

Міністерство транспорту та зв'язку України
Державна адміністрація зв'язку
Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова

Кафедра теорії електричних кіл

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ

Модуль 3

**Часові та операторні методи аналізу
електричних кіл**

Частини 1 та 2

Навчально-методичний посібник
для бакалаврів

Телекомунікація
Телекомунікаційні системи та мережі
Інформаційні мережі зв'язку

Одеса 2009

Арбузнікова Н. Ф., Калашніков А. Ю., Шкуліна А. В. Часові та операторні методи аналізу електричних кіл: Навч. посібник з дисципліни «Теорія електричних кіл та сигналів». – Одеса: ВЦ ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2008. – Ч. 1 та 2. – 90 с.

Навчальний посібник складено з двох частин. У першій частині подано короткий зміст теоретичного матеріалу модуля 3. Розглянуто часові й операторні методи аналізу електричних кіл. Частину другу присвячено методичним вказівкам щодо виконання лабораторних робіт. У додатках подано тест-запитання задля виявлення ступеня підготовленості студентів до виконання лабораторних робіт, а також приклади розв'язування завдань.

УХВАЛЕНО
до видання
на засіданні кафедри
теорії електричних кіл

Протокол № 1
від 28.08.2008 р.

ЗМІСТ

ЧАСТИНА 1 Часові та операторні методи аналізу електричних кіл	4
Зміст модуля 3	4
1. ЧАСОВІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	5
1.1 Перехідні процеси в лінійних електричних колах.	
Основні положення й правила.....	5
1.2 Розрахунок перехідних процесів класичним методом	7
1.2.1 Основні положення розрахунку	7
1.2.2 Кола першого порядку	8
1.2.3 Кола другого порядку	13
1.3 Часові функції електричних кіл.....	19
1.3.1 Види часових функцій	19
1.3.2 Визначання відгуку методом накладання	20
1.3.3 Визначання відгуку за довільних впливів.....	22
1.3.4 Диференціальні та інтегровальні кола	23
2. ОПЕРАТОРНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	25
2.1 Пряме перетворення Лапласа та його властивості	25
2.2 Зворотне перетворення Лапласа. Теорема розкладання	28
2.3 Закони теорії електричних кіл в операторній формі.	
Схеми заміщення двополюсних елементів	30
2.4 Операторні передавальні функції електричних кіл	
та їхні властивості	33
2.4.1 Види операторних передавальних функцій	34
2.4.2 Властивості операторних передавальних функцій.....	35
2.5 Зв'язок часових, частотних та операторних функцій кіл та сигналів ...	36
2.6 Аналіз кіл зі зворотним зв'язком. Критерії стійкості	38
2.6.1 Кола зі зворотним зв'язком.....	38
2.6.2 Критерії стійкості	41
2.7 Умови стаціонарності автоколивань	43
Список літератури.....	46
ЧАСТИНА 2 Методичні вказівки до лабораторних робіт	47
<i>Лабораторна робота № 3.1а</i> Дослідження перехідних процесів у колах	
першого порядку	47
<i>Лабораторна робота № 3.1б</i> Дослідження перехідних процесів у колах	
другого порядку.....	49
<i>Лабораторна робота № 3.2</i> Дослідження частотних та часових харак-	
теристик електричних кіл першого порядку	53
<i>Лабораторна робота № 3.3</i> Дослідження відгуку кола за різних видів	
ступінчастого впливу	57
<i>Лабораторна робота № 3.4</i> Дослідження стійкості електричного	
кола.....	63
ДОДАТОК А Тест-запитання до лабораторних робіт	66
ДОДАТОК Б Приклади розв'язування задач за темами модуля 3	71

ЧАСТИНА 1

Часові та операторні методи аналізу електричних кіл

Зміст модуля 3

Семестр	Лк	Пр	Лб	Сам. роб.	Кредити	Σ годин	Контроль
Годин	22	12	12	30	2	$46 + 30 = 76$	Іспит

Теми лекцій

1 Часові методи аналізу електричних кіл:

- класичний метод розрахунку процесів в електричних колах;
- часові функції кіл, перехідна й імпульсна характеристики;
- віднаходження відгуку кіл на вплив довільної форми, інтеграли накладання.

2 Операторні методи аналізу процесів в електричних колах:

- перетворювання сигналів за Лапласом;
- операторні функції та їхні властивості;
- операторні методи розрахунку кіл;
- аналіз кіл зі зворотним зв'язком;
- критерії стійкості кіл.

Лабораторні роботи

- 1 Дослідження перехідних процесів у колах першого порядку.
- 2 Дослідження перехідних процесів у колах другого порядку.
- 3 Дослідження часових та частотних характеристик електричних кіл першого порядку.
- 4 Дослідження відгуку кола за різних видів ступінчастого впливу.
- 5 Дослідження стійкості електричного кола.

Комплексне завдання

- 1 Розрахунок перехідних процесів у ЛЕК класичним методом.
- 2 Розрахунок перехідних процесів у ЛЕК операторним методом.
- 3 Розрахунок часових характеристик електричного кола. Визначення відгуку ЛЕК методом накладання (інтеграл Дюамеля).

1 ЧАСОВІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

У попередніх розділах курсу (модулі 1 та 2) розглядалися електричні кола, в яких напруги та струми елементів були незмінні в часі (кола за сталих впливів) або були періодичними функціями часу (кола за гармонічних чи періодичних впливів). За таких впливів стан (режим) кола називають сталим, або стаціонарним. Якщо електричне коло піддається постійному або періодичному впливові, за якого струми й напруги в елементах будуть неперіодичними функціями, то таке коло перебуває в перехідному, або нестаціонарному стані (режимі).

1.1 Перехідні процеси в лінійних електричних колах. Основні положення й правила

Відмінністю часових методів аналізу від розглянутих раніше (в модулях 1 та 2) є те, що параметри кола (струми, напруги або їхні відношення) є функціями часу і їх можна визначити будь-якого фіксованого моменту. При цьому треба обрати початкову точку відліку. Часові методи застосовуються при аналізуванні перехідних процесів в електричних колах, а також при визначанні відгуку тракту передачі на впливи різної форми.

Розглянемо способи розрахунку кіл у перехідному режимі.

Будь-яка стрибкоподібна зміна параметрів кола, його конфігурації, підмикання або вимикання джерел узвичаєно називати **комутацією**. Вважають, що комутація відбувається миттєво ($t = 0$).

Комутація здійснюється за допомогою ідеального ключа K (рис. 1.1), опір якого в розімкненому стані є нескінченно великий, а в замкнутому – дорівнює нулю.

Теоретично перехідний процес триває нескінченно ($t_{\text{пп}} \rightarrow \infty$), але практично час перехідного процесу залежить від параметрів кола.

Стаціонарний режим кола, який має місце до комутації, називають “старим” стаціонарним режимом (ССР), а стаціонарний режим, що він має місце після завершення перехідного процесу, називають “новим” стаціонарним режимом (НСР). Режим переходу кола з ССР до НСР називають перехідним (ПР).

Якщо комутація у колі здійснюється за $t = 0$, то остання мить перед комутацією позначається $t = 0_-$, а перша мить після комутації – $t = 0_+$. На часовій осі стан кола можна зобразити в такий спосіб, як показано на рис. 1.2, де $t_{\text{вст}}$ – практичний час завершення перехідного процесу, який відрізняється від теоретичного $t_{\text{пп}} \rightarrow \infty$.

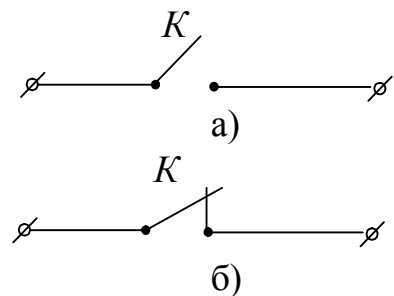


Рисунок 1.1 – Комутатор:
а – розімкнено; б – замкнуто

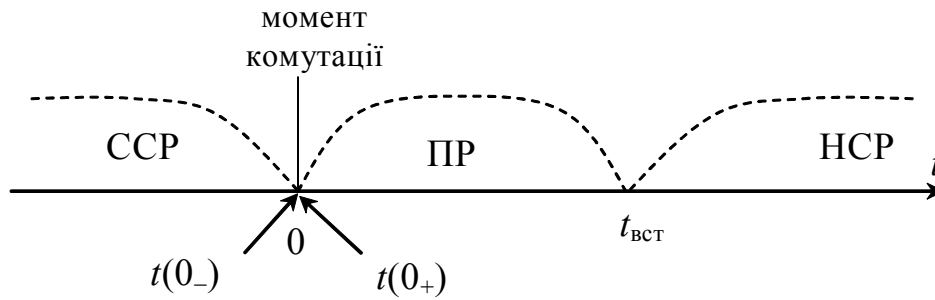


Рисунок 1.2 – Часові режими стану кола

При розрахунках перехідних процесів використовують два правила комутації, які випливають із закону збереження енергії.

Перше правило: **струм в індуктивності i_L не може змінюватися стрибком у момент комутації**, тобто

$$i_L(0_-) = i_L(0_+), \quad (1.1)$$

що зумовлено неможливістю стрибкоподібного змінювання магнітного поля індуктивності при комутації.

Друге правило: **напруга на ємності u_C не може змінюватися стрибком у момент комутації**, тобто

$$u_C(0_-) = u_C(0_+), \quad (1.2)$$

що зумовлено неможливістю стрибкоподібного змінювання електричного поля ємності в момент комутації.

Значення струмів в індуктивностях та напруг на ємностях до початку комутації утворюють **початкові умови** стану кола, які називають **незалежними**, тому що вони не залежать від комутації в колі.

Усі значення струмів та напруг після комутації, а також похідні всіх струмів та напруг за часом, називають **залежними умовами**.

Незалежні початкові умови кола розрізняють нульові, коли $i_L(0_-) = 0$ або $u_C(0_-) = 0$, і ненульові, коли $i_L(0_-) \neq 0$ та $u_C(0_-) \neq 0$, що зумовлено енергетичним станом кола. Залежні умови визначаються за допомогою законів Кірхгофа та правил комутації.

Перехідні процеси у багатьох пристроях телекомунікації є природним станом кола, приміром у системах автоматичного регулювання, у релейних системах. Водночас у низці випадків перехідні процеси можуть призводити до таких небажаних явищ, як виникнення вельми великих струмів чи напруг, надто в силових установках. Все це доводить важливість розглядання методів аналізу перехідних процесів в електричних колах.

Якщо коло має нульові початкові умови, то з правила комутації для індуктивності виходить, що в момент комутації струм в індуктивності є відсутній, а це означає, що за $t = 0_+$ опір індуктивності є нескінченно великий. Нескінченно великий опір будь-якого елемента свідчить про розрив (ненавантажений стан) у колі. Отже, індуктивність за $t = 0_+$ є еквівалентна до розриву в колі. З правила комутації для ємності виходить, що в момент

комутації ($t = 0_+$) у колі з нульовими початковими умовами ємність є еквівалентна до короткого замикання. За ненульових початкових умов можна стверджувати, що:

- 1) індуктивність за $t = 0_+$ є еквівалентна до джерела струму, зі струмом, що він дорівнює струмові в індуктивності перед комутацією;
- 2) ємність за $t = 0_+$ еквівалентна джерелові напруги, з напругою, що вона дорівнює напрузі на ємності перед комутацією.

1.2 Розрахунок перехідних процесів класичним методом

1.2.1 Основні положення розрахунку

В основі класичного методу розрахунку перехідних процесів лежить складання інтегро-диференціальних рівнянь для миттєвих значень струмів та напруг. Ці рівняння складаються на підставі законів Кірхгофа. Зазвичай інтегро-диференціальні рівняння зводять до одного диференціального рівняння відповідного порядку щодо обраної змінної. Для зручності розв'язку диференціальні рівняння складаються щодо змінної i_L або u_C , тому що ці величини підпорядковуються правилам комутації (1.1) і (1.2).

Порядок диференціального рівняння відповідає порядку електричного кола, в якому має місце перехідний процес, тобто порядок диференціального рівняння визначається кількістю незалежних накопичувачів енергії (індуктивностей та ємностей). Позначимо змінну i_L чи u_C через $x(t)$. Диференціальне рівняння n -го порядку, яке описує перехідний процес в електричному колі, котре перебуває під впливом $f(t)$, має вигляд

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{(n-1)} \frac{d^{(n-1)} x}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t), \quad (1.3)$$

де $a_n, a_{(n-1)}, \dots, a_1, a_0$ — сталі, дійсні коефіцієнти, котрі залежать від параметрів кола (R, L, C).

Диференціальне рівняння (1.3) є лінійним неоднорідним рівнянням n -го порядку. Його розв'язок являє собою суму загального розв'язування $x_{\text{заг}}$ однорідного диференціального рівняння й часткового розв'язування x_r неоднорідного диференціального рівняння:

$$x = x_{\text{заг}} + x_r.$$

У теорії електричних кіл загальний розв'язок $x_{\text{заг}}$ (струм i_L чи напругу u_C) називають **вільною складовою** x_v , тому що він визначає вільні процеси в колі без участі джерела $f(t)$. Частковий x_r називають **примушеною складовою** $x_{\text{пр}}$, тому що він залежить від дії джерела $f(t)$. Отже, розв'язок рівняння (1.3) набирає вигляду:

$$x(t) = x_v(t) + x_{\text{пр}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k(t)} + x_{\text{пр}}(t), \quad (1.4)$$

де A_k – k -та стала інтегрування, значення струму чи напруги в момент часу $t = 0$;

p_k – k -тий корінь характеристичного рівняння, яке складено за диференціальним (1.3) й має вигляд

$$a_n p^n + a_{(n-1)} p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

1.2.2 Кола першого порядку

У колах першого порядку перехідні процеси описуються диференціальними рівняннями першого порядку:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t).$$

Розглянемо розрахунок кіл на прикладах.

