де символом j позначено уявну одиницю.

Оскільки $\mathrm{sh}\,j\alpha=j\sin\alpha$, то

$$i(t)=\frac{\varepsilon\sqrt{C}}{\sqrt{CR^2-4L}}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\sqrt{\frac{4L-CR^2}{C}}\,t\,.$$

2. Електричне коло, зображене на рис. 4.3, складається з опору R, ємності C, котушки L з самоіндукцією. В момент $t=0$ до електричного кола підключається стала е.р.с. ε, а до її підключення у системі були відсутні струм та заряди. Дослідимо струм, який протікає у котушці з самоіндукцією.

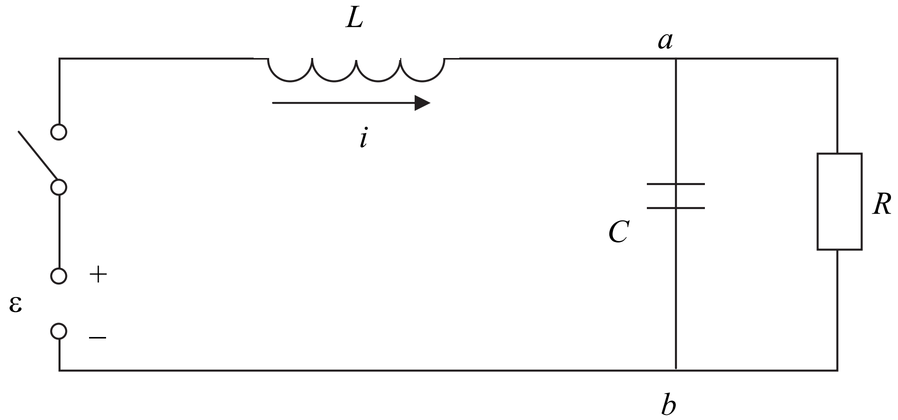


Рисунок 4.3

Імпеданс $Z(p)$ для такої схеми є сумою двох імпедансів:

$$Z(p)=pL+Z_{ab}(p),$$

де $Z_{ab}(p)$ – імпеданс.

Оскільки у схемі є паралельне з’єднання, то

$$Z_{ab}(p)=\frac{R}{pC}\cdot\frac{1}{R+\frac{1}{pC}}=\frac{R}{pCR+1},$$

тоді

$$Z(p)=pL+\frac{R}{pCR+1}=\frac{p^2LCR+pL+R}{pCR+1}.$$

Перетворення для електрорушійної сили є таким:

$$E(p)=\frac{\varepsilon}{p},$$

а перетворення для струму $i(t)$ дорівнює $I(p)$, тобто

$$\varepsilon\to pE(p),$$
$$i(t)\to I(p).$$

Далі маємо

$$I(p)=\frac{E(p)}{Z(p)}=\frac{\varepsilon}{LRC}\frac{(pCR+1)}{p\left(p^2+\frac{1}{CR}p+\frac{1}{LC}\right)}.$$

Позначимо $Q_1(p)=(pCR+1)$, $\Phi_3(p)=p\left(p^2+\frac{1}{CR}p+\frac{1}{LC}\right)$.

При цьому $\Phi_3'(p)=3p^2+\frac{2}{CR}p+\frac{1}{LC}$.

Знаходимо корені знаменника

$$p_1=0,\ p^2+\frac{1}{CR}p+\frac{1}{LC}=0,$$

звідси $p_2=-\frac{1}{2CR}+\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}}$, $p_3=-\frac{1}{2CR}-\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}}$

або, після спрощення, $p_1=0$; $p_2=\frac{1}{2CR}\left(-1+\sqrt{\frac{L-4CR^2}{L}}\right)$;

$p_3=\frac{1}{2CR}\left(-1-\sqrt{\frac{L-4CR^2}{L}}\right)$.

$I(p)=\frac{E(p)}{Z(p)}$, тобто

$$I(p)=\frac{\varepsilon}{RLC}\cdot\frac{PCR+1}{p\left(p-\frac{1}{2CR}\left(-1+\sqrt{\frac{L-4CR^2}{L}}\right)\right)\left(p-\frac{1}{2CR}\left(-1-\sqrt{\frac{L-4CR^2}{L}}\right)\right)}.$$

Для знаходження оригіналу складаємо допоміжну табл. 4.2.

Таким чином, можемо знайти струм:

$$i(t)=\frac{\varepsilon}{R}+\frac{\varepsilon}{LCR}\left(CR\left(-\frac{1}{2CR}+\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}}\right)+1\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{e^{\left(-\frac{1}{2CR}+\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{RC}}\right)t}}{2\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}}\left(-\frac{1}{2CR}+\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}}\right)}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{LCR}\left(CR\left(-\frac{1}{2CR}-\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}}\right)+1\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{e^{\left(-\frac{1}{2CR}+\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}}\right)t}}{2\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}}\left(-\frac{1}{2CR}-\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}}\right)}.$$

Таблиця 4.2

p_k	$Q_1(p)$	$\Phi_3'(p_k)$	$\dfrac{Q_1(p_k)}{\Phi_3'(p_k)}$
$p_1 = 0$	$\dfrac{\varepsilon}{RLC}$	$\dfrac{1}{LC}$	$\dfrac{\varepsilon}{R}$
$p_2 = -\dfrac{1}{2CR} + \sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}$	$CR\left(-\dfrac{1}{2CR} + \sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}\right) + 1$	$2\sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}$	$\dfrac{\varepsilon}{LCR}\left(CR\left(-\dfrac{1}{2CR} + \sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}\right) + 1\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}\left(-\dfrac{1}{2CR} + \sqrt{\dfrac{1}{4C^2L^2} - \dfrac{1}{LC}}\right)} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2CR} + \sqrt{\frac{1}{4L^2C^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$
$p_3 = -\dfrac{1}{2CR} + \sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}$	$CR\left(-\dfrac{1}{2CR} - \sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}\right) + 1$	$-2\sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}$	$\dfrac{\varepsilon}{LCR}\left(CR\left(-\dfrac{1}{2CR} - \sqrt{-\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}\right) + 1\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{LC}}\left(-\dfrac{1}{2CR} - \sqrt{\dfrac{1}{4C^2R^2} - \dfrac{1}{RC}}\right)} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2CR} - \sqrt{\frac{1}{4L^2C^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$

3. Електричне коло, зображене на рис. 4.4, складається з котушки індуктивності та опору R. В момент $t=0$ до електричного кола підключається е.р.с. $\varepsilon=\varepsilon_m \sin\omega t$. Дослідити струм $i(t)$.

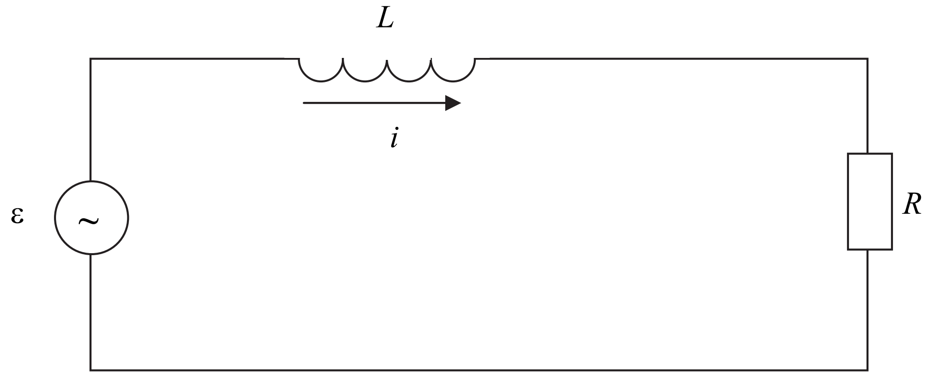


Рисунок 4.4

Операторний закон у колі має вигляд $I(p)=\dfrac{E(p)}{R+pL}$,

де $E(p)=\varepsilon_m \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\sin\omega t\, dt$.

Виходячи з того, що $\sin\omega t=\dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$, отримуємо

$$E(p)=\frac{\varepsilon_m}{2j}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}e^{j\omega t}dt-\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-j\omega t}dt\right)=\frac{\varepsilon_m}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega}-\frac{1}{p+j\omega}\right).$$

Можемо вважати, що на коло впливають дві е.р.с. ε_1 та ε_2, і при цьому

$$E_1(p)=\frac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\frac{1}{p-j\omega};\quad E_2(p)=-\frac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\frac{1}{p+j\omega}.$$

Для заданого кола імпеданс $Z(p)$ визначається формулою

$$Z(p)=R+pL.$$

Тоді струм $I(p)$ в операторній формі визначається формулою

$$I_1(p)=\frac{E_1(p)}{R+pL},$$

тобто

$$I_1(p)=\frac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\frac{1}{(p-j\omega)(R+pL)}.$$

Нехай $Q_0(p)=\dfrac{\varepsilon_m}{2j}$, $\Phi_2(p)=(p-j\omega)(R+pL)$.

Корені знаменника: $p_1=j\omega$; $p_1=-\dfrac{R}{L}$.

При цьому $\Phi_2'(p)=2pL-j\omega L+R$.

Для знаходження оригіналу $i_1(t)$ складаємо допоміжну табл. 4.3.

Таблиця 4.3

p_k	$Q_0(p_k)$	$\Phi_2'(p_k)$	$\dfrac{Q_0(p_k)}{\Phi_2'(p_k)}$	$\dfrac{Q_0(p_k)}{\Phi_2'(p_k)}e^{p_k t}$
$p_1 = j\omega$	$\dfrac{\varepsilon_m}{2j}$	$R + j\omega L$	$\dfrac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\dfrac{1}{R + j\omega L}$	$\dfrac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\dfrac{1}{R + j\omega L}e^{j\omega t}$
$p_2 = -\dfrac{R}{L}$	$\dfrac{\varepsilon_m}{2j}$	$-R - j\omega L$	$-\dfrac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\dfrac{1}{R + j\omega L}$	$-\dfrac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\dfrac{1}{R + j\omega L}e^{-\frac{R}{L}t}$

Таким чином,

$$i_1(t) = \frac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\frac{1}{R + j\omega L}e^{j\omega t} - \frac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\frac{1}{R + j\omega L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

або

$$i_1(t) = \frac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\frac{1}{R + j\omega L}\left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Аналогічно знаходиться $I_2(p)$:

$$I_2(p) = \frac{E_2(p)}{R + pL},$$

тобто

$$I_2(p) = -\frac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\frac{1}{(p + j\omega)(R + pL)}.$$

Нехай $Q_0(p) = -\dfrac{\varepsilon_m}{2j}$; $\Phi_2(p) = (p + j\omega)(R + pL)$.

Корені знаменника: $p_1 = -j\omega$; $p_1 = -\dfrac{R}{L}$.

При цьому $\Phi_2'(p) = 2pL + j\omega L + R$.

Для знаходження оригіналу $i_2(t)$ складаємо допоміжну табл. 4.4.

Таблиця 4.4

p_k	$Q_0(p_k)$	$\Phi_2'(p_k)$	$\dfrac{Q_0(p_k)}{\Phi_2'(p_k)}$	$\dfrac{Q_0(p_k)}{\Phi_2'(p_k)}e^{p_k t}$
$p_1 = -j\omega$	$-\dfrac{\varepsilon_m}{2j}$	$R - j\omega L$	$-\dfrac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\dfrac{1}{R - j\omega L}$	$-\dfrac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\dfrac{1}{R - j\omega L}e^{-j\omega t}$
$p_2 = -\dfrac{R}{L}$	$-\dfrac{\varepsilon_m}{2j}$	$-R + j\omega L$	$\dfrac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\dfrac{1}{R - j\omega L}$	$\dfrac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\dfrac{1}{R - j\omega L}e^{-\frac{R}{L}t}$

Таким чином,

$$i_2(t) = -\frac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\frac{1}{R - j\omega L}e^{-j\omega t} + \frac{\varepsilon_m}{2j}\cdot\frac{1}{R - j\omega L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

або

$$i_2(t) = -\frac{\varepsilon_m}{2j} \cdot \frac{1}{R - j\omega L}\left(e^{-j\omega t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

В такому разі $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, тобто

$$i(t) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{\varepsilon_m}{(R + j\omega L)}\left(e^{j\omega t} + e^{-\frac{R}{L}t}\right) - \frac{1}{2j} \cdot \frac{\varepsilon_m}{(R - j\omega L)}\left(e^{-j\omega t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Після спрощення дістанемо таке:

$$i_1(t) = \frac{\varepsilon_m}{R^2 + \omega^2 L^2}\left(R \sin \omega t - uL \cos \omega t + \omega L e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Розрахунки електричних кіл у перехідних процесах є важливою частиною дослідження динамічних систем.

Для цих досліджень використовуються математичні методи, а саме:

1) класичний метод, який полягає у безпосередньому розв'язанні систем диференціальних або інтегро-диференціальних рівнянь, і є достатньо громіздким методом;

2) метод Коші-Хевісайда, який можна застосувати у системах диференціальних рівнянь з нульовими початковими або крайовими умовами, і має певні недоліки;

3) метод перетворення Фур'є, який можна застосувати у системах диференціальних рівнянь з нульовими початковими або крайовими умовами, зручний у користуванні, але поширюється лише на функції, які задовольняють умови теорем Діріхле;

4) метод перетворення Лапласа, який є найбільш універсальним, і може бути застосований для таких функцій, на які не поширюються на попередні методи.

Наведемо примірний перелік задач електротехнічного змісту, до яких доцільно застосувати метод перетворень Лапласа:

1. Визначення форми кривої напруги або струму імпульсних генераторів.

2. Дослідження перехідних процесів в лінійних колах з ламповими посилювачами.

3. Дослідження систем автоматичного керування з гнучкими оберненими зв'язками, наприклад, системи спостереження, системи автоматичного регулювання напруги і т.ін.

4. Дослідження неусталених коливальних процесів у механічних фільтрах.

5. Дослідження перехідних процесів у системах з періодичною комутацією.

6. Дослідження перехідних процесів, зв'язаних з появою біжучої хвилі у повітряній та кабельній лініях передач під час грозових розрядів.

7. Дослідження перехідних процесів при відновлення напруги під час розмикання кола.

8. Дослідження перехідних процесів під час проходження сигналів по лініях зв'язку та багато інших різноманітних задач у телекомунікації.

Приклади до розділу 4

Приклад 4.1. Електричне коло зображене на рис. 4.5, знаходиться в стані, коли напруга $u = 100$ В, $R = 100$ Ом, C = 100 мкФ, а рубильник Р знаходиться у положенні 1. Якщо рубильник Р з положення 1 перевести в положення 2, то в електричному колі виникає перехідний процес. Знайти значення струму $i(t)$, напруги u_R на опорі *R*, напруги u_C на конденсаторі *C*.