Приклад 1. Підключення RL кола до джерела постійної напруги (рис. 1.3).

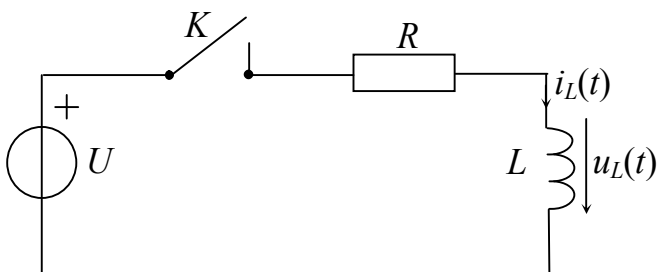


Рисунок 1.3 – Підключення RL кола до джерела напруги

З рисунка видно, що до комутації ключ K є розімкнений, тому

$$i(0_-) = 0, \quad (1.5)$$

тобто коло перебуває в нульовому початковому стані.

Після замикання ключа (комутації) у колі розпочинається перехідний процес. У якості змінної диференціального рівняння оберемо

струм у колі, який збігається зі струмом в індуктивності $i_L(t)$, і складемо рівняння за другим законом Кірхгофа $u_R + u_L = U$, або, в диференціальній формі,

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = U. \quad (1.6)$$

Розв'язок рівняння (1.6) запишемо за формою (1.4), тобто

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{в}}, \quad (1.7)$$

де $i_{\text{пр}}$ визначаємо в НСР кола (рис. 1.4):

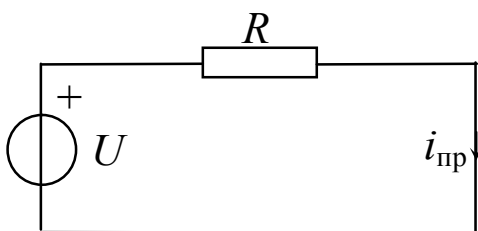


Рисунок 1.4 – Еквівалентна схема заміщення кола рис. 1.3 за $t \rightarrow \infty$

$$i_{\text{пр}} = \frac{U}{R},$$

а $i_{\text{в}}$ визначимо як загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку:

$$i_{\text{в}} = Ae^{pt}. \quad (1.8)$$

В (1.8) A – **стала інтегрування**, яка визначається на підставі правила комутації (1.1) і початкової умови кола (1.5):

$$i(0_-) = i(0_+) = i_{\text{пр}} + A = 0,$$

звідки

$$A = -i_{np} = -\frac{U}{R}.$$

У виразі (1.8) p – корінь характеристичного рівняння

$$R + pL = 0,$$

звідки

$$p = -\frac{R}{L}.$$

При розрахунках зручно користуватися величиною

$$\tau = \frac{1}{|p|}, \quad (1.9)$$

яку називають **сталю часу кола**,

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (1.10)$$

Отже, струм $i(t)$ за $t \geq 0_+$, тобто кожного моменту після комутації:

$$i_L(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (1.11)$$

Визначимо напругу на резисторі R та індуктивності L у перехідному режимі:

$$u_R(t) = Ri_L(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad (1.12)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = U e^{-\frac{R}{L}t} = U e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.13)$$

Формулам (1.11)...(1.13) відповідають часові діаграми цих величин, наведені на рис. 1.5 та 1.6.

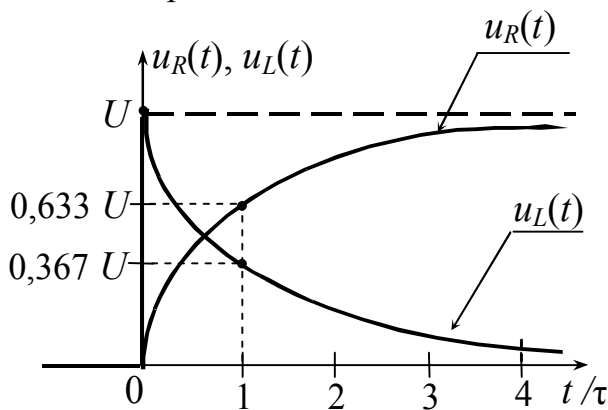


Рисунок 1.5 – Часові діаграми напруг кола

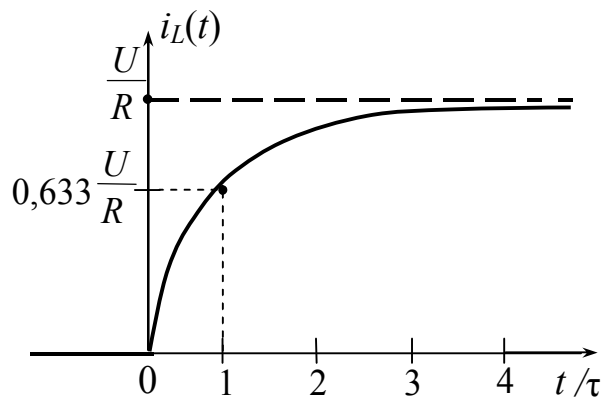


Рисунок 1.6 – Часова діаграма струму кола

З рис. 1.5 видно, що за будь-якого значення t сума напруг u_R та u_L становить величину вхідної напруги U , що підтверджує закон Кірхгофа для контуру.

Аналіз дістаних результатів свідчить, що за нульових початкових умов у момент $t(0_+)$ індуктивність поводить себе як нескінченно великий опір (розрив кола), а за $t \rightarrow \infty$ – як нульовий опір (коротке замикання кола).

В розгалуженому RL колі стала часу визначається як

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{екв}}},$$

де $R_{\text{екв}}$ – еквівалентний опір кола щодо точок підмикання індуктивного елемента. При цьому джерела в колі після комутації ($t \geq 0_+$) замінюються на власні внутрішні опори, а **стала часу τ** – це час, упродовж якого вільна складова i_b змінюється в e разів. Задля доведення цього зрівняємо два значення i_b для двох моментів часу, взятих через інтервал $t = \tau$:

$$\frac{i_b(t)}{i_b(t+\tau)} = \frac{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{Ae^{-\frac{(t+\tau)}{\tau}}} = \frac{\cancel{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}}{\cancel{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}e^{-1}} = e \approx 2,72.$$

Отже, величина τ характеризує швидкість зростання (спадання) часової характеристики перехідного процесу в колі. Через $(4...5)\tau$ перехідний процес практично завершується ($e^{-5} = 0,0067$). Стала часу τ залежить від величин елементів кола (1.10), змінюючи які можна змінювати практичний час перехідного процесу ($t_{\text{вст}}$ на рис. 1.2).

Приклад 2. Відключення розгалуженого RL кола від джерела постійної напруги (рис. 1.7).

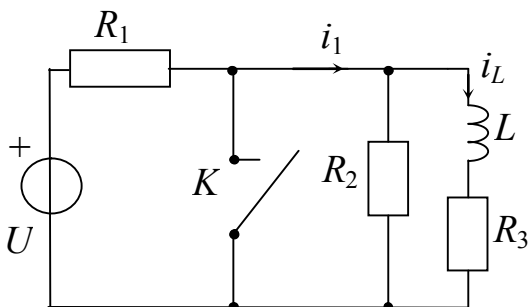


Рисунок 1.7 – Відключення кола від джерела напруги

За $t = 0$ ключ K замикається, вимикаючи при цьому з RL кола джерело напруги U . Визначимо початкову умову для струму в індуктивності:

$$i_L(0_-) = i_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3},$$

де

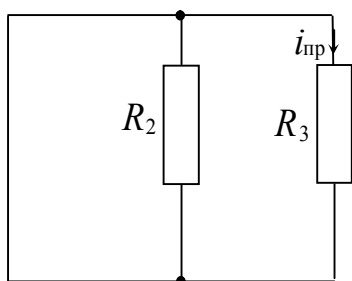


Рисунок 1.8 – Еквівалентна схема заміщення кола рис. 1.7 в НСР індуктивності L :

$$i_1 = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}.$$

Визначимо примушену складову струму $i_{\text{пр}}$ в індуктивності L (у НСР) зі схеми рис. 1.8, звідки видно, що $i_{\text{пр}} = 0$, тому що в цьому колі немає джерела електричної енергії.

Визначимо вільну складову струму i_b в

$$i_b = Ae^{pt},$$

де

$$p = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R_{\text{екв}}}{L},$$

а $R_{\text{екв}}$ визначимо відповідно до правил, викладених вище. Для цього зобразимо схему рис. 1.7 після комутації, джерело U замінимо на коротке замикання і щодо точок вмикання індуктивності L (точки а та б) визначимо $R_{\text{екв}}$. Внаслідок цього дістанемо схему, зображену на рис. 1.9.

$$R_{\text{екв}} = R_{\text{аб}} = R_3.$$

Сталу A визначимо в такий самий спосіб, що і в прикладі 1:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_{\text{пр}} + A = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \frac{R_2}{R_2 + R_3},$$

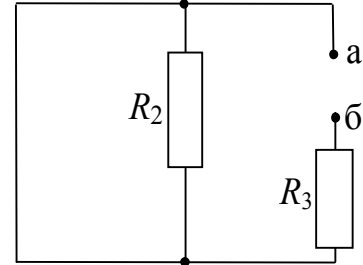


Рисунок 1.9 – Схема заміщення кола для визначення $R_{\text{екв}}$

звідки

$$A = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{U R_2}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}. \quad (1.14)$$

Отже, дістанемо вираз для $i_L(t)$ у перехідному режимі:

$$i_L(t) = \frac{U R_2}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} e^{-\frac{R_{\text{екв}}}{L} t} = i_L(0_-) e^{-\frac{R_{\text{екв}}}{L} t} = i_L(0_-) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.15)$$

Напруга на індуктивності L

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L i_L(0_-) \left(-\frac{R_{\text{екв}}}{L} \right) e^{-\frac{R_{\text{екв}}}{L} t} = -i_L(0_-) R_{\text{екв}} e^{-\frac{R_{\text{екв}}}{L} t} = -i_L(0_-) R_{\text{екв}} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.16)$$

Виразам (1.15) та (1.16) відповідають графіки рис. 1.10 та 1.11.

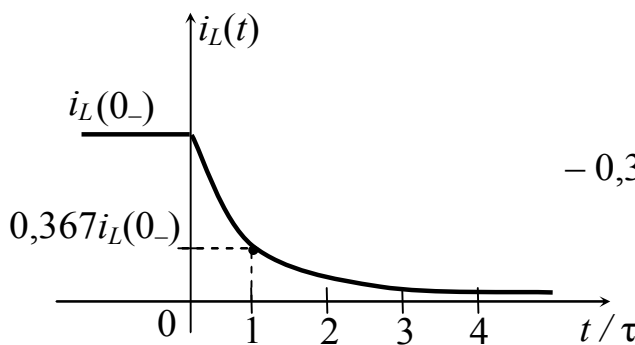


Рисунок 1.10 – Діаграма струму індуктивності

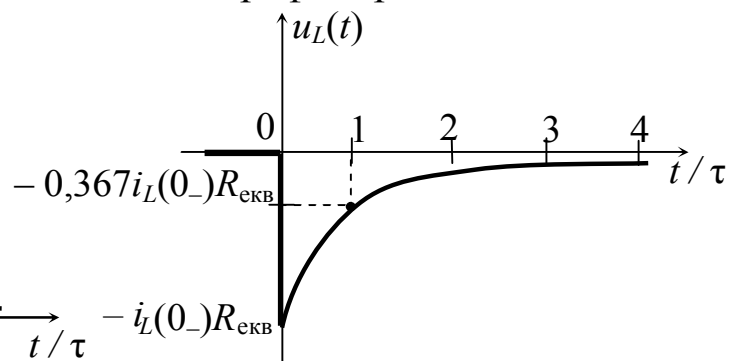


Рисунок 1.11 – Діаграма напруги індуктивності

Приклад 3. Підключення RC кола до джерела постійної напруги (рис. 1.12).

З рис. 1.12 видно, що до комутації ключ K розімкнено, тому

$$u_C(0_-) = 0, \quad (1.17)$$

тобто коло перебуває в нульовому початковому стані.

Після комутації (замикання ключа K) починається перехідний процес. За змінну диференційного рівняння оберемо напругу на ємності u_C і складемо рівняння за законом Кірхгофа:

$$R i_C + u_C = U. \quad (1.18)$$

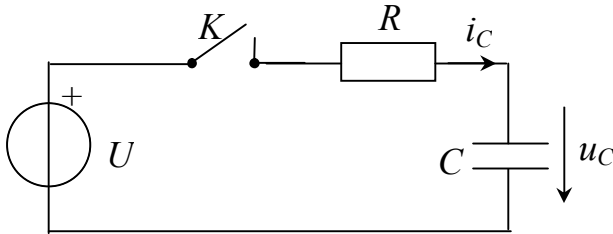


Рисунок 1.12 – Підключення RC кола до джерела напруги

Якщо подати

$$i_C = C \frac{du_C}{dt},$$

то рівняння (1.18) набере вигляду

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U. \quad (1.19)$$

Розв'язок рівняння (1.19) знайдемо у формі (1.4):

$$u_C(t) = u_{Cпр} + u_{Cв}, \quad (1.20)$$

де $u_{Cпр}$ визначається в НСР кола за $t \rightarrow \infty$ (рис. 1.13), а

$$i_C = 0; \quad u_R = 0, \quad u_{Cпр} = U.$$

Вільну складову $u_{Cв}$ визначимо як загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку:

$$u_{Cв} = A e^{pt}, \quad (1.21)$$

де p – корінь характеристичного рівняння:

$$RCp + 1 = 0,$$

звідки $p = -\frac{1}{RC}$.