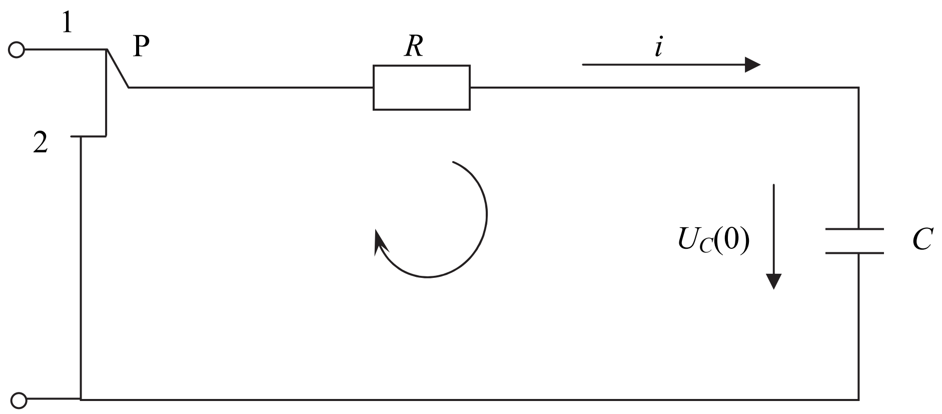


Рисунок 4.5

Р о з в ' я з а н н я

До переведення рубильника напруга на конденсаторі збігається з напругою джерела, тобто в момент переведення початкове значення напруги на конденсаторі є таким:

$$u_C(0) = u = 100 \text{ В},$$

якщо струм проходить по контуру у напрямку за годинниковою стрілкою.

Складаємо операторний імпеданс

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC}.$$

Електричне коло не має зовнішніх джерел електрорушійної сили, тому для початкової внутрішньої електрорушійної сили ємності *C* зображення дорівнює

$$\frac{-U_C(0)}{p} = -\frac{U}{p}.$$

За законом Ома в операторній формі маємо

$$I(p) = \frac{-\frac{U}{p}}{Z(p)}$$

або після спрощення

$$I(p) = \frac{UC}{pRC + 1}.$$

За зображенням $I(p)$ знаходимо оригінал $i(t)$.

Нехай $Q(p) = -UC$; $\Phi_1(p) = pRC + 1$. Тоді $\Phi_1'(p) = RC$.

Корені знаменника $\Phi(p)$: $pRC + 1 = 0$; $p_1 = -\dfrac{1}{RC}$.

Оскільки за умовою R = 100 Ом, а C = 10 мкФ = 10 · 10^{-6} Ф, то

$RC = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-3}$; $\Phi'(p_1) = 10^{-3}$.

Звідси,

$$i(t) = \frac{Q(p_1)}{\Phi_1'(p_1)} e^{p_1 t} = -\frac{10^{-3}}{10^{-3}} e^{-10^{-3} t} = -e^{-1000t} \text{ А.}$$

Від'ємний знак струму пояснюється тим, що коли відбувається розрядка конденсатора C через активний опір R струм $i(t)$ переміщується у напрямку, протилежному встановленому раніше напрямку за годинниковою стрілкою.

Миттєве значення напруги u на активному опорі R під час перехідного процесу буде таким: $u_R = Ri$, тобто $u_R = -100 \cdot e^{-1000t}$ В.

Миттєве значення напруги u_C на конденсаторі під час перехідного процесу може бути знайдене за другим законом Кірхгофа:

$Ri + U_C = 0$, звідси $u_C = -Ri$ або $u_C = -u_R$.

Виходить, $u_C = 100 \cdot e^{-1000t}$ В.

На рис. 4.6 показано характер поведінки $i(t)$ та $u_c(t)$ у перехідному процесі.

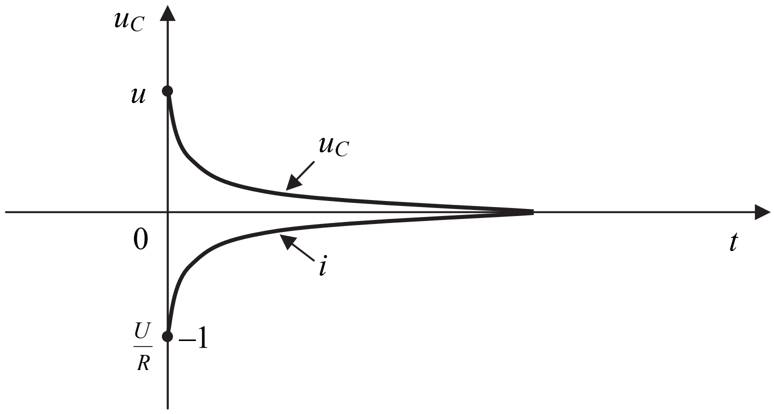


Рисунок 4.6

В і д п о в і д ь : $i(t) = -e^{-1000t}$ А; $u_R = -100 \cdot e^{-1000t}$ В; $u_C = 100 \cdot e^{-1000t}$ В.

Приклад 4.2. В електричному колі, що зображено на рис. 4.7, напруга u є синусоїдальною функцією $u = 141\sin(2500t + 105^\circ)$ В, опір $R = 1000$ Ом, індуктивність L = 1 Г , індуктивність $L_0 = 0{,}2$ Г, ємність C = 0,4 мкФ на момент $t = 0$, коли рубильник Р переводиться з положення 1 в положення 2.

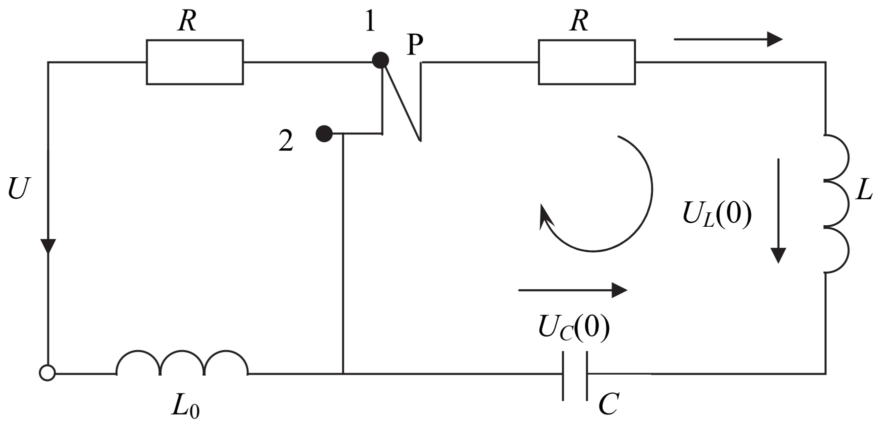


Рисунок 4.7

Внаслідок переведення рубильника у електричному колі починається перехідний процес.

Знайти перехідні значення струму $i(t)$, напруги u_R на опорі R, напруги u_C на ємності C, напруги u_L на індуктивності.

Р о з в ' я з а н н я

Згідно з умовою робимо висновок, що до переведення рубильника у колі протікав синусоїдальний струм

$$i(t) = I_m \sin(2500t + 105^\circ - \varphi) \text{ А},$$

де I_m – комплексна амплітуда, а на обкладинках конденсатора була напруга

$$u_C = x_C I_m \sin(2500t + 105^\circ - \varphi - 90^\circ) \text{ В}.$$

Тут $\omega = 2500 \dfrac{1}{C}$ – кутова частота напруги джерела електричної енергії, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2R}$ – кут зсуву фаз між напругою джерела та струмом у колі

$$x = x_L - x_C = \omega(L + L_0) - \frac{1}{\omega C},$$

тобто

$$x = 2500(1 + 0{,}2) - \frac{10^6}{2500 \cdot 0{,}4} = 3000 - 1000 = 2000 \text{ Ом}.$$

Це означає, що електричне коло має індуктивний характер і $x_C = 1000$ Ом.

Отже, $x_L = 3000$ Ом; $x_C = 1000$ Ом; $x = 2000$ Ом.

Знаходимо φ:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{2R} = \operatorname{arctg}\frac{2000}{2\cdot 1000} = \operatorname{arctg}45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

Оскільки за умовою $u = 141\sin(2500t + 105^\circ)$, то з цього виходить, що $u_m = 141$ В.

Далі,

$$I_m = \frac{u_m}{\sqrt{(2R)^2 + x^2}} = \frac{141}{\sqrt{(2000)^2 + (2000)^2}} = \frac{141}{2\sqrt{2}\cdot 10^3} = 0{,}05 \text{ А};$$

$$x_C I_m = 1000\cdot 0{,}05 = 50 \text{ В}.$$

Тепер можна знайти $i(t)$ та u_C:

$i(t) = 0{,}05\sin(2500t + 105^\circ - 45^\circ) = 0{,}05\sin(2500t + 60^\circ)$ А;

$u_C = R\cdot i(t)$, тобто

$u_C = 1000\cdot 0{,}05\sin(2500t + 105^\circ - 45^\circ - 90^\circ) = 50\sin(2500t - 30^\circ)$ В;

$u_C = 50\sin(2500t - 30^\circ)$.

Нехай тепер переключається рубильник, внаслідок чого починається перехідний процес.

У момент $t = 0$, який передує комутації в електричному колі, маємо:

$i_L(0) = 0{,}05\sin(60^\circ) = 0{,}0433$ А;

$u_C(0) = 50\sin(-30^\circ) = -25$ В.

Перехідний процес буле відбуватись в *RLC* контурі без зовнішнього джерела е.р.с. Будемо вважати, що обхід контуру відбувається у напрямку за годинниковою стрілкою.

Зображення $E(p)$ внутрішніх е.р.с. має вигляд:

$E(p) = Li_L(0) + \frac{-U_C(0)}{p}$, тобто, $E(p) = 0{,}0433 + \frac{25}{p}$.

Операторний імпеданс у цьому контурі $Z(p)$ є таким:

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}.$$

За операторним законом Ома $Z(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}$, тобто

$$I(p) = \frac{0{,}0433 + \dfrac{25}{p}}{R + pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{C(0{,}0433p + 25)}{LCp^2 + RCp + 1}.$$

Позначимо

$Q_1(p) = C(0{,}0433p + 25)$, $\Phi_2(p) = LCp^2 + RCp + 1$, звідси

$Q_1(p) = 0{,}4\cdot 10^{-6}(0{,}0433p + 25)$;

$\Phi_2(p) = 1\cdot 0{,}4\cdot 10^{-6}p^2 + 1000\cdot 0{,}4\cdot 10^{-6}p + 1 = 0{,}4\cdot 10^{-6}p^2 + 0{,}4R\cdot 10^{-3}p + 1$.

Знаходимо корені многочлена $\Phi_2(p)$:

$p_1 = -500 + j \cdot 1500$, $p_2 = -500 - j \cdot 1500$.

Знаходимо $\Phi_2'(p)$

$\Phi_2'(p) = 0{,}4 \cdot 10^{-6}(2p + 1000)$.

Складаємо допоміжну табл. 4.5.

Таким чином, маємо:

$$i(t) = \frac{3{,}35 + j64{,}95}{3000j} e^{(-500 + j1500)t} - \frac{3{,}35 - j64{,}95}{3000j} e^{(-500 - j1500)t}.$$

Виконавши спрощення, дістанемо

$$i(t) = \frac{1}{1500} e^{-500t}(3{,}35 \sin 1500t + 64{,}95 \cos 1500t) \text{ A}$$

або

$$i(t) = \frac{\sqrt{3{,}35^2 + 64{,}95^2}}{1500} e^{-500t}\left(\frac{3{,}35}{\sqrt{4230}} \sin 1500t + \frac{64{,}45}{\sqrt{4230}} \cos 1500t\right) \text{ A},$$

або

$$i(t) = 0{,}0434 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5') \text{ A}.$$

Знайдено миттєве значення струму $i(t)$ перехідного процесу.

Перехідне значення напруги на опорі u_R є таким: $u_R(t) = Ri$, тобто

$u_R(t) = 1000 \cdot 0{,}0434\, e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5')$ В;

$u_R(t) = 43{,}4 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5')$ В.

Перехідне значення напруги на обкладинках конденсатора є таким: $u_C(t) = -u_R - u_L$, тобто

$$u_C(t) = -43{,}4 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5') - 68{,}7 e^{-500t} \sin(1500t + 195^\circ 32') =$$

$$= 68{,}7 e^{-500t} \sin(1500t - 21^\circ 22') \text{ В}.$$

В і д п о в і д ь : $i(t) = 0{,}0434 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5')$ А;

$u_R(t) = 43{,}4 e^{-500t} \sin(1500t + 87^\circ 5')$ В;

$u_C(t) = 68{,}7 e^{-500t} \sin(1500t - 21^\circ 22')$ В.

Таблиця 4.5

p_k	$Q_1(p_k)$	$\Phi_2'(p_k)$	$\dfrac{Q_0(p_k)}{\Phi_2'(p_k)}$	$\dfrac{Q_0(p_k)}{\Phi_2'(p_k)}e^{p_k t}$
$p_1 = -500 +$ $+ j1500$	$0{,}4 \cdot 10^{-6}(3{,}35 + j64{,}95)$	$0{,}4 \cdot 10^{-6} 3000j$	$\dfrac{3{,}35 + j64{,}95}{3000j}$	$\dfrac{3{,}35 + j64{,}95}{3000j}e^{(-500 + j1500)t}$
$p_1 = -500 +$ $+ j1500$	$0{,}4 \cdot 10^{-6}(3{,}35 - j64{,}95)$	$-0{,}4 \cdot 10^{-6} 3000j$	$-\dfrac{3{,}35 - j64{,}95}{3000j}$	$-\dfrac{3{,}35 - j64{,}95}{3000j}e^{(-500 - j1500)t}$

Приклад 4.3. Між двома електричними колами K_1 та K_2 існує магнітний зв'язок з коефіцієнтом взаємної індукції, що дорівнює m (рис. 4.8). У колі K_1 коефіцієнт самоіндукції, опір та ємність дорівнюють відповідно L_1, R_1, C_1, а у колі K_2 вони дорівнюють відповідно L_2, R_2, C_2. Визначити залежність сили струму у колі K_1 від часу, припускаючи, що опори R_1 та R_2 обох кіл є достатньо малими, а коефіцієнти самоіндукції L_1 та L_2 і коефіцієнти ємності C_1 та C_2 задовольняють умову $C_1L_1 = C_2L_2$, тобто кола K_1 та K_2 налаштовані в унісон. В початковий момент струм в колі K_1 дорівнює нулю.

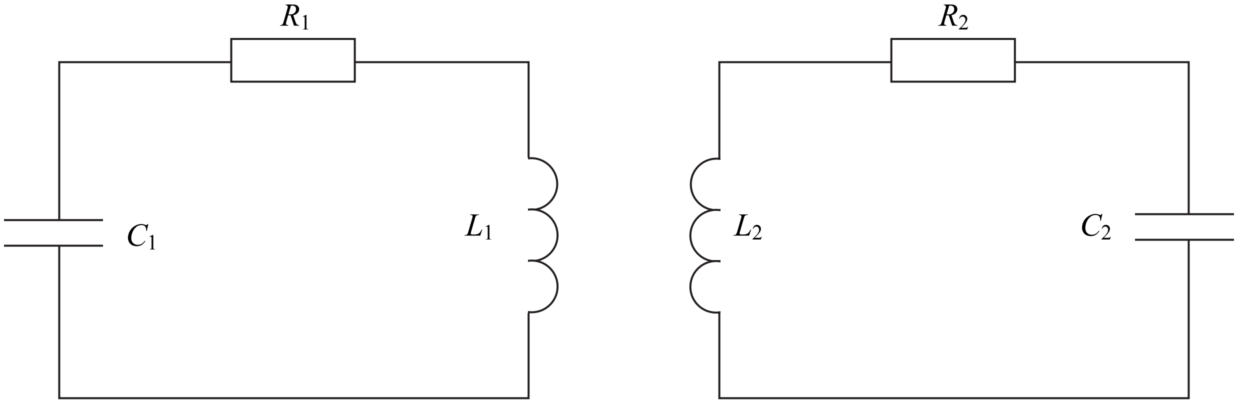


Рисунок 4.8

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо $i_1(t)$ – сила струму у колі K_1, а $i_2(t)$ – у колі K_2 у момент часу t. При цьому у колі K_1 виникає е.р.с. індукції, яка дорівнює $m\frac{di_2}{dt}$, а е.р.с. самоіндукції, яка дорівнює $L_1\frac{di_1}{dt}$ та напруга на конденсаторі, яка дорівнює $\frac{1}{C_1}\int i_i(t)dt$. Складаємо відповідне рівняння, що відповідає перехідному процесу у колі K_1:

$$m\frac{di_2}{dt} + L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1(t)dt + R_1t_1 = 0.$$