Згідно з (1.9), стала часу RC кола

$$\tau = \frac{1}{|p|} = RC.$$

Для розгалуженого RC кола $\tau = R_{екв}C$, де $R_{екв}$ визначається відповідно до правил, викладених вище.

Сталу інтегрування A визначимо з рівняння (1.4) за $t = 0_+$, а також за допомогою правила комутації (1.2) і початкової умови (1.17):

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_{Cпр} + A = 0, \quad \text{звідки } A = -u_{Cпр} = -U.$$

Отже, напруга на ємності

$$u_C(t) = U - U e^{-\frac{1}{RC}t} = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (1.22)$$

струм у колі

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.23)$$

напруга на резисторі R

$$u_R(t) = i_C(t)R = Ue^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.24)$$

Формулам (1.22)...(1.24) відповідають часові діаграми цих величин (рис. 1.14 та 1.15).

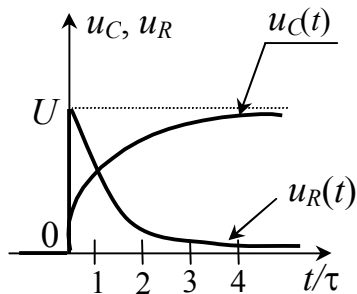


Рисунок 1.14 – Часові діаграми напруг кола

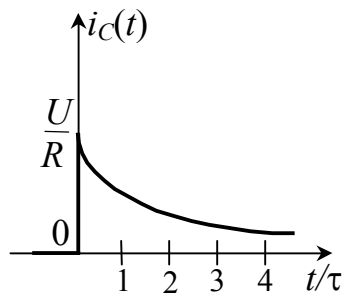


Рисунок 1.15 – Часова діаграма струму кола

З рис. 1.14 видно, що будь-якого моменту часу виконується закон Кірхгофа для контуру:

$$u_R(t) + u_C(t) = U.$$

1.2.3 Коло другого порядку

За наявності в колі двох незалежних накопичувачів енергії (L та C) перехідні процеси в ньому описуються диференціальним рівнянням другого порядку. Таке коло називають *колом другого порядку*. Прикладом такого кола є послідовний коливальний контур (рис. 1.16, а).

Складемо для цього кола диференціальне рівняння, яке описує перехідний процес у колі після комутації (перемикання з K_{0-1} на K_{0-2}). Після перемикання створюється контур, який має послідовне з'єднання елементів R , L , C (рис. 1.16, б). Для цього контуру має місце рівняння

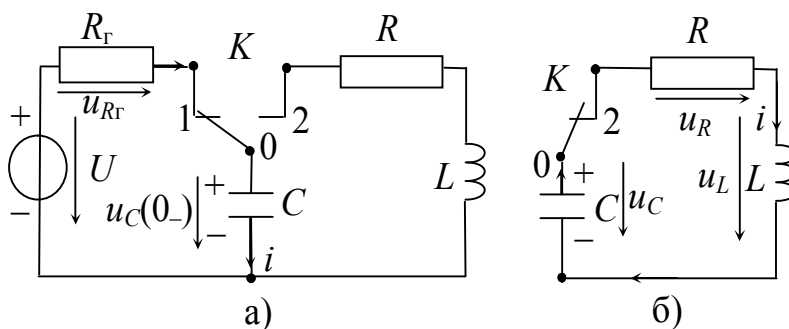


Рисунок 1.16 – Коло другого порядку:
а – до комутації; б – після комутації

$$u_R + u_L - u_C = 0.$$

За змінну покладемо струм $i_C = i_R = i_L = i$. Тоді це рівняння можна подати як

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0, \quad (1.25)$$

оскільки для схеми рис. 1.16, б

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt},$$

звідки

$$u_C = -\frac{1}{C} \int i_C dt.$$

Продиференціюємо рівняння (1.25):

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = 0, \quad (1.26)$$

поділимо всі складові рівняння (1.26) на L :

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0. \quad (1.27)$$

Введемо позначення

$$\frac{R}{L} = 2\delta,$$

де δ – коефіцієнт загасання, а

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

де ω_0 – власна (резонансна) частота контура.

Тоді рівняння (1.27) матиме вигляд

$$i'' + 2\delta i' + \omega_0^2 i = 0. \quad (1.28)$$

Розв'язок рівняння (1.28):

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{в}}.$$

Оскільки $i_{\text{пр}} = 0$, то

$$i = i_{\text{в}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.29)$$

Розв'язавши характеристичне рівняння другого ступеня

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0,$$

віднаходимо корені

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.30)$$

Значення коренів p_1 та p_2 залежать від співвідношення коефіцієнта загасання δ й частоти ω_0 .

Приміром, якщо

$$\delta > \omega_0, \quad (1.31)$$

то обидва корені p_1 та p_2 є від'ємні дійсні й різні.

Якщо

$$\delta = \omega_0, \quad (1.32)$$

то $p_1 = p_2 = -\delta = p$, тобто корені є рівні між собою й від'ємні.

Якщо

$$\delta < \omega_0, \quad (1.33)$$

то корені p_1 та p_2 є комплексно-спряжені:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j \omega_b, \quad (1.34)$$

де $\omega_b = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота вільних коливань.

Залежно від виду коренів p_1 та p_2 розрізняють три режими перехідних процесів: аперіодичний, критичний та коливальний.

Аперіодичний режим. Умовою виникнення аперіодичного режиму є (1.31)

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

або

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

де $\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ – хвильовий опір контуру. Величина 2ρ називається *критичним опором* $R_{кр}$, тобто $R_{кр} = 2\rho = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Отже, умову (1.31) можна замінити на умову

$$R > R_{кр}.$$

При цьому вільна складова i_b визначається згідно з (1.29). У виразі (1.29) корені p_1 та p_2 вже знайдено згідно з (1.30), а для визначення сталих інтегрування A_1 та A_2 складемо систему з двох рівнянь за $t(0_+)$:

$$i_b(0_+) = i(0_+) = A_1 + A_2 = i(0_-) = 0,$$

звідки $A_1 + A_2 = 0$ – перше рівняння. Друге дістанемо, продиференціювавши вираз (1.28), а потім переписавши його за $t(0_+)$:

$$i'_b(t) = i'(t) = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t},$$

де $i'(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2$ – друге рівняння.

Отже, дістали систему з двох рівнянь з двома невідомими A_1 та A_2 :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, & A_1 = -A_2; \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = i'(0_+). \end{cases} \quad (1.35)$$

Перш ніж розв'язати систему (1.35), визначимо з другого закону Кірхгофа для коливального контуру (див. рис. 1.16) значення $i'(0_+)$. Для цього рівняння (1.25) перепишемо за $t(0_+)$:

$$Ri(0_+) + Li'(0_+) + u_C(0_+) = 0,$$

або

$$Li'(0_+) - U = 0,$$

оскільки $i(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0$, тоді

$$i'(0_+) = \frac{U}{L}.$$

З системи (1.35) визначаємо A_1 та A_2 :

$$A_1 = \frac{U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}; \quad A_2 = -\frac{U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}.$$

Отже, струм i , згідно з (1.29), запишемо в такий спосіб:

$$i = \frac{U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \quad (1.36)$$

напруга на резисторі R

$$u_R = Ri = \frac{U\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t});$$

напруга на індуктивності L

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{U}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}); \quad (1.37)$$

напруга на ємності C

$$u_C = u_R + u_L = \frac{U}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}). \quad (1.38)$$

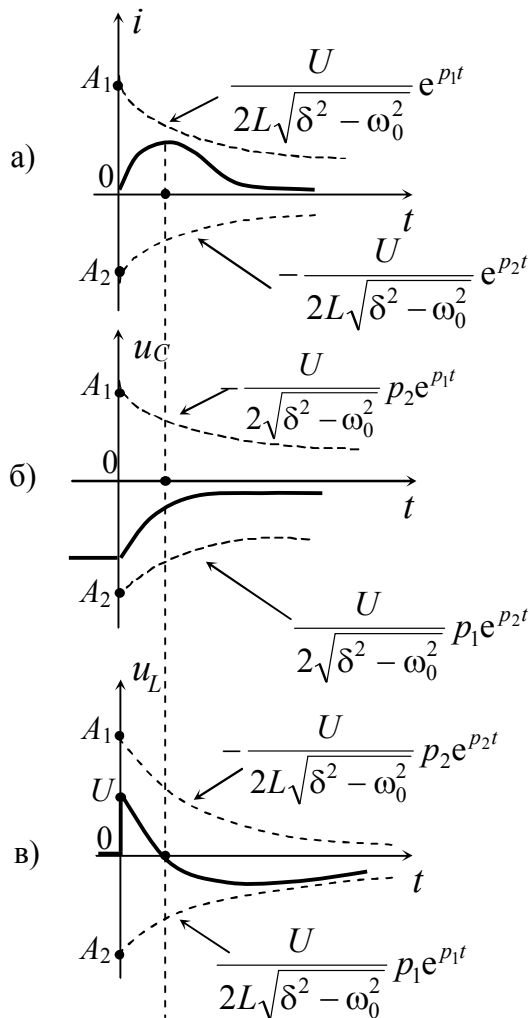


Рисунок 1.17 – Приблизні часові діаграми:
а – струму контура; б – напруги ємності;
в – напруги індуктивності

На рис. 1.17 зображено часові діаграми струму i (а), напруги u_C (б) й напруги u_L (в) у перехідному режимі. Графіки побудовано за виразами (1.36), (1.37) та (1.38) відповідно.

Критичний режим. Умовою критичного режиму є співвідношення (1.32), з якого випливає $R = R_{кр}$. При цьому вільна складова $i_{в}$ визначається як

$$i_{в}(t) = (B_1 + B_2 t) e^{pt},$$

де B_1 та B_2 – невідомі сталі інтегрування, які можна визначити аналогічно до того, як це виконано в аперіодичному перехідному режимі:

$$B_1 = 0; \quad B_2 = \frac{U}{L}. \quad (1.39)$$

З урахуванням (1.39) вираз для струму i у перехідному режимі матиме вигляд

$$i = i_{в} = \frac{U}{L} t e^{-\delta t}; \quad (1.40)$$

напруга на резисторі R

$$u_R = iR = \frac{UR}{L} t e^{-\delta t};$$

напруга на індуктивності L

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U e^{-\delta t} (1 - \delta t); \quad (1.41)$$

напруга на ємності C

$$u_C = u_R + u_L = Ue^{-\delta t}(1 + \delta t). \quad (1.42)$$

Графіки, побудовані за виразами (1.40)...(1.42), є аналогічні до тих самих графіків, побудованих в аперіодичному режимі.

Коливальний режим. Умовою коливального режиму є умова (1.33), яку можна перетворити на

$$R < R_{кр}.$$

У цьому разі корені p_1 та p_2 є (1.34) комплексно-спряженими, вираз $\sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ перетвориться на $\pm j\omega_B$, а вільну складову i_B (1.29) зручніше подати в такий спосіб:

$$\begin{aligned} i_B &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = \frac{U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \\ &= \frac{U}{2L j\omega_B} (e^{(-\delta + j\omega_B)t} - e^{(-\delta - j\omega_B)t}) = \frac{U}{2j\omega_B L} (e^{-\delta t} e^{j\omega_B t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega_B t}) = \\ &= \frac{U e^{-\delta t}}{2j\omega_B L} (e^{j\omega_B t} - e^{-j\omega_B t}) = \frac{U e^{-\delta t}}{2j\omega_B L} 2j \sin \omega_B t = \frac{U e^{-\delta t}}{\omega_B L} \sin \omega_B t = I e^{-\delta t} \sin \omega_B t, \end{aligned}$$

де

$$I = \frac{U}{\omega_B L}.$$

Оскільки $i_{пр} = 0$, то струм у контурі

$$i(t) = i_B(t) = I e^{-\delta t} \sin \omega_B t. \quad (1.43)$$

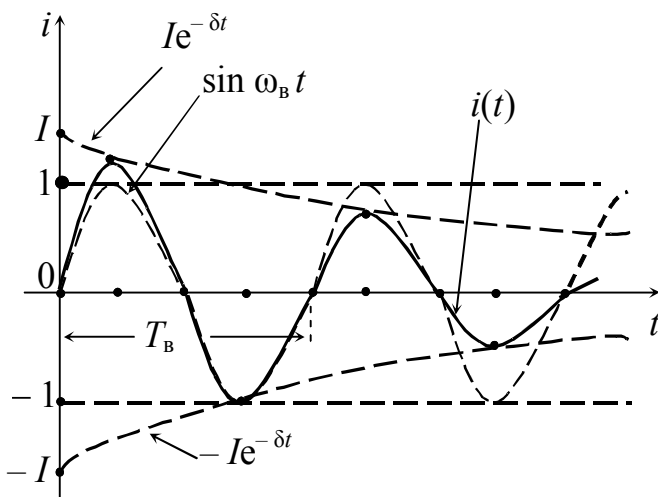


Рисунок 1.18 – Квазігармонічне колювання

Напругу на ємності C (див. рис. 1.16, б) можна дістати також з виразу (1.38), записаного для аперіодичного режиму, перетворивши його на іншу форму аналогічно до того, як це зроблено тут для струму i .

Ці перетворення пропонуємо виконати самостійно.

У такий самий спосіб можна дістати вирази для u_R та u_L .

Виразові (1.43) відповідає графік струму $i(t)$ (рис. 1.18).

Графік струму i являє собою “загасаючу” синусоїду, оскільки це

є загасаюча функція з періодичним повторенням нулів. Тому є сенс говорити про період зміни струму $i(t)$. Цей період має назву *період вільних коливань* T_B , причому:

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}.$$

Сама власне функція $i(t)$ не є строго періодичною, тому що амплітуди не залишаються незмінними в наступних періодах. Таку функцію можна називати *квазіперіодичною*.