Аналогічно для кола K_2 маємо рівняння

$$m\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt + R_2t_2 = 0.$$

Таким чином, дістали систему рівнянь:

$$\begin{cases} m\dfrac{di_2}{dt} + L_1\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int i_1(t)dt + R_1t_1 = 0; \\ m\dfrac{di_1}{dt} + L_2\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2(t)dt + R_2t_2 = 0. \end{cases}$$

Переходимо до складання відповідних операторних рівнянь.

Нехай

$i_1(t) \to I_1(p)$;

$i_{21}(t) \to I_2(p)$.

Система диференціальних рівнянь в операторній формі є такою:

$$\begin{cases} m(pI_2(p) - i_2(0)) + L_1 pI_1(p) + R_1 I_1(p) + \dfrac{1}{C_1 p} I_1(p) = 0; \\ mpI_1(p) + L_2(pI_2(p) - i_2(0)) + R_2 I_2(p) + \dfrac{1}{C_2 p} I_2(p) = 0. \end{cases}$$

Виведемо з цих рівнянь $I_2(p)$ та дістанемо таке

$$m\left(p\,\frac{L_2 i_2(0) - mpI_1(p)}{L_2(p) + R_2 + \dfrac{1}{C_2 p}} - i_2(0) \right) + L_1 pI_1(p) + \frac{1}{C_1 p} I_1(p) = 0$$

або після спрощення

$$\frac{\left(L_1 C_1 p^2 + R_1 C_1 p + 1\right)\left(L_2 C_2 p^2 + R_2 C_2 p + 1\right) - m^2 C_1 C_2 p^4}{C_1 p(L_2 C_2 p^2 + R_2 C_2 p + 1)} I_1(p) =$$

$$= \frac{C_2 R_2 i_2(0) p + i_2(0)}{L_2 C_2 p^2 + R_2 C_2 + 1}.$$

Оскільки опори R_1 та R_2 є достатньо малими, то ними можна знехтувати. Якщо при цьому врахувати, що $C_1 L_1 = C_2 L_2$, то після нескладних перетворень можемо знайти $I_1(p)$:

$$I_1(p) = \frac{C_1 p i_2(0)}{L_1^2 C_1^2 p^4 + 2L_1 C_1 p^2 + 1 - m^2 C_1 C_2 p^4}$$

або

$$I_1(p) = \frac{\dfrac{C_1 i_2(0)}{L_1^2 C_1^2}}{\left(p^2 + \dfrac{1}{LC}\right)^2 - \dfrac{m^2 C_1 C_2}{L_1 C_1} p^4}.$$

Для зручності позначимо

$\dfrac{m^2}{L_1 L_2} = a^2$; $\dfrac{1}{C_1 L_1} = b^2$.

Тоді

$$I_1(p) = \frac{C_1 i_2(0)}{b^2} \cdot \frac{p}{(1 - a^2) p^4 + 2b^2 p^2 + b^4}. \qquad (*)$$

Зважаючи на те, що коефіцієнт індукції m менше за коефіцієнтом самоіндукції L_1 та L, можемо стверджувати, що $0 < a^2 < 1$. При цьому можливо знаменник у рівності (*) дещо скоротити, а саме:

$$(1-a^2)p^4+2b^2p^2+b^4=(1-a^2)\left(p^4+\frac{2b^2p^2}{1-a^2}+\frac{b^4}{1-a^2}\right)=$$

$$=(1-a^2)\left(p^4+\frac{b^2}{1-a}+\frac{b^2}{1+a}+\frac{b^4}{1-a^2}\right)=(1-a^2)\left(p^2+\frac{b^2}{1+a}\right)\left(p^2+\frac{b^2}{1-a}\right).$$

Тоді

$$I_1(p)=\frac{C_1i_2(0)}{b^2(1-a^2)}\cdot\frac{p}{\left(p^2+\frac{b^2}{1+a}\right)\left(p^2+\frac{b^2}{1-a}\right)}$$

або

$$I_1(p)=\frac{2aC_1i_2(0)}{(1-a^2)^2}\cdot\left(\frac{p}{p^2+\frac{b^2}{1-a}}-\frac{p}{p^2+\frac{b^2}{1+a}}\right).$$

Переходимо від зображень до оригіналів. Отримуємо

$$i_1(t)=\frac{1aC_1i_2(0)}{(1-a^2)^2}\left(\cos\frac{bt}{\sqrt{1-a}}-\cos\frac{bt}{\sqrt{1+a}}\right),\text{ де } a\in(-1;1).$$

В і д п о в і д ь : $i_1(t)=\frac{1aC_1i_2(0)}{(1-a^2)^2}\left(\cos\frac{bt}{\sqrt{1-a}}-\cos\frac{bt}{\sqrt{1+a}}\right)$, де $a\in(-1;1)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яка функція називається оригіналом?
2. Що називається показником зростання функції оригіналу?
3. Що називається зображенням (за Лапласом) функції оригіналу?
4. Який інтеграл називається інтегралом Лапласа?
5. Сформулюйте достатню умову існування зображення?
6. Запишіть аналітичний вираз одиничної функції Хевісайда.
7. Який графік має одинична функція Хевісайда?
8. Який показник зростання має функція $\varphi(t)=|f(t)|$, якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а показник зростання дорівнює S_0?
9. Що можна сказати про функцію $\varphi(t)=f(\alpha t)$, якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, а α – будь-яке дійсне число?
10. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання S_0, то який показник зростання має функція $\varphi(t)=e^{\lambda t}f(t)$, де λ – будь-яке число?
11. Який показник зростання має функція

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, \text{ якщо } 0<t<\tau;\\ f(t-\tau), \text{ якщо } \pi\le t,\end{cases}$$

якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а її показник зростання дорівнює S_0?
12. Якщо зображеннями функцій-оригіналів $f_1(t), f_2(t),..., f_n(t)$ є відповідно функції $F_1(p), F_2(p),..., F_n(p)$, то яким є зображення функції $\varphi(t)=\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)+...+\lambda_n f_n(t)$, де $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ – будь-які дійсні числа?
13. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а функція $F(p)$ – її зображення, то яким є зображення функції $f(5t)$?
14. Сформулюйте властивість «запізнювання» для функції $f(t)$, яка є оригіналом.
15. Сформулюйте властивість «випередження» для функції $f(t)$, яка є оригіналом.
16. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а функція $F(p)$ – її зображення, то яким є оригінал зображення $F'(p)$?
17. Сформулюйте властивість інтегрування оригіналу.
18. Сформулюйте властивість інтегрування зображення.
19. Що називається згорткою функцій?
20. Сформулюйте властивість про неперервність згортки двох функцій.
21. Сформулюйте асоціативний закон для згортки двох функцій.
22. Запишіть інтеграл Дюамеля.
23. Запишіть інтеграл Ейлера другого роду.
24. Сформулюйте достатню умову існування оригіналу.
25. Сформулюйте теореми про розкладання зображення на прості дроби.

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

1. Функція $f(t) = t^6$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $t^6 \to \frac{6}{p^7}$;

2) $t^6 \to \frac{6!}{p^6}$;

3) $t^6 \to \frac{6!}{p^7}$;

4) інша відповідь?

2. Функція $f(t) = \frac{1}{e^{6t}}$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\frac{1}{e^{6t}} \to \frac{1}{p+6}$;

2) $\frac{1}{e^{6t}} \to \frac{1}{p-6}$;

3) $\frac{1}{e^{6t}} \to \frac{6}{p}$;

4) інша відповідь?

3. Функція $f(t) = \cos 5t$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\cos 5t \to \frac{p}{p^2+25}$;

2) $\cos 5t \to \frac{1}{p^2+25}$;

3) $\cos 5t \to \frac{p}{p^2-25}$;

4) інша відповідь?

4. Функція $f(t) = \frac{\sin 8t}{e^{6t}}$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\frac{\sin 8t}{e^{6t}} \to \frac{p-6}{(p-6)^2+64}$;

2) $\frac{\sin 8t}{e^{6t}} \to \frac{p+6}{(p+6)^2+64}$;

3) $\frac{\sin 8t}{e^{6t}} \to \frac{p-8}{(p+8)^2+36}$;

4) інша відповідь?

5. Функція $f(t) = t^4 e^{5t}$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $t^4 e^{5t} \to \dfrac{12}{(p-15)^2}$;

2) $t^4 e^{5t} \to \dfrac{24}{(p-15)^2}$;

3) $t^4 e^{5t} \to \dfrac{4}{(p-15)^2}$;

4) інша відповідь?

6. Функція $f(t) = \dfrac{1}{2}(1+\cos\omega t)$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\dfrac{1}{2}(1+\cos\omega t) \to \dfrac{p^2+200}{p(p^2+400)}$;

2) $\dfrac{1}{2}(1+\cos\omega t) \to \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p^2+200}{p(p^2+400)}$;

3) $\dfrac{1}{2}(1+\cos\omega t) \to \dfrac{1}{2}+\dfrac{p}{p^2+100}$;

4) інша відповідь?

7. Функція $f(t) = 1-\cos^2 5t$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $1-\cos^2 5t \to \dfrac{50}{p(p^2+100)}$;

2) $1-\cos^2 5t \to \dfrac{50}{p(p^2-100)}$;

3) $1-\cos^2 5t \to 1-\dfrac{50}{p(p^2+100)}$;

4) інша відповідь?

8. Функція $f(t) = \sin 16t$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $f'(t) \to p\dfrac{16}{p^2+256}$;

2) $f'(t) \to p\dfrac{16}{p^2-256}$;

3) $f'(t) \to p\dfrac{1}{p^2-256}$;

4) інша відповідь?

9. Функція $f(t) = e^{10t}$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $f''(t) \to p^2\dfrac{1}{p-10} - p + p\cdot\dfrac{1}{p-10} + 1$;

2) $f''(t) \to p^2 \dfrac{1}{p+10} - p + p \cdot \dfrac{1}{p+10} + 1$;

3) $f''(t) \to p^2 \dfrac{1}{p-10} - p - p \cdot \dfrac{1}{p-10} + 1$;

4) інша відповідь?

10. Функція $f(t) = t^7$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $f'''(t) \to \dfrac{7!}{p^7}$;

2) $f'''(t) \to \dfrac{7!}{p^5}$;

3) $f'''(t) \to \dfrac{7!}{p^8}$;

4) інша відповідь?

11. Функція $f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{4}}$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $f''(t) \to \dfrac{p}{1+4p} - \dfrac{1}{4}$;

2) $f''(t) \to \dfrac{p}{1+4p}$;

3) $f''(t) \to \dfrac{p^2}{1+4p}$;

4) інша відповідь?

12. Функція $f(t) = e^{2t}$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\int\limits_0^t e^{2\tau} d\tau \to \dfrac{p}{p-\alpha}$;

2) $\int\limits_0^t e^{2\tau} d\tau \to \dfrac{1}{p(p-\alpha)}$;

3) $\int\limits_0^t e^{2\tau} d\tau \to \dfrac{p}{p+\alpha}$;

4) інша відповідь?

13. Функція $f(t) = \operatorname{ch} 4t$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\int\limits_0^t \operatorname{ch} 4\tau d\tau \to \dfrac{1}{p^2-16}$;

2) $\int\limits_0^t \operatorname{ch} 4\tau d\tau \to \dfrac{4p}{p^2-16}$;

3) $\int_0^t \operatorname{ch} 4\tau d\tau \to \dfrac{p^2}{p^2-16}$;

4) інша відповідь?

14. Функція $f(t)=e^{-5t}\operatorname{ch} 6t$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\int_0^t e^{-5t}\operatorname{ch} 6\tau d\tau \to \dfrac{p-5}{(p-5)^2-36}$;

2) $\int_0^t e^{-5t}\operatorname{ch} 6\tau d\tau \to \dfrac{p-5}{(p-5)^2-36}$;

3) $\int_0^t e^{-5t}\operatorname{ch} 6\tau d\tau \to \dfrac{p+5}{((p+5)^2-36)}$;

4) інша відповідь?

15. Функція $f(t)=\operatorname{sh} 15t$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\int_0^t \operatorname{sh}^2 15\tau d\tau \to \dfrac{250}{p(p^2-500)}$;

2) $\int_0^t \operatorname{sh}^2 15\tau d\tau \to \dfrac{250}{p^2(p^2-500)}$;

3) $\int_0^t \operatorname{sh}^2 15\tau d\tau \to \dfrac{250}{p^2(p^2+500)}$;

4) інша відповідь?

16. Функції $f_1(t)=\sin t$ та $f_2(t)=\operatorname{sh} t$ є оригіналами. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\sin t * \operatorname{sh} t = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t)$;

2) $\sin t * \operatorname{sh} t = \dfrac{1}{2}(\sin t - \operatorname{sh} t)$;

3) $\sin t * \operatorname{sh} t = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$;

4) інша відповідь?

17. Функції $f_1(t)=1$ та $f_2(t)=(1+t)^{\frac{1}{2}}$ є оригіналами. Яке з тверджень є справедливим:

1) $1*(1+t)^{\frac{1}{2}} = (1+t)^{3/2}-1$;

2) $1*(1+t)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}\left((1+t)^{3/2}-1\right)$;

3) $1*(1+t)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left((1+t)^{3/2}-1\right)$;

4) інша відповідь?

18. Функції $f_1(t)=t^2$ та $f_2(t)=t^3$ є оригіналами. Яке з тверджень є справедливим:

1) $t^2 * t^3 = \frac{1}{10}t^6$;

2) $t^2 * t^3 = \frac{1}{60}t^6$;

3) $t^2 * t^3 = 60t^6$;

4) інша відповідь?

19. Функція $f(t)=\frac{\sin t}{e^{9t}t}$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\frac{\sin t}{e^{9t}t} \to \operatorname{arctg}\frac{1}{p-9}$;

2) $\frac{\sin t}{e^{9t}t} \to \operatorname{arctg}\frac{1}{p+9}$;

3) $\frac{\sin t}{e^{9t}t} \to \operatorname{arctg}\frac{1}{p+1}$;

4) інша відповідь?