Проаналізуємо, у скільки разів зміниться величина струму i через $t = T_B$. Для цього порівняємо два значення струму i :

$$\frac{i(t)}{i(t + T_B)} = \frac{Ie^{-\delta t} \sin \omega_B t}{Ie^{-\delta(t + T_B)} \sin(\omega_B t + T_B)} = e^{\delta T_B}.$$

Величину $e^{\delta T_B}$ називають *декрементом коливання* Δ :

$$\Delta = e^{\delta T_B}. \quad (1.44)$$

Декремент коливання Δ характеризує швидкість спадання процесу через T_B , а коефіцієнт загасання δ показує залежність спадання процесу від величини опору R (чим більше R , тим швидше процес).

Якщо прологарифмувати вираз (1.44), то дістанемо:

$$\ln e^{\delta T_B} = \delta T_B, \quad (1.45)$$

Добуток δT_B називають *логарифмічним декрементом коливання*.

Наприкінці слід відзначити, що зі зростанням порядку кола істотно зростають труднощі визначання сталих інтегрування. Тому для розрахунку перехідних процесів у колах вищих за другий порядок користуються іншими методами розрахунку.

Алгоритм аналізу електричного кола класичним методом

- 1 Визначають незалежні початкові умови кола, за $t < 0$ („старий” стаціонарний режим).
- 2 Визначають примушену складову розв’язку, за $t \rightarrow \infty$ („новий” стаціонарний режим).
- 3 Записують повний розв’язок шуканої функції (струм i_L чи напруга u_C) згідно з (1.4) у перехідному режимі.
- 4 Визначають вільну складову розв’язку згідно з (1.8) чи (1.42), залежно від того, якого порядку є коло та якого типу є режим у колах другого порядку.
- 5 На підставі пунктів 2 та 4 записують повний розв’язок шуканої функції.
- 6 За допомогою законів Кірхгофа й Ома визначають інші струми та напруги кола (за потреби).
- 7 Здійснюють розрахунок та побудову часових діаграм.

1.3 Часові функції електричних кіл

1.3.1 Види часових функцій

Перехідна функція кола $h(t)$. *Перехідною функцією $h(t)$* називають відгук кола на вплив у вигляді одиничної східчастої функції $1(t)$ (функція Хевісайда).

Залежно від типу впливу й відгуку кола перехідна функція кола $h(t)$ може бути чотирьох видів:

- 1 $h_{uu}(t)$ – перехідна функція напруги, величина безрозмірна;
- 2 $h_{ui}(t)$ – перехідний опір кола, має розмірність Ом;
- 3 $h_{iu}(t)$ – перехідна провідність кола, має розмірність сименс (См);
- 4 $h_{ii}(t)$ – перехідна функція струму, величина не має розмір.

Імпульсна функція кола $g(t)$. *Імпульсною функцією кола $g(t)$* називають відгук кола на вплив у вигляді δ -функції (функція Дірака) $\delta(t)$. Відповідно до рисунку

1.19 можна записати:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{за } t=0; \\ 0, & \text{за } t \neq 0. \end{cases} \quad (1.46)$$

Імпульсна функція $g(t)$ також буває чотирьох видів залежно від типу впливу та відгуку кола:

$g_{uu}(t)$, $g_{ui}(t)$, $g_{iu}(t)$ и $g_{ii}(t)$.

Зв'язок поміж перехідною та імпульсною функціями кола. δ -імпульс $\delta(t)$ є похідною одиничної східчастої функції:

$$\delta(t) = 1'(t), \quad (1.47)$$

хоча це твердження потребує спеціального доведення [1].

Через лінійність електричних кіл та вираз (1.47) є підстава вважати, що імпульсну функцію може бути дістано як похідну перехідної функції:

$$g(t) = h'(t) + h(0). \quad (1.48)$$

Цією формулою користуються, якщо перехідна функція $h(0) \neq 0$. Якщо $h(0) = 0$, то $g(t) = h'(t)$.

Формула (1.48) відбиває зв'язок поміж перехідною та імпульсною функціями кола, а також дозволяє визначати імпульсну функцію $g(t)$ за відомою перехідною функцією $h(t)$. Задля віднайдення перехідної функції $h(t)$ можна використовувати як класичний, так і операторний методи.

Для побудови графіка імпульсної функції багато авторів [1, 4] рекомендують нормувати імпульсну функцію; оскільки δ -імпульс $\delta(t)$ має розмірність с^{-1} , нормування здійснюють за часом. Приклади розглянуто в додатку Б.

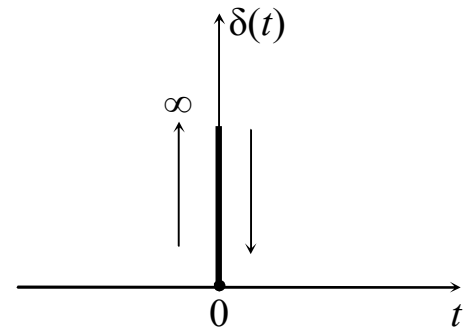


Рисунок 1.19 – Зображення δ -функції

1.3.2 Визначання відгуку методом накладання

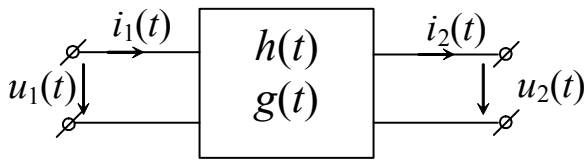


Рисунок 1.20 – Тракт передачі з часовими параметрами

Відомо, що будь-який тракт передачі можна подати у вигляді чотириполюсника, на вхід якого надходить інформаційний сигнал. Пройшовши через тракт, цей сигнал з'являється на виході. На практиці найчастіш треба визначити параметри сигналу на виході (відгуку). Щоби визначити параметри відгуку треба знати (визначити) властивості тракту передачі. За часового аналізування кіл всі функції (вхідні, вихідні) є функціями часу (t) (рис. 1.20).

Якщо $u_1(t) = 1(t)$, то $u_2(t) \equiv h(t)$ – за означенням; якщо $u_1(t) = U_1 \cdot 1(t)$, то через лінійність кола $u_2(t) = U_1 \cdot h(t)$. У такий спосіб відгук можна визначати,

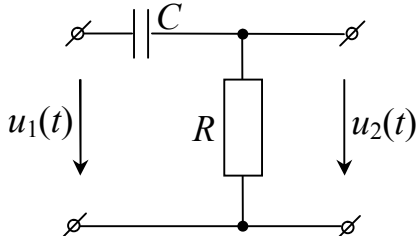


Рисунок 1.21 – RC чотириполюсник

знаючи перехідну функцію кола. Якщо впливом є

складна функція $u_1(t) = \sum_{k=0}^n U_{1k}(t - t_k)$, то, виходячи

з лінійності кіл, можна застосовувати засаду суперпозиції й записати відгук як суму відгуків на кожний елементарний вплив:

$$u_2(t) = \sum_{k=0}^n U_{1k}(t - t_k) h(t - t_k). \quad (1.49)$$

Покажемо це на простому прикладі.

Приклад 1. Визначити відгук кола рис. 1.21 на сигнал у вигляді П-подібного імпульсу напруги рис. 1.22 (відеоімпульс):

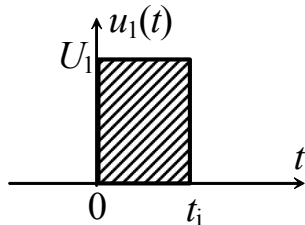


Рисунок 1.22 – Відеоімпульс

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ U_1, & 0 \leq t \leq t_i; \\ 0, & t > t_i. \end{cases}$$

Розв'язок

1 Визначимо перехідну функцію напруги $h_{uu}(t)$ кола рис. 1.21. За означенням $h_{uu}(t)$ – це відгук $u_2(t)$ за $u_1(t) = 1(t)$. Можна скористатися класичним методом.

У прикладі 3 (див. п. 1.2.1) $u_R(t) = U e^{-\frac{t}{\tau}}$ (див. (1.24)). Якщо покласти $U = U_1 = 1$, то

$$u_R(t) \equiv h_{uu}(t) = 1 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де $\tau = \frac{1}{RC}$ – стала часу кола. Покладемо $t_i = \tau$.

2 Виходячи з виразу (1.49), можна визначити відгук $u_2(t)$, застосувавши метод накладання. Вплив у вигляді П-імпульсу можна подати як суму двох східчастих по-різному полярних функцій, зміщених у часі на інтервалі t_i рис. 1.23:

$$u_1^{(1)}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ U_1, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_1^{(2)}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_i; \\ -U_1, & t \geq t_i. \end{cases}$$

$$u_1(t) = u_1^{(1)}(t) + u_1^{(2)}(t) = U_1(t) - U_1(t - t_i).$$

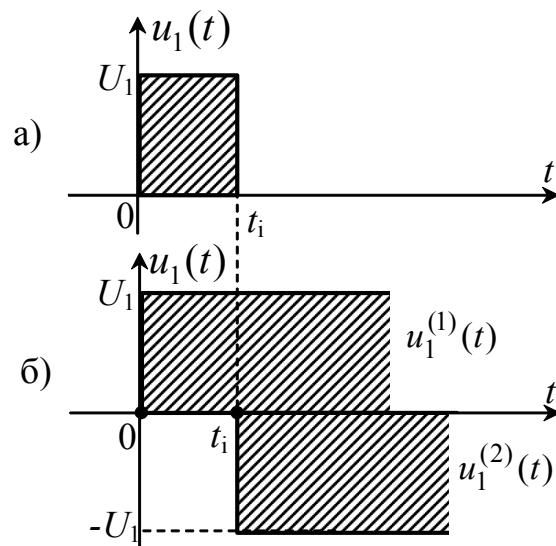


Рисунок 1.23 – П-подібний імпульс (а) та його подання у вигляді двох східчастих функцій (б)

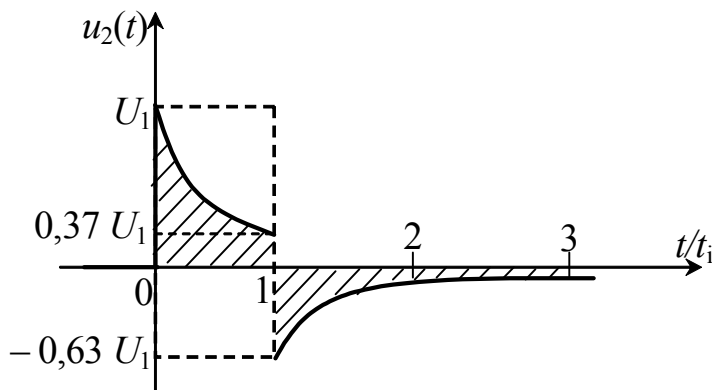


Рисунок 1.24 – Часова діаграма відгуку кола рис. 1.23 на П-імпульс

Відгук $u_2(t)$ міститиме дві складові:

1) за $0 \leq t \leq t_i$

$$u_2(t) = U_1 h(t) = U_1 e^{-\frac{t}{\tau}};$$

2) за $t > t_i$

$$u_2(t) = U_1 h(t) - U_1 h(t - t_i),$$

$$\text{де } h(t - t_i) = 1 e^{-\frac{t-t_i}{\tau}} = e^{-\frac{t}{\tau} + \frac{t_i}{\tau}}.$$

Тоді

$$u_2(t) = U_1 e^{-\frac{t}{\tau}} - U_1 e^{-\frac{t}{\tau} + \frac{t_i}{\tau}} = U_1 e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{\frac{t_i}{\tau}}) = U_1 e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^1) =$$

$$= U_1 e^{-\frac{t}{\tau}} (-1,72) = -1,72 U_1 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Часова діаграма відгуку $u_2(t)$ складатиметься із двох частин для двох часових інтервалів відповідно (див. вище). Якщо покласти $t_i = \tau$ приблизний вигляд відгуку буде зображено на рис. 1.24.

Пропонується самостійно зробити розрахунки, обравши числові значення параметрів кола (R та C) рис. 1.21 та впливу U_1 .

1.3.3 Визначання відгуку за довільних впливів

Задля визначання відгуку кола на сигнал довільної форми застосовують інтеграли накладання (Дюамеля).

Метод інтеграла Дюамеля доцільно застосовувати, якщо легко визначити перехідну функцію кола, а функція, що впливає, має гладку форму (рис. 1.25).

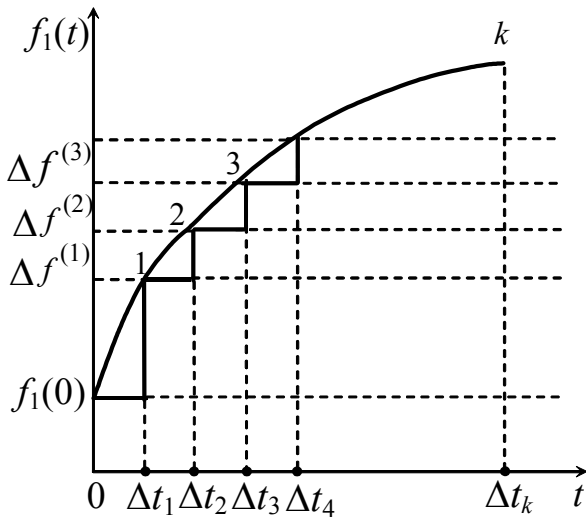


Рисунок 1.25 – Довільний вплив

Задля діставання формули інтеграла Дюамеля подамо вплив у вигляді суми ступінчастих впливів, зсунутих один від одного на час Δt .

Тоді $f_1(t)$ можна записати у вигляді

$$f_1 \cong f_1(0) \cdot 1(t) + \Delta f^{(1)} \cdot 1(t - \Delta t) + \Delta f^{(2)} \cdot 1(t - 2\Delta t) \dots \Delta f^{(k)} \cdot 1(t - k\Delta t), \quad (1.50)$$

де $f_1(0)$ – стрибок функції за $t = 0$; $\Delta f^{(k)} \cdot 1(t - k\Delta t)$ – величина стрибка, при $t = t - k\Delta t$;

Відгук кола на стрибок визначається за формулою

$f_2(t) = f_1(t) \cdot h(t)$, тому відгук кола на вплив $f_1(t)$ можна віднайти на підставі засади накладання:

$$f_2(t) = f_1(0) \cdot h(t) + \Delta f^{(1)} \cdot h(t - \Delta t) + \Delta f^{(2)} h(t - 2\Delta t) + \dots$$

$$\dots \Delta f^{(n)} h(t - n\Delta t) = f_1(0) \cdot h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta f^{(k)} h(t - k\Delta t).$$

Якщо прийняти $\Delta t \rightarrow 0$, то $k\Delta t$, замість дискретного стає неперервним (тобто $k\Delta t = t_k$), операція підсумовування перетворюється на операцію інтегрування за змінною t , а $\Delta f^{(k)}$ – на похідну $f_1'(t)$.

Зробивши відповідну заміну, дістанемо [1]

$$f_2(t) = f_1(0) \cdot h(t) + \int_{x=0}^t f_1'(x) \cdot h(t - x) dx. \quad (1.51)$$

Існують інші форми запису інтеграла Дюамеля, які використовують заміну змінної:

$$f_2(t) = f_1(0) h(t) + \int_{x=0}^t f_1'(t - x) \cdot h(x) dx; \quad (1.51a)$$

$$f_2(t) = f_1(t) h(0) + \int_{x=0}^t f_1(x) \cdot h'(t - x) dx; \quad (1.51б)$$

$$f_2(t) = f_1(t) h(0) + \int_{x=0}^t f_1(t - x) \cdot h'(x) dx. \quad (1.51в)$$

Якщо вплив $f_1(t)$ – неперіодичний сигнал і має розриви першого роду, то в інтегралах Дюамеля (1.51) і в інших формах запису додаються доданки, які відбивають впливи розривів. Наприклад, нехай сигнал $f_1(t)$ при $t = t_1$ має розрив першого роду. У цьому разі відгук записують для окремих інтервалів неперервності впливу $f_1(t)$:

1) за $0 \leq t < t_1$ відгук кола має вигляд

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_{x=0}^{t_1} f_1'(x)h(t_1 - x)dx; \quad (1.52)$$

2) за $t \geq t_1$ відгук кола має вигляд

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_{x=0}^{t_1} f_1'(x) \cdot h(t_1 - x)dx - f_1(t_1) \cdot h(t - t_1). \quad (1.53)$$

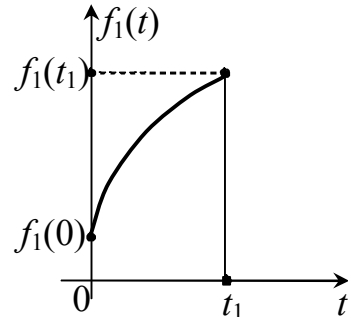


Рисунок 1.26 – Сигнал з розривом

У правій частині виразу (1.53) третій доданок $-f_1(t_1) \cdot h(t - t_1)$ має від'ємний знак, тому що стрибок (розрив першого роду) впливу $f_1(t)$ за $t = t_1$ спрямовано донизу. За стрибків впливу, спрямованих догори, подібні доданки повинні бути додатними.

1.3.4 Диференціальні та інтегровальні кола

Диференціальні кола (ДК) і інтегровальні кола (ІК) широко застосовуються в радіотехнічних пристроях, в імпульсній техніці та системах телекомунікації.

Коло називають **диференціальним**, якщо відгук $u_2(t)$ є пропорційний до похідної від прикладеного до кола впливу $u_1(t)$: $u_2(t) \cong \alpha_1 \cdot u_1'(t)$.

Коло називають **інтегровальним**, якщо відгук $u_2(t)$ є пропорційний до інтеграла від прикладеного до кола впливу $u_1(t)$: $u_2(t) \cong \alpha_2 \int u_1(t)dt$.

Коефіцієнти α_1 й α_2 залежать від елементів кола. Проаналізуємо найпростіше ДК (рис. 1.27). Диференціювання виконується за умови:

$$\frac{1}{\omega C} \gg R.$$

Тоді напруга на ємності $u_C(t) \approx u_1(t)$, а струм у ємності $i_C = C \frac{du_C(t)}{dt}$.

Напругу $u_2(t)$ віднайдемо за законом Ома:

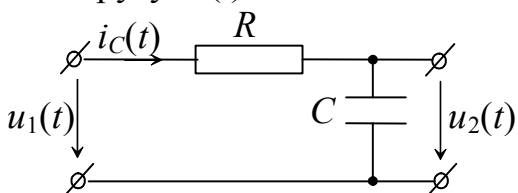


Рисунок 1.28 – Інтегровальне коло

$$u_2(t) = i_C(t)R = RC \frac{du_C(t)}{dt} \cong RC \frac{du_1(t)}{dt}. \quad (1.54)$$

Згідно з (1.54), відгук кола $u_2(t)$ є насправді пропорційний до похідної від прикладеного впливу $u_1(t)$ з коефіцієнтом пропорційності α_1 , який дорівнює сталій часу

розглянутого ДК:

$$\alpha_1 = RC.$$

Проаналізуємо найпростіше інтегрувальне коло (рис. 1.28). Інтегрування виконується за умови $R \gg \frac{1}{\omega C}$. Тоді струм у колі $i_C(t) \cong \frac{u_1(t)}{R}$, а напруга на ємності визначається за формулою:

$$u_C(t) = u_2(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \cong \frac{1}{RC} \int u_1(t) dt. \quad (1.55)$$

Згідно з (1.55), відгук кола $u_2(t)$ є насправді пропорційний до інтеграла від прикладеного впливу $u_1(t)$ з коефіцієнтом пропорційності α_2 , який дорівнює зворотній до сталої часу розглянутого ІК:

$$\alpha_2 = \frac{1}{RC}.$$

Отже, чим менш є стала часу ДК, тим якісніше виконується диференціювання вхідного сигналу (впливу); чим більше є стала часу ІК, тим якісніше виконується інтегрування вхідного сигналу.

Окрім розглянутих кіл, операції диференціювання та інтегрування можуть виконувати також кола, які містять індуктивність (рис. 1.29).

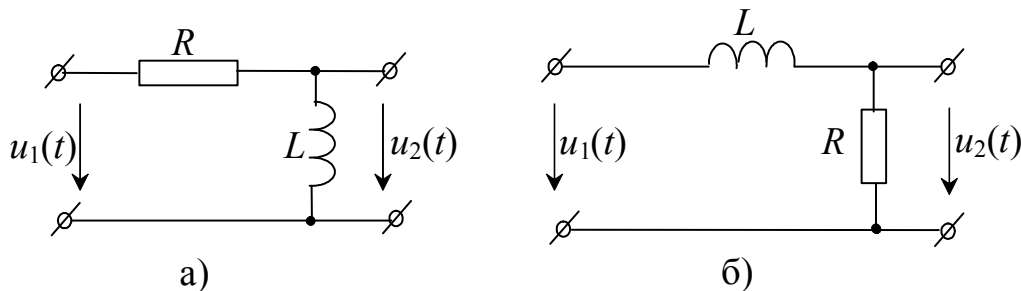


Рисунок 1.29 – Диференціовальне (а) та інтегрувальне (б) кола

На рис. 1.29, а зображено ДК з коефіцієнтом пропорційності α_1 , який дорівнює сталій часу кола:

$$\alpha_1 = \frac{L}{R}.$$

На рис. 1.29, б зображено ІК з коефіцієнтом пропорційності α_2 , який дорівнює величині, оберненій до сталої часу кола:

$$\alpha_2 = \frac{R}{L}.$$

2 ОПЕРАТОРНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Аналіз електричних кіл класичним методом зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь. Основні труднощі такого аналізу полягають у визначенні сталих інтегрування. У разі ускладнення кіл і зростання порядку

диференціальних рівнянь труднощі, пов'язані з визначенням сталих інтегрування, збільшуються.

Значно більші можливості має операторний метод аналізу перехідних процесів. Операторний метод, так само, як і метод комплексних амплітуд, належить до символічних методів. Сутність операторного методу полягає в тому, що розв'язування завдання аналізу кола переноситься з області функцій дійсної змінної t до області функцій комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$. Внаслідок цього система інтегро-диференціальних рівнянь змінної t замінюється системою алгебричних рівнянь комплексної змінної p . Далі за отриманим результатом розв'язування алгебричних рівнянь виконується обернений перехід до області функцій дійсної змінної. Базується операторний метод на перетвореннях Лапласа.

2.1 Пряме перетворення Лапласа та його властивості

Нехай для певної функції часу $f(t)$ (струму чи напруги) виконуються такі умови:

- 1) $f(t) = 0$ за $t < 0$;
- 2) функція $f(t)$ зростає не швидше за певну функцію $M e^{\sigma_0 t}$, тобто

$$|f(t)| < M e^{\sigma_0 t},$$

де $M > 0$, $\sigma_0 \geq 0$ (додатні сталі числа). Узвичаєно вважати, що функція має обмежене зростання, якщо показник зростання σ_0 кінцевий.

З курсу математичного аналізу відомо, що, якщо $f(t)$ має обмежене зростання, інтеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (2.1)$$

збігається абсолютно і є аналітичною функцією комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$ у півплощині $\text{Re}[p] = \sigma > \sigma_0$ (рис. 2.1).

Інтегральне рівняння (2.1) є **прямим перетворенням Лапласа**; функція $f(t)$ називається **оригіналом**, а $F(p)$ – **зображенням за Лапласом**.

У літературі використовують такі символи, що вони пов'язують оригінал з його зображенням:

$$L[f(t)] = F(p);$$

$$f(t) \Leftrightarrow F(p);$$

$$f(t) \doteq F(p).$$

За аналізуванням перехідних процесів часто вважають, що певного моменту часу, прийнятого за **початок відліку** ($t = 0$), в електричне коло вмикається джерело незмінної, гармонічної чи іншої форми напруги (струму).

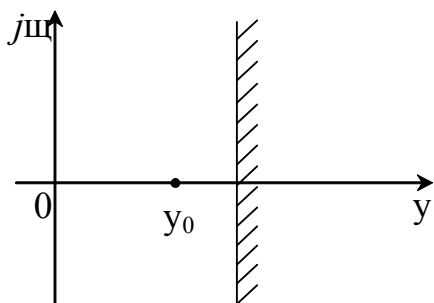


Рисунок 2.1 – Комплексна площина

Позначимо цю напругу (струм) функцією $f(t)$. Для всіх значень $t < 0$ функція $f(t)$ приймається дорівнюванню нулеві.

Розглянемо найпростіші оригінали.

Одинична східчаста функція $[f(t)=1(t)]$

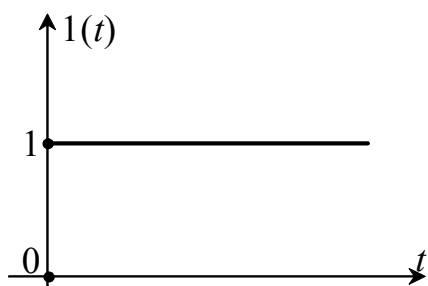


Рисунок 2.2 – Діаграма функції $1(t)$

Графічне подання одиничної східчастої функції наведено на рис. 2.2. Аналітичне:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{за } t \geq 0; \\ 0 & \text{за } t < 0. \end{cases}$$

Одинична східчаста функція відбиває вмикання незмінної напруги, яка дорівнює 1 В (або незмінного струму, який дорівнює 1 А) у момент $t = 0$.

Згідно з (2.1), зображення одиничної східчастої функції має вигляд

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Отже,

$$1(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p}. \quad (2.2)$$

Зображення сталої A , яка виникає в момент часу $t = 0$, легко віднайти, якщо подати її за допомогою одиничної функції, як $f(t) = A \cdot 1(t)$.

Тоді

$$f(t) = A \cdot 1(t) \Leftrightarrow \frac{A}{p}. \quad (2.3)$$

Експоненційна функція $[f(t) = e^{at}]$

Множення будь-якої функції часу на одиничну функцію залишає першу без зміни за $t > 0$ і дає нульове значення за $t < 0$.

Приміром, помноживши функцію e^{at} на одиничну функцію, дістають функцію-оригінал

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{за } t \geq 0; \\ 0 & \text{за } t < 0. \end{cases}$$

Нехай a – довільне число. Тоді зображення цього оригіналу є

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \left. -\frac{e^{-(p-a)t}}{(p-a)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}.$$

Отже,

$$e^{at} \Leftrightarrow \frac{1}{p-a}. \quad (2.4)$$

Операціям над оригіналами відповідають операції над зображеннями й навпаки. Застосовування властивостей перетворення Лапласа істотно спрощує ці операції (надто на етапі визначання шуканого оригіналу за обчисленим зображенням). Головні властивості перетворення Лапласа, відомі з курсу

математичного аналізу, доволі широко наведено в рекомендованій літературі. Далі буде розглянуто ті з властивостей, які використовуються при аналізі електричних кіл. Це:

1 Множення функції часу $f(t)$ на сталие число A відповідає множенню на це саме число її зображення:

$$A \cdot f(t) \Leftrightarrow A \cdot F(p). \quad (2.5)$$

2 Зображення лінійної комбінації оригіналів є лінійна комбінація зображень

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k F_k(p). \quad (2.6)$$

При аналізі перехідних процесів надто важливі є перетворення, пов'язані з диференціюванням та інтегруванням оригіналів (теореми диференціювання й інтегрування).

3 За теоремою диференціювання

$$f'(t) \Leftrightarrow pF(p) - f(0). \quad (2.7)$$

У разі, коли оригінал у початковій точці є неперервний, тобто $f(0) = f(0_-) = 0$, його диференціюванню відповідає операція множення зображення на p :

$$f'(t) \Leftrightarrow pF(p). \quad (2.8)$$

Повторне застосування операції, поданої формулою (2.8), дає зображення похідні функції $f(t)$ вищих порядків, тобто n -разовому диференціюванню оригіналу відповідає n -разове множення зображення на p (якщо всі похідні за $t = 0$ дорівнюють нулеві):

$$f^n(t) \Leftrightarrow p^n F(p). \quad (2.9)$$

4 За теоремою інтегрування

$$\int_0^t f(t) dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}. \quad (2.10)$$

Повторне застосування операції, поданої формулою (2.10), дає:

$$\int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^n \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p^n}. \quad (2.11)$$

Відповідно до теорем диференціювання й інтегрування комплексну змінну p можна розглядати як оператор (звідси назва **операторний метод**).

5 За теоремою запізнювання (зсуву в області дійсної змінної):

$$f(t - t_3) \Leftrightarrow e^{-pt_3} F(p). \quad (2.12)$$

З (2.12) виходить, що множення зображення на e^{-pt_3} зсуває оригінал $f(t)$ по осі часу праворуч на t_3 .

6 Теорема зсуву (зсув в області комплексної змінної):

$$e^{\pm \alpha t} f(t) \Leftrightarrow F(p \mp \alpha). \quad (2.13)$$

Множення оригіналу на функцію $e^{\pm at}$ відповідає зсувові зображення на комплексній площині на $\mp a$. При цьому a може набувати як дійсне, так і комплексне значення.

7 Теорема множення зображень (теорема згортання)

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \Leftrightarrow \int_{x=0}^{t_k} f_1(x) f_2(t_k - x) dx. \quad (2.14)$$

З (2.14) виходить, що множенню в області комплексної змінної відповідає згортання в області дійсної змінної.

8 Граничні співвідношення:

початкове значення оригіналу:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p); \quad (2.15)$$

кінцеве значення оригіналу:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (2.16)$$

Граничні співвідношення (2.15) та (2.16) використовуються для перевірки обчислень за допомогою перетворень Лапласа.

2.2 Обернене перетворення Лапласа. Теорема розкладання

Розв'язок інтегрального рівняння (2.1) щодо функції $f(t)$ дає обернене перетворення Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (2.17)$$

За використання оберненого перетворення Лапласа (2.17) було здобуто оригінали деяких зображень, наведених в довідкових таблицях з операційного обчислювання в рекомендованій літературі, які містять пари оригінал-зображення.

Фрагмент одної з таких таблиць для найчастіш використовуваних при аналізі функцій являє наведена нижче таблиця 2.1, дані якої буде використано далі при розв'язуванні прикладів аналізу ПП операторним методом.

Таблиця 2.1 – Таблиця перетворень Лапласа (фрагмент)

№ пп.	$f(t)$ -оригінал	$F(p)$ -зображення
1	$A(t) = \text{const}$	$\frac{A}{p}$
2	$Ae^{\mp at}$	$\frac{A}{p \pm a}$
3	$\frac{A}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{A}{p(p + a)}$

Продовження таблиці 2.1

4	$\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
5	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$

Теорема розкладання

Задля віднайдення оригіналу $f(t)$ за зображенням $F(p)$ можна скористатися таблицею 2.1, якщо зображення є вельми прості і є в таблиці. Якщо ж здобути внаслідок аналізу операторним методом зображення відсутнє в таблицях, то його відшукують за допомогою теореми розкладання. Зазвичай такі зображення являють собою дрібно-раціональні функції.

Дрібно-раціональними називаються функції комплексної змінної p з дійсними коефіцієнтами:

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{(m-1)} p^{(m-1)} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{(n-1)} p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (2.18)$$

Будь-яку дрібно-раціональну функцію може бути подано в такий спосіб:

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{(m-1)} p^{(m-1)} + \dots + b_1 p + b_0}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (2.19)$$

Нехай зображення за Лапласом $F(p)$ певної шуканої функції $f(t)$ є правильною дрібно-раціональною функцією з дійсними коефіцієнтами й простими полюсами. Тоді функція $F(p)$ може бути в єдиний спосіб розкладена на суму простих дробів:

$$F(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}. \quad (2.20)$$

Оригіналом цього зображення (див. рядок 2 табл. 2.1) є сума експонентних функцій:

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (2.21)$$

Визначення коефіцієнтів $A_1, A_2, \dots, A_n$ пропонується простежити на прикладі одержання коефіцієнта A_1 . Для цього обидві частини виразу (2.20) помножують на $(p - p_1)$.

Тоді

$$(p - p_1)F(p) = A_1 + (p - p_1) \left(\frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} \right).$$

За $p \rightarrow p_1$

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1)F(p) = \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1) \frac{M(p)}{N(p)}.$$

В останньому виразі множник $(p - p_1)$ і знаменник $N(p)$ в одночас наближаються до нуля за $p \rightarrow p_1$. Ця непеність розкривається за правилом Лопітала. У результаті

$$A_1 = M(p_1) \frac{\frac{d}{dp}(p - p_1)}{\frac{d}{dp} N(p)} \Big|_{p=p_1} = \frac{M(p_1)}{N'(p_1)}.$$

Вочевидь, що кожний інший коефіцієнт визначатиметься за виразом

$$A_k = \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}.$$

Отже, оригінал (певна шукана функція струму чи напруги) матиме вигляд:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.22)$$

Враховуючи відповідність виразів (2.19) та (2.22), можна записати:

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{(m-1)} p^{(m-1)} + \dots + b_0}{\alpha_n p^n + \alpha_{(n-1)} p^{(n-1)} + \dots + \alpha_0} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.23)$$

Якщо знаменник функції $F(p)$ має один корінь, дорівнюваний нулеві, то оригінал $f(t)$ визначається у такий спосіб:

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(p)}{p N_1(p)} \Leftrightarrow \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.24)$$

У літературі найчастіш вирази (2.23) і (2.24) називають **формулами розкладання**.

2.3 Закони теорії електричних кіл в операторній формі.

Схеми заміщення двополюсних елементів

Оскільки сумі функцій оригіналів відповідає сума зображень цих функцій, то від запису рівнянь за законами Кірхгофа, складених для миттєвих значень струмів та напруг (оригіналів), легко перейти до запису рівнянь за тими ж законам для зображень струмів та напруг:

$$\sum_{k=1}^N I_k(p) = 0; \quad (2.25)$$

й

$$\sum_{k=1}^N U_k(p) = 0. \quad (2.26)$$

Вирази (2.25) та (2.26) називають законами Кірхгофа в операторній формі. За аналогією з поняттями комплексного входного опору $Z(j\omega)$ та комплексної входної провідності $Y(j\omega)$ вводиться поняття операторного входного опору $Z(p)$ та операторної входної провідності $Y(p)$.

Операторним входним опором пасивного лінійного двополюсника називається відношення операторного зображення напруги на вході двополюсника до операторного зображення входного струму за нульових початкових умов:

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}. \quad (2.27)$$

Надалі замість терміну „операторне зображення струму (напруги)” використовуватиметься термін „зображення”.

В (2.27)

$$I(p) \Leftrightarrow i(t) \text{ та } U(p) \Leftrightarrow u(t)$$

– зображення струму й напруги на вході певного пасивного двополюсника за $t \geq 0$. Величина, обернена до $Z(p)$, є **операторною вхідною провідністю двополюсника**:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{I(p)}{U(p)}. \quad (2.28)$$

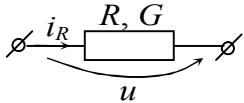
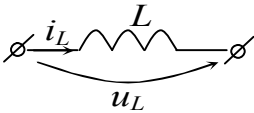
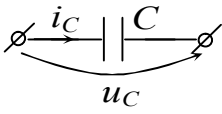
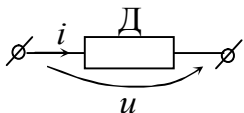
Операторні схеми заміщення ідеальних двополюсних елементів кола залежать від початкових умов кола.

За нульових початкових умов кола кожний пасивний лінійний двополюсник (R , L або C) подається власним операторним вхідним опором $Z(p)$ або операторною вхідною провідністю $Y(p)$.

У таблиці 2.2 подано операторні схеми заміщення ідеальних резисторів, ємностей і індуктивностей за нульових початкових умов кола.

Розглянемо операторні схеми заміщення ідеальних ємностей та індуктивностей, які перебувають у колах з ненульовими початковими умовами. У цьому разі операторні схеми заміщення ємності й індуктивності мають містити незалежні джерела напруги чи струму, які враховують початковий запас енергії в колі.

Таблиця 2.2 – Закон Ома в операторній формі для елементів R , L , C за нульових початкових умов

Елементи після комутації	$Z(p)$	$Y(p)$	$U(p)$	$I(p)$
	R	G	$I_R(p)R$	$U_G(p) G$
	pL	$1/pL$	$I_L(p) pL$	$U_L(p) (1/pL)$
	$1/pC$	pC	$I_C(p) (1/pC)$	$U_C(p) pC$
	$Z(p)$	$Y(p)$	$I(p) Z(p)$	$U(p) Y(p)$

Ємність. Миттєві значення струму й напруги ємності пов'язані співвідношеннями:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}; \quad u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt,$$

де $u_C(0) \neq 0$.

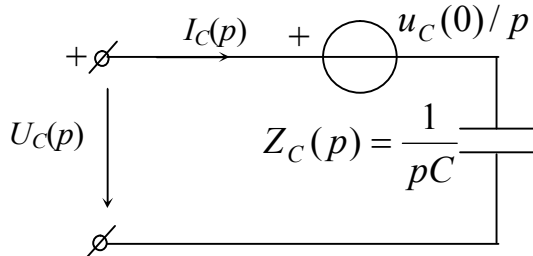


Рисунок 2.3 – Операторна схема заміщення зарядженої ємності з джерелом напруги

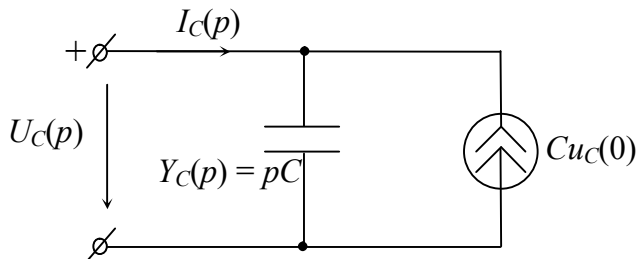


Рисунок 2.4 – Операторна схема заміщення ємності з джерелом струму

Застосовувавши теореми диференціювання (2.7) та інтегрування (2.10), дістаємо

$$U_C(p) = \frac{u_C(0)}{p} + \frac{1}{pC} I_C(p); \quad (2.29)$$

$$I_C(p) = pCU_C(p) - Cu_C(0). \quad (2.30)$$

За структурою формули (2.29) можна зобразити операторну схему заміщення ємності за ненульових початкових умов (рис. 2.3).

Схема, зображена на рис. 2.3, являє собою послідовне з'єднання „незарядженої” ємності (ємності за нульових початкових умов) з власним операторним опором $Z_C(p)$ та ідеальним незалежним джерелом напруги з напругою $u_C(0)/p$.

Рівнянню (2.30) відповідає операторна схема заміщення ємності (рис. 2.4), яка являє собою паралельне з'єднання ємності та ідеального незалежного джерела струму зі струмом $Cu_C(0)$.

Індуктивність. Миттєві значення струму й напруги індуктивності в колі з ненульовими початковими умовами пов'язані співвідношеннями

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}; \quad i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt,$$

де $i_L(0) \neq 0$.

Застосовувавши теореми диференціювання (2.7) та інтегрування (2.10), дістанемо:

$$U_L(p) = pL \cdot I_L(p) - Li_L(0); \quad (2.31)$$

$$I_L(p) = \frac{i_L(0)}{p} + \frac{1}{pL} u_L(p). \quad (2.32)$$

За структурами формул (2.31) та (2.32) можна зобразити відповідно дві операторні схеми заміщення індуктивності за ненульових початкових умов (рис. 2.5 та 2.6). Обидві схеми містять “незаряджені” індуктивності й незалежні ідеальні джерела.

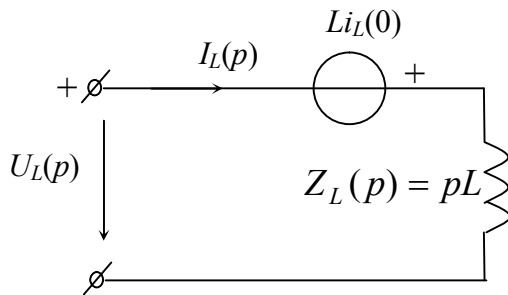


Рисунок 2.5 – Операторна схема заміщення індуктивності з джерелом напруги

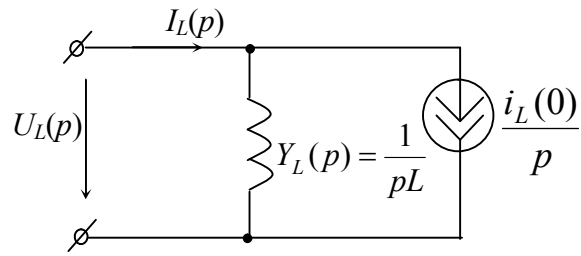


Рисунок 2.6 – Операторна схема заміщення індуктивності з джерелом струму

Використовуючи операторні схеми заміщення ідеальних пасивних елементів (R , L , C), можна побудувати операторну схему заміщення довільного кола. При цьому в операторній схемі заміщення містяться додаткові джерела енергії, які характеризують запас енергії в реактивних елементах (L , C) у момент часу $t(0_-)$ безпосередньо перед комутацією.