20. Функція $f(t)=t^{-1}\operatorname{sh}^2 t$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $t^{-1}\operatorname{sh}^2 t \to \frac{1}{4}\ln\frac{p^2}{p^2-4}$;

2) $t^{-1}\operatorname{sh}^2 t \to \ln\frac{p^2}{p^2-4}$;

3) $t^{-1}\operatorname{sh}^2 t \to \frac{1}{4}\ln\frac{1}{p^2-4}$;

4) інша відповідь?

21. Функція $f(t)=2(te)^{-1}\sin^2\frac{t}{2}$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $2(te)^{-1}\sin^2\frac{t}{2} \to \ln\frac{1+(p+1)^2}{(p+1)^2}$;

2) $2(te)^{-1}\sin^2\frac{t}{2} \to \frac{1}{2}\ln\frac{1+(p+1)^2}{(p+1)^2}$;

3) $2(te)^{-1}\sin^2\frac{t}{2} \to 2\ln\frac{1+(p+1)^2}{(p+1)^2}$;

4) інша відповідь?

22. Функція $f(t)=(te)^{-1}(1-e^{25t})$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $(te)^{-1}(1-e^{25t})\to \ln\dfrac{p-24}{p+1}$;

2) $(te)^{-1}(1-e^{25t})\to 2\ln\dfrac{p-24}{p+1}$;

3) $(te)^{-1}(1-e^{25t})\to \ln\dfrac{p+1}{p-24}$;

4) інша відповідь?

23. Функція $f(t)=t^{-1}\,\mathrm{sh}\,t$ є оригіналом. Яке з тверджень є справедливим:

1) $t^{-1}\,\mathrm{sh}\,t\to 2\ln\dfrac{p+1}{p-1}$;

2) $t^{-1}\,\mathrm{sh}\,t\to \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$;

3) $t^{-1}\,\mathrm{sh}\,t\to \ln\dfrac{p+1}{p-1}$;

4) інша відповідь?

24. Функція $F(p)=\dfrac{1}{p^2-4p+20}$ є зображенням функції $f(t)$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $f(t)=0{,}25e^{2t}\sin 4t$;

2) $f(t)=0{,}25e^{t}\sin 4t$;

3) $f(t)=0{,}25e^{2t}\sin t$;

4) інша відповідь?

25. Функція $F(p)=\dfrac{5p-1}{p^2-1}$ є зображенням функції $f(t)$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $f(t)=\dfrac{4}{3}e^{t}-\dfrac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$;

2) $f(t)=\dfrac{4}{3}\left(e^{t}-e^{-\frac{t}{2}}\right)\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$;

3) $f(t)=\dfrac{4}{3}e^{t}-\dfrac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}+2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$;

4) інша відповідь?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

№ 1. Користуючись властивістю зміщення, знайти зображення заданих оригіналів.

1.01. $f(t)=e^{4t}\sin 5t$.

1.02. $f(t)=e^{7t}\sin 6t.$

1.03. $f(t)=e^{8t}\sin 3t.$

1.04. $f(t)=e^{10t}\cos 5t.$

1.05. $f(t)=e^{-4t}\sin 3t\cos 2t.$

1.06. $f(t)=e^{-5t}\sin 2t\cos 3t.$

1.07. $f(t)=e^{-2t}\sin 3t\sin 4t.$

1.08. $f(t)=e^{-3t}\cos 2t\cos 4t.$

1.09. $f(t)=e^{-8t}\cos 7t\cos 5t.$

1.10. $f(t)=e^{-6t}\mathrm{ch}t\cos 2t.$

1.11. $f(t)=e^{-7t}\mathrm{ch}2t\cos t.$

1.12. $f(t)=e^{-9t}\mathrm{ch}3t\sin 2t.$

1.13. $f(t)=e^{-t}\mathrm{sh}5t\sin 4t.$

1.14. $f(t)=e^{-2t}\mathrm{sh}6t\sin 4t.$

1.15. $f(t)=e^{-5t}\mathrm{sh}5t\sin 6t.$

1.16. $f(t)=s\mathrm{h}t\cos 2t\cos 3t.$

1.17. $f(t)=s\mathrm{h}2t\cos 4t\cos 5t.$

1.18. $f(t)=s\mathrm{h}3t\cos 4t\cos 6t.$

1.19. $f(t)=s\mathrm{h}4t\sin 2t\sin 3t.$

1.20. $f(t)=s\mathrm{h}6t\sin 2t\cos 3t.$

1.21. $f(t)=s\mathrm{h}5t\sin t\cos 6t.$

1.22. $f(t)=c\mathrm{h}t\sin^2 t.$

1.23. $f(t)=c\mathrm{h}t\sin^2 4t.$

1.24. $f(t)=c\mathrm{h}t\cos^2 t.$

1.25. $f(t)=c\mathrm{h}t\cos^2 4t.$

№ 2. Користуючись властивістю запізнення, знайти зображення заданих оригіналів.

2.01. $f(t)=(t-3)^6.$

2.02. $f(t)=(t-8)^4.$

2.03. $f(t)=(t-9)^5.$

2.04. $f(t)=\sin(5t-6).$

2.05. $f(t)=\sin(6t-7).$

2.06. $f(t)=\sin(8t-5).$

2.07. $f(t)=\sin(2t-1).$

2.08. $f(t)=\cos(5t-4).$

2.09. $f(t)=\cos(4t-5).$

2.10. $f(t)=\cos(3t-2).$

2.11. $f(t)=(2t-1)^5.$

2.12. $f(t)=(6t-9)^4.$

2.13. $f(t)=e^{-(t-3)}\cos(t-3).$

2.14. $f(t)=e^{-(t-2)}\cos(t-2).$

2.15. $f(t)=e^{-(t-7)}\cos(t-7).$

2.16. $f(t)=e^{-(t-11)}\cos(t-11).$

2.17. $f(t)=e^{-(t-10)}\cos(t-10).$

2.18. $f(t)=e^{-(t-1)}\cos(t-1).$

2.19. $f(t)=(6t-5)^5.$

2.20. $f(t)=(5t-4)^6$.

2.21. $f(t)=\sin(3t-5)$.

2.22. $f(t)=\cos(4t-6)$.

2.23. $f(t)=\sin(9t-11)$.

2.24. $f(t)=\sin(7t-2)$.

2.25. $f(t)=\cos(5t-3)$.

№ 3. Знайти оригінали заданих зображень.

3.01. $F(p)=\dfrac{3-2p}{(p-1)(p+1)^2}$.

3.02. $F(p)=\dfrac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}$.

3.03. $F(p)=\dfrac{4p^3+4p+4}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

3.04. $F(p)=\dfrac{4p^2-6p+4}{p(p-1)^2}$.

3.05. $F(p)=\dfrac{p^2+3p+4}{p(p-1)(p-2)}$.

3.06. $F(p)=\dfrac{2-5p}{p(p-1)(p+3)}$.

3.07. $F(p)=\dfrac{3-6p}{p(p+1)(p-7)}$.

3.08. $F(p)=\dfrac{1-p^2}{p(p-3)(p+4)}$.

3.09. $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{p^2(p-1)}$.

3.10. $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{p^2(p-1)^2}$.

3.11. $F(p)=\dfrac{p^2+4}{p(p-1)(p+2)^2}$.

3.12. $F(p)=\dfrac{p^2-p+1}{p(p-2)^2(p+1)^2}$.

3.13. $F(p)=\dfrac{2p+p^2-1}{(p+1)^2(p-2)^2}$.

3.14. $F(p)=\dfrac{4p+1}{p^3(p-1)}$.

3.15. $F(p)=\dfrac{3p+2}{p(p-1)^3}$.

3.16. $F(p)=\dfrac{p^2+2p+3}{(p-1)(p+1)(p+2)}$.