2.4 Операторні передавальні функції електричних кіл та їхні властивості

2.4.1 Види операторних передавальних функцій

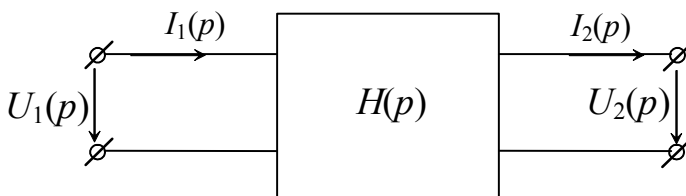


Рисунок 2.7 – Тракт передавання з операторними параметрами

Операторна передавальна функція (ОПФ) кола $H(p)$ являє собою відношення зображень відгуку кола до впливу (рис. 2.7).

Оскільки за впливи вважають напруги й струми на вході кола, а відгуки – на виході, відповідно можна записати чотири

види операторних передавальних функцій:

1 $H_{uu}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$ – ОПФ кола з напруги, це відношення зображення відгуку кола $U_2(p)$ у вигляді напруги до зображення впливу $U_1(p)$ у вигляді напруги; (2.33)

2 $H_{ui}(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)}$ – операторний опір кола – відношення зображення відгуку кола $U_2(p)$ у вигляді напруги до зображення впливу $I_1(p)$ у вигляді струму; (2.34)

3 $H_{ii}(p) = \frac{I_2(p)}{I_1(p)}$ – ОПФ струму – відношення зображень струмів на виході та вході кола;

(2.35)

4 $H_{iu}(p) = \frac{I_2(p)}{U_1(p)}$ – операторна провідність кола – відношення зображення

відгуку кола $I_2(p)$ у вигляді струму до зображення впливу $U_1(p)$ у вигляді напруги.

(2.36)

Операторні передавальні функції відіграють важливу роль у методах аналізу й синтезу електричних кіл за нульових початкових умов. Знаючи ОПФ кола $H(p)$, за допомогою виразів (2.33)...(2.36) нескладно віднайти зображення відгуку кола, а отже, й сам відгук кола на заданий вплив.

Операторну передавальну функцію $H(p)$ для пасивного кола можна подати як дрібно-раціональну функцію з дійсними коефіцієнтами.

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{(m-1)} p^{(m-1)} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{(n-1)} p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (2.37)$$

або у вигляді

$$H(p) = H \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0m})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}, \quad (2.38)$$

де $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0m}$ – нулі операторної передавальної функції $H(p)$. При підстановці нулів до виразу (2.38) операторна передавальна функція $H(p)$ обертається на нуль; $p_1, p_2, \dots, p_n$ – полюси операторної передавальної функції $H(p)$. При підстановці полюсів у вираз (2.38) значення $H(p)$ прагне до нескінченності.

У виразі (2.38) коефіцієнт

$$H = \frac{b_m}{a_n}.$$

Ступені полінома чисельника m та знаменника n залежать від кількості реактивних елементів кола.

Замінивши в (2.33)...(2.36) оператор p на $j\omega$, дістанемо комплексну передавальну функцію кола $H(j\omega)$. Отже, замінюючи $j\omega$ на p , можна автоматично здобути закони теорії електричних кіл та методи розрахунку в операторній формі.

2.4.2 Властивості операторних передавальних функцій

1 Операторна передавальна функція є дрібно-раціональною функцією з дійсними коефіцієнтами (2.37). Це пояснюється тим, що згадані коефіцієнти визначаються елементами кола.

2 Ступінь полінома чисельника не перевищує ступінь полінома знаменника: $m \leq n$.

3 Нулі й полюси операторної передавальної функції $H(p)$ є або дійсними числами, або комплексно-спряженими.

4 Полюси операторної передавальної функції пасивного кола розташовуються в лівій півплощині комплексної площини p . На розташування нулів обмежень немає.

Остання властивість стосується питань стійкості ЛЕК. Для стійких ЛЕК полюси операторної передавальної функції містяться у лівій півплощині (рис. 2.8).

Коло є **стійким**, якщо після припинення впливу джерела вільні коливання будуть загасальні: e^{pt} , де $p = -\sigma \pm j\omega$.

Якщо полюси операторної передавальної функції розташовано у правій півплощині рисунка 2.8, таке коло є **нестійким**: e^{pt} , де $p = +\sigma \pm j\omega$.

За уявних полюсів (полюси розташовані на осі уявних чисел), стан кола називають **умовно стійким**: e^{pt} , де $p = \pm j\omega$.

Задля виявлення стійкості кола існують методи, які називають **критеріями стійкості**. Їх викладено в підрозділі 2.6.

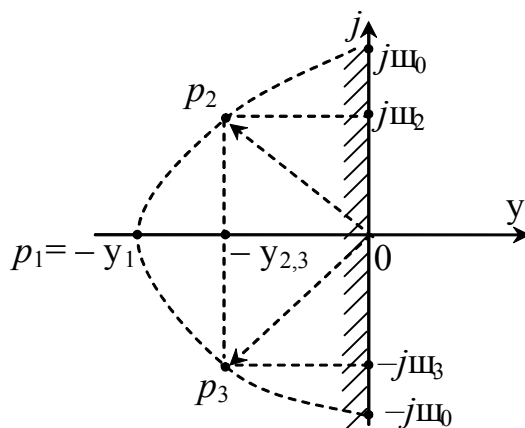


Рисунок 2.8 – Розташування полюсів стійкого кола

Алгоритм аналізу електричних кіл операторним методом

- 1 Визначаються незалежні початкові умови кола до комутації $i_L(0_-)$, $u_C(0_-)$.
- 2 Складається операторна схема заміщення кола після комутації.
- 3 Визначаються зображення вихідних струмів та напруг з використанням при цьому законів Ома та Кірхгофа в операторній формі, а також будь-яких відомих методів обчислення (метод законів Кірхгофа, метод вузлових напруг тощо) в операторній формі.
- 4 За здобутими зображеннями визначаються оригінали (шукані струми й напруги). Найчастіше при цьому використовуються таблиці відповідностей за Лапласом. Якщо ж зображення являє собою дрібно-раціональну функцію й відсутнє у таблицях, то для переходу до оригіналу варто застосовувати теорему розкладання (2.23), (2.24).

2.5 Зв'язок часових, частотних та операторних функцій кіл та сигналів

За означенням операторна передавальна функція

$$H(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)}, \quad (2.39)$$

де $X_2(p)$ – зображення відгуку кола ($U_2(p)$ чи $I_2(p)$);

$X_1(p)$ – зображення впливу кола ($U_1(p)$ чи $I_1(p)$).

З (2.39) виходить

$$X_2(p) = X_1(p) \cdot H(p). \quad (2.40)$$

Якщо за вплив на коло використовувати одиничну східчасту функцію $1(t)$, то її зображенням, згідно з (2.2), буде $F(p) = \frac{1}{p}$. При цьому відгуком кола буде перехідна функція $h(t)$, а її зображенням – $h(p)$. Тоді, згідно з (2.5) й таблицею перетворень Лапласа, матимемо:

$$h(t) \Leftrightarrow h(p) = \frac{1}{p} H(p). \quad (2.41)$$

Формула (2.41) відбиває зв'язок поміж перехідною функцією кола $h(t)$ і операторною передавальною функцією $H(p)$, а також дозволяє визначати перехідну функцію кола $h(t)$ за відомою операторною передавальною функцією $H(p)$. Застосовуючи теорему диференціювання (2.7), можна дістати зображення імпульсної характеристики кола $g(t)$.

Якщо

$$g(t) = h'(t), \text{ а } h(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p} H(p),$$

то

$$h'(t) \Leftrightarrow p \frac{1}{p} H(p) = H(p),$$

тобто

$$g(t) \Leftrightarrow H(p). \quad (2.42)$$

Вираз (2.42) дозволяє визначати імпульсну функцію кола $g(t)$ за відомою операторною передавальною функцією $H(p)$. Для цього доволі перейти від зображення $H(p)$ до оригіналу $g(t)$.

Комплексна й операторна функції пов'язані через оператори $p \equiv j\omega$. Якщо в

КПФ замінити $j\omega$ на p , то $H(j\omega)|_{j\omega=p} = H(p)$. Приміром, для кола першого порядку КПФ $H(j\omega)$ має вигляд

$$H(j\omega) = \frac{j\omega b_1 + b_0}{j\omega + a_0}.$$

Для цього ж кола ОПФ $H(p)$ має вигляд:

$$H(p) = \frac{pb_1 + b_0}{p + a_0}.$$

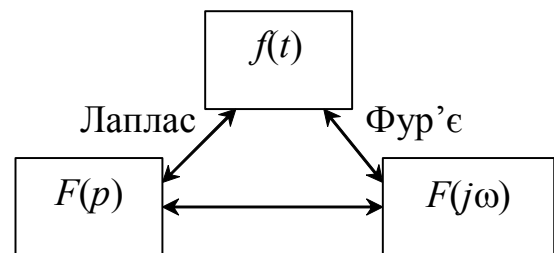


Рисунок 2.9 – Зв'язок функцій сигналу

Отже вочевидь, що частотні, операторні й часові функції кола пов'язані поміж собою (рис. 2.9 та 2.10).

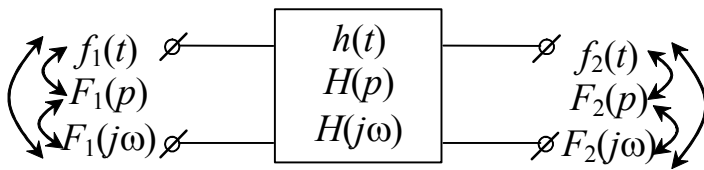


Рисунок 2.10 – Зв'язок функцій сигналу та кола

Застосувавши пряме перетворення Фур'є, можна дістати спектральну щільність одиничної східчастої функції $1(t)$:

$$1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega), \quad (2.43)$$

а відповідно до оберненого перетворення Фур'є:

$$1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.44)$$

Якщо підставити (2.43) в (2.44), то одержимо:

$$1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.45)$$

Вираз (2.45) можна (без доведення) перетворити на інший:

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.46)$$

Тоді, відповідно до засади суперпозиції (накладання) та виразу (2.46), дістанемо зв'язок поміж перехідною функцією кола $h(t)$ й комплексною передавальною функцією $H(j\omega)$:

$$h(t) = \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.47)$$

Використовуючи зв'язок поміж одиничною східчастою функцією $1(t)$ й функцією Дірака $\delta(t)$, можна (без доведення) зазначити, що

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.48)$$

Відповідно до засади суперпозиції можна довести зв'язок між імпульсною функцією $g(t)$ та комплексною передавальною функцією $H(j\omega)$:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.49)$$

Вираз (2.49) являє собою обернене перетворення Фур'є, де $H(j\omega)$ є спектральною щільністю імпульсної характеристики.

На підставі прямого перетворення Фур'є дістанемо

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j\omega t} dt. \quad (2.50)$$

Вирази (2.47)...(2.50) відбивають зв'язок поміж часовими й частотними функціями.

2.6 Аналіз кіл зі зворотним зв'язком. Критерії стійкості

2.6.1 Кола зі зворотним зв'язком

Розглянуті раніше методи аналізу електричних кіл (суперпозиції, вузлових напруг, еквівалентного генератора тощо) добре “працюють” у колах, поданих у формі сполучень дво полюсників. Для кіл, складених з чотириполюсників, зручно користуватися матричними методами аналізу.

У телекомунікаційних системах проходження сигналів часто відбувається в такий спосіб, що частина сигналу з виходу певного блока повертається назад на вхід. Ця операція виконується з метою зміни властивостей пристроїв передавання та оптимізування якості передаваних сигналів. Кола з такими властивостями називають **колами (системами) зі зворотним зв'язком**. Теорія цих кіл є доволі розлога й розробляється давно [4]. Наше завдання дати короткий виклад цієї теорії. Щоби проаналізувати роботу системи зі зворотним зв'язком, слід обрати певний метод.

Розглянемо взаємодію двох чотириполюсників: активного підсилювача з коефіцієнтом підсилення $K(p)$ і пасивного (R, L, C) з передавальною функцією $T(p)$. Сполучимо ці два чотириполюсники в такий спосіб, щоб частина енергії з виходу підсилювача потрапляла на вхід пасивного чотириполюсника. Способи сполучування чотириполюсників було розглянуто при вивчанні курсу ТЕКС у першому модулі, в розділі „Матричні методи аналізу кіл”. З виходу пасивного чотириполюсника частина енергії залежно від коефіцієнта передавання T , повертається назад на вхід підсилювача. Дістанемо своєрідне кільце.

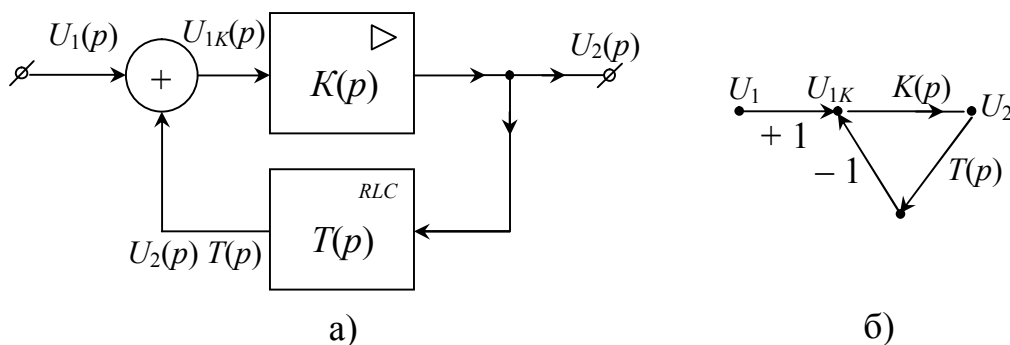


Рисунок 2.11 – Коло зі зворотним зв'язком:
функційна схема (а) та сигнальний граф
цієї системи (б)

На рис. 2.11, а зображено функційну схему описаної системи зі зворотним зв'язком. В схемі наявні зображені два функційних блоки: верхній підсилювач з коефіцієнтом підсилення $K(p)$, нижній – пасивний блок з передавальною

функцією $T(p)$. На схемі умовно зображений суматор у вигляді кружечка, в якому відбувається підсумовування вхідної напруги $U_1(p)$ з вихідною напругою пасивного блока $U_2(p)T(p)$. Ця сумарна напруга надходить на вхід підсилювача.

Опишемо дану схему за допомогою параметрів, здобутих раніш.

Передавальна функція підсилювального блоку записується як $\frac{U_2(p)}{U_{1K}(p)} = K(p)$,

передавальна функція пасивного блока як $\frac{U_2(p)T(p)}{U_2(p)} = T(p)$, де впливом є

$U_2(p)$, а відгуком – $U_2(p)T(p)$.

На суматор надходять дві напруги: $U_1(p) + U_2(p)T(p) = U_{1K}(p)$. Ця сума є впливом на підсилювальний блок з посиленням $K(p)$ та відгуком $U_2(p)$. На підставі цього можна записати: $\frac{U_2(p)}{U_{1K}(p)} = K(p)$, звідки $U_2(p) = K(p)U_{1K}(p) = K(p)(U_1(p) + U_2(p)T(p)) = K(p)U_1(p) + K(p)U_2(p)T(p)$. З цього виразу можна вивести передавальну функцію всієї системи $H(p)$: оскільки $U_2(p) - K(p)U_2(p)T(p) = K(p)U_1(p)$, то

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K(p)}{1 - K(p)T(p)} = \frac{M(p)}{N(p)}. \quad (2.51)$$

Коло вигляду рис. 2.11, а називається **системою із замкненим контуром**, а передавальна функція $K(p)T(p)$ – **передавальною функцією розімкненої системи**, де $K(p)$ називають посиленням у прямому напрямку, $T(p)$ – передавальною функцією кола зворотного зв'язку.

При сполученні чотириполіусників поміж собою слід дотримуватися правила “регулярності” сполучування. Приміром, за послідовно-паралельного сполучування двох чотириполіусників (рис. 2.12) треба загальні “заземлені” затискачі чотириполіусників поєднати разом [5].

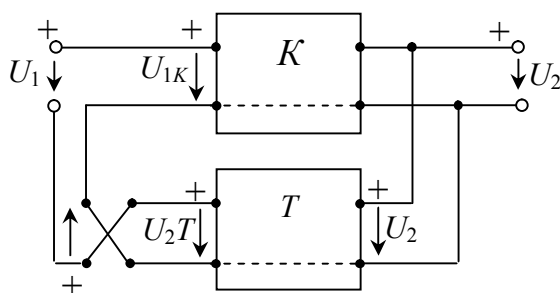


Рисунок 2.12 – Регулярне сполучання двох чотириполіусників

З рис. 2.12 видно, що

$$U_1 = U_{1K} - U_2 T.$$

Функція вигляду (2.51) –

функція зображення. Систему рис. 2.11, а може бути подано у вигляді функції частоти чи часу. В аналізі кіл зі зворотним зв'язком можна використовувати теорію сигнальних лінійних графів. Функційну схему системи зі зворотним зв'язком у

вигляді сигнального графа зображено на рис. 2.11, б. Більш докладно про застосовування сигнальних лінійних графів у системах зі зворотним зв'язком можна дізнатися у відповідній літературі [6].

Спробуємо проаналізувати вираз (2.51). Для цього перейдемо від операторних функцій до комплексних:

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 - K(j\omega)T(j\omega)}. \quad (2.51a)$$

Якщо $|1 - K(j\omega)T(j\omega)| > 1$, то вважають, що це є система з від'ємним зворотним зв'язком (ВЗЗ). У цьому разі $H(\omega) < K(\omega)$. Зворотний зв'язок зменшує модуль передавальної функції системи (амплітуди вихідного сигналу зменшуються).

Якщо $|1 - K(j\omega)T(j\omega)| < 1$, має місце додатний зворотний зв'язок (ДЗЗ). У цьому разі $H(\omega) > K(\omega)$. Зворотний зв'язок збільшує модуль передавальної функції системи. Додатний зворотний зв'язок може бути причиною нестійкості системи (може з'явитися сигнал на виході за відсутності сигналу на вході).

У разі, коли $|1 - K(j\omega)T(j\omega)| = 1$ виникають автоколивання.

Від'ємний зворотний зв'язок використовується задля оптимізування характеристик та параметрів схем, таких як: стабілізація посилення, збільшення вхідного й вихідного опорів, розширення смуги пропускання активних фільтрів тощо. Додатний зворотний зв'язок використовується переважно в схемах автогенераторів.

2.6.2 Критерії стійкості

Задля віднаходження електричної стійкості кіл існують методи, за допомогою яких можна визначати, де розташовуються корені характеристичного рівняння системи зі зворотним зв'язком $N(p) = 0$.

Критерій Рауса-Гурвіца (алгебричний) дозволяє, не розв'язуючи характеристичне рівняння, за формулою та величиною коефіцієнтів при членах з різним ступенем p дійти висновку щодо наявності уявних або комплексно-спряжених коренів з додатними дійсними складовими. Інакше кажучи, віднайти корені, які лежать на уявній осі або в правій напівплощині. Якщо передавальна функція кола

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{M(p)}{N(p)},$$

то характеристичне рівняння записується як

$$N(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Задля того, щоби корені цього рівняння розташовувалися в лівій півплощині (умова стійкості), всі коефіцієнти $a_n, \dots, a_0$ повинні бути ненульовими й мати однаковий алгебричний знак. Коефіцієнти характеристичного рівняння виписуються в такій послідовності:

$$\begin{array}{ccc}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \dots a_1 \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \dots a_0 \\
b_1 & b_2 & b_3 \dots \\
c_1 & c_2 & c_3 \dots \\
d_1 & d_2 & d_3 \dots \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}, \quad (2.52)$$

де коефіцієнти b_i, c_i, d_i утворюються за правилом

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}; \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}; \\
c_1 &= \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}; \quad c_1 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}; \\
d_1 &= \frac{c_1 b_2 - b_1 c_3}{c_1} \dots
\end{aligned} \quad (2.53)$$

Якщо знак членів першого стовпця (2.52) не змінюється, усі корені рівняння (2.51) лежать у лівій напівплощині й коло є стійке. Критерій стверджує, що передавальна функція кола має стільки полюсів у правій півплощині, скільки разів змінюється знак у ряді $a_n, a_{n-1}, b_1, c_1, d_1, \dots$

Критерій Михайлова (частотний). Суть методу полягає у тому, що на підставі характеристичного рівняння кола $N(p) = 0$ будується частотний годограф. Коло буде стійке, якщо годограф за змінювання частоти ω від 0 до ∞ послідовно пройде n квадрантів проти годинникової стрілки, розпочинаючи з додатної дійсної осі, де n – ступінь характеристичного рівняння. На рис. 2.13 наведено годограф Михайлова для стійкого кола п'ятого порядку.

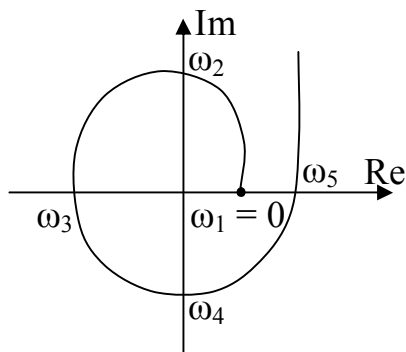


Рисунок 2.13 – Годограф Михайлова для стійкого кола п'ятого порядку

Критерій легко доводиться на підставі векторного методу побудови амплітудно- й фазочастотних характеристик за картою нулів та полюсів. Якщо функція $T(p)$ має n коренів, які лежать у лівій півплощині, то сумарний фазовий зсув на частоті $\omega \rightarrow \infty$ дорівнюватиме $n \frac{\pi}{2}$. Якщо корені

потрапляють на уявну вісь або до правої півплощини, то монотонний характер характеристики функції $N(p)$

порушиться й хід годографа Михайлова зміниться. Для стійкого кола частоти, за яких годограф перетинає дійсну й уявну осі рис. 2.13, повинні задовольняти нерівності

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5. \quad (2.54)$$

Критерій стійкості Найквіста. У літературі з автоматичного керування критерій Найквіста називають **амплітудно-фазовим**. Даний критерій може

бути застосовано лише тоді, коли попередньо перевірено відсутність полюсів у правій півплощині оберненої різниці $N(p) = 1 - K(p)T(p)$ знаменника передавальної функції системи.

Критерій стійкості Найквіста використовується для перевірки стійкості системи (запропоновано в 1930 році). Він дозволив розробити різні способи аналізу й синтезу систем. Оптимально працює, коли частотні характеристики системи задано графічно. Критерій ґрунтується на теоремі функції комплексного змінного за конформного перетворювання замкнених кривих з p -площини на площину функції $N(p)$.

Строге доведення критерію Найквіста можна виконувати за допомогою теорії відрахувань.

Критерій кореневого годографа. *Кореневим годографом* називають траєкторію переставлення коренів характеристичного рівняння системи зі зворотним зв'язком $N(p) = 1 - K(p)T(p)$ у комплексній площині за змінювання коефіцієнта підсилення $K(p)$ від 0 до ∞ . Для стійкої системи траєкторія коренів лежить у лівій півплощині за всіх заданих значень. Передавальні функції підсилювача $K(p)$ та кола зворотного зв'язку $T(p)$ можна записати у вигляді

$$K(p) = K_1 \frac{P_1(p)}{Q_1(p)}; \quad (2.55)$$

$$T(p) = T_1 \frac{P_2(p)}{Q_2(p)}. \quad (2.56)$$

На комплексну площину наносять карту нулів та полюсів функцій $K(p)$ та $T(p)$ на підставі поліномів $P_1(p)$, $P_2(p)$, $Q_1(p)$ та $Q_2(p)$. Обернене відношення системи $K(p)T(p) = F(p)$ в загальному вигляді можна записати як

$$F(p) = K_0 \frac{(p - p_{10})(p - p_{20}) \dots (p - p_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \quad (2.57)$$

або

$$F(p) = K_0 \frac{p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_0}, \quad (2.58)$$

де $K_0 = K_1 T_1$.

Розділивши знаменник (2.58) на чисельник, одержимо

$$F(p) = \frac{K_0}{p^{n-m} + (b_{n-1} - a_{m-1})p^{n-m+1} + \dots}, \quad (2.59)$$

із чого слідує, що за $n > m$ функція $F(p)$ має $(n - m)$ нулів, розташованих на нескінченності.

Характеристичне рівняння системи $N(p)$ запишеться як

$$N(p) = 1 - K_0 \frac{(p - p_{10})(p - p_{20}) \dots (p - p_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = 0,$$

або

$$N(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) - K_0[(p - p_{10})(p - p_{20}) \dots (p - p_m)] = 0.$$

З цього виразу виходить, що корені характеристичного рівняння системи та полюси функції $H(p)$ залежать від значення K_0 . Приміром, якщо $K_0 \rightarrow 0$, корені наближаються за значеннями до $p_1, p_2, \dots, p_n$, тобто полюси передавальної функції $H(p)$ збігаються з полюсами оберненого відношення $T(p)$. За збільшення $K_0 \rightarrow \infty$ корені характеристичного рівняння $H(p)$ наближаються за значеннями до $p_{10}, p_{20}, \dots, p_m$, які відповідають нулям оберненого відношення системи.

Більш докладно про практичне застосування кореневого методу можна дізнатися у відповідній літературі [6].

2.7 Умова стаціонарності автоколивань

Система зі зворотним зв'язком є автоколивальною схемою, якщо на її виході, за відсутності впливу, з'являються періодичні коливання. Всі автоколивальні схеми є безумовно нелінійними системами, але умови стаціонарності (умови порушення) може бути віднайдено на підставі лінійної теорії. В автоколивальному режимі передавальна функція замкненої системи $H(p) \rightarrow \infty$ за умови, що $U_1(p) = 0$ і корені характеристичного рівняння $N(p) = 0$ розташовуються в правій півплощині з дійсними додатними частинами $p_i = +\sigma_i \pm j\omega_i$. Причому система розпочне генерувати, якщо функція $H(p)$ матиме хоча б пару комплексно-спряжених полюсів на уявній осі комплексної площини, а решта полюсів, якщо вони є, можуть лежати в лівій півплощині.

Автоколивальні властивості системи визначаються структурою передавальних функцій $K(p)$ та $T(p)$, картою їхніх нулів та полюсів, а також знаком зворотного зв'язку.

Задля аналізу умов виникнення автоколивань можна використовувати будь-який критерій стійкості. Оптимальним, на думку деяких авторів, є критерій кореневого годографа, за допомогою якого визначається умова нестійкості системи та вигляд виникаючих автоколивань (гармонічних чи імпульсних). Умову стаціонарності визначають з виразу $N(p) = 0$ для навантаженої системи. Вираз $N(p)$ можна подати в алгебричній формі:

$$N(j\omega) = \operatorname{Re}[N(j\omega)] + j \operatorname{Im}[N(j\omega)] = A(\omega) + jB(\omega)$$

і тоді

$$A(\omega) = 0 \text{ та } B(\omega) = 0.$$

Ці останні дві рівності називають **умовами балансу амплітуд** ($A(\omega) = 0$) та **фаз** ($B(\omega) = 0$). З цих умов віднаходять значення частоти ω та посилення підсилювача K .

Контрольні запитання

- 17 У чому полягають труднощі використання класичного методу при аналізі перехідних процесів?
- 27 У чому полягає сутність операторного методу аналізу кіл?
- 37 Схарактеризуйте інтегральне рівняння, називане прямим перетворенням Лапласа. В