3.17. $F(p)=\dfrac{p^2+3p+4}{p(p-1)^2(p+2)}$.

3.18. $F(p)=\dfrac{p^2-2p+2}{p^2(p+1)(p+3)}$.

3.19. $F(p)=\dfrac{p^2-2p+4}{p(p+2)(p-1)^2}$.

3.20. $F(p)=\dfrac{p^2-4}{p^2(p-3)^2}$.

3.21. $F(p)=\dfrac{p^2+7}{p^2(p+3)^2}$.

3.22. $F(p)=\dfrac{p^2+10}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$.

3.23. $F(p)=\dfrac{p+8}{p(p+5)(p-6)(p+7)}$.

3.24. $F(p)=\dfrac{p+7}{p^3(p-1)}$.

3.25. $F(p)=\dfrac{p+9}{p^3(p+1)}$.

№ 4. Розв’язати задачу Коші операторним методом.

4.01. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 4; \\ y(0) = 4; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

4.02. $\begin{cases} y'' + 4y = 2\cos 2t; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 4. \end{cases}$

4.03. $\begin{cases} y'' - 9y = 2 - t \\ y(0) = 4; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

4.04. $\begin{cases} y'' - y' - 6y = 2; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4.05. $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = t; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

4.06. $\begin{cases} y'' - y - 6y = 2; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

4.07. $\begin{cases} y'' - 9y' = 2 - t; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4.08. $\begin{cases} y'' + 4y = 2\cos 2t; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 4. \end{cases}$

4.09. $\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{t}; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = -2. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} y'' + 4y = 4\sin t; \\ y(0) = 4; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} y'' + y = t^{3} + 6t; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} y'' - 5y + 6y = 7e^{6t}; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} y'' + y = \cos t + \sin 2t; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} y'' + y = e^{-t} + 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} y''' + y' = 10e^{2t}; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; \\ y''(0) = 0. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} y''' - y'' - 4y' + 4y = t^{2} - 8; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; \\ y''(0) = 0. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} y^{IV} + y''' = 1; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; \\ y''(0) = 0; \\ y'''(0) = 1. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2t}; \\ y(0) = 2; \\ y'(0) = 1; \\ y''(0) = 1. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = t + 5; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = t^2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} y'' + 6y' - 7y = \cos t; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} y'' - 11y' + 10y = 2t^2 + 3t + 1; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} y'' + 9y' - 10y = t^2 + 4t; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} y'' + 10y' - 11y = 5t^2 + 1; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} y'' + 7y' - 8y = 2t + 5; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

№ 5. Знайти частинні розв'язки систем диференціальних рівнянь, що задовольняють заданим початковим умовам операторним методом.

5.01. $\begin{cases} y_1' = 3y_2 - y_1; \\ y_2' = y_1 + y_2 + e^t; \\ y_1(0) = 0; \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$

5.02. $\begin{cases} y_1' - 2y_1 - 4y_2 = \cos t; \\ y_2' + y_1 + 2y_2 = \sin t; \\ y_1(0) = 0; \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$

5.03. $\begin{cases} y_1' + y_2 - y_1 = 0; \\ y_2' + y_3 - y_1 = 0; \\ y_3' - y_1 = 0; \\ y_1(0) = 2; \\ y_2(0) = 0; \\ y_3(0) = 1. \end{cases}$

5.04. $\begin{cases} y' + 5y - 2z = e^t; \\ z' - y + 6z = e^{-2t}; \\ y(0) = 0; \\ z(0) = 0. \end{cases}$

5.05. $\begin{cases} y' = z; \\ z' = y + e^t + e^{-t}; \\ y(0) = 0; \\ z(0) = 0. \end{cases}$

5.06. $\begin{cases} y' = z + x; \\ z' = x + y; \\ x' = y + z; \\ y(0) = -1; \\ x(0) = 0; \\ z(0) = 1. \end{cases}$

5.07. $\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t}; \\ 2x + y' - 3y = 3e^{2t}; \\ x(0) = 2; \\ y(0) = 0. \end{cases}$

5.08. $\begin{cases} x' - 2x - 2y = \cos t; \\ y' + x + 2y = \sin t; \\ x(0) = 0; \\ y(0) = 0. \end{cases}$

5.09. $\begin{cases} y'' - 3y - 4z + 3 = 0; \\ z'' + y + z - 5 = 0; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; \\ z(0) = 0; \\ z'(0) = 0. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} y' + z - x = 0; \\ z' - x = 0; \\ x' + y - x = 0; \\ x(0) = 2; \\ y(0) = 0; \\ z(0) = 1. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} y' + 3y + z = 0; \\ z' - y + z =; \\ y(0) = 1; \\ z(0) = 1. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} y' - 2y - 4z = \cos t; \\ z' + y + 2z = \sin t; \\ y(0) = 0; \\ z(0) = 0. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} y' + 5y - 2z = e^{t}; \\ z' - y + 6z = e^{-2t}; \\ y(0) = 0; \\ z(0) = 0. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} y' = z + 4; \\ z' = y + 4; \\ u' = y + z; \\ y(0) = -1; \\ z(0) = 0; \\ u(0) = 0. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} y_1' + y_2 = 0; \\ y_2' + t = 0; \\ y_1(0) = 2; \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} y_1' + y_1 - 2y_2 = 0; \\ y_2' + y_1 + 4y_2 = 0; \\ y_1(0) = 1; \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} y_1' = -y_2; \\ y_2' = 2(y_1 + y_2); \\ y_1(0) = 1; \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} y_1' + 2y_2 = 3t; \\ y_2' - 2y_2 = 4; \\ y_1(0) = 2; \\ y_2(0) = 3. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} y_1' + y_1 = y_2 + e^{t}; \\ y_2' + y_2 = y_1 + e^{t}; \\ y_1(0) = 1; \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} y_1' - y_2' = -\sin t; \\ y_2' + y_2' = \cos t; \\ y_1(0) = \dfrac{1}{2}; \\ y_2(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} y_1' - y_2 = -y_3; \\ y_2' = y_1 + y_2; \\ y_3' = y_1 + y_3; \\ y_1(0) = 1; \\ y_2(0) = 2; \\ y_3(0) = 3. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} y_1' = 4y_2 + y_3; \\ y_2' = y_3; \\ y_3' = 4y2; \\ y_1(0) = 5; \\ y_2(0) = 2; \\ y_3(0) = 4. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} y_1' + 2y_2' + y_1 + y_2 + y_3 = 0; \\ y_1' + y_2' + y_1 + y_3 = 0; \\ y_3' - 2y_2' - y_2 = 0; \\ y_1(0) = 1; \\ y_2(0) = 1; \\ y_3(0) = -2. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} y_1' + 4y_2 + 2y_3 = 4t + 1; \\ y_2' + y_1 - y_2 = \dfrac{3}{2}t^2; \\ y_1(0) = 0; \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} y_1' + y_2 - 2y_1 = 0; \\ y_2' + y_1 - 2y_2 = -5e^t \sin t; \\ y_1(0) = 2; \\ y_2(0) = 3. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Диткин В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М., 1965.

2. Микусинский Я. Операционное исчисление / Микусинский Я. – М., 1956.

3. Эфрос А.М. Операционное исчисление и контурные интегралы / А.М. Эфрос, А.М. Данилевский. – ДНТВУ, 1937.

4. Лаврентьев М.А. Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – [2-е изд.]. – М.: Физматиз, 1958.

5. Штокало И.З. Операционные методы и их развитие в истории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / Штокало И.З. – К.: Изд-во АН УССР, 1961.

6. Диткин В.А. Интегральные преобразование и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Физматиз, 1961.

7. Диткин В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, П.И. Кузнецов. – М. – Л.: Гостхиздат, 1951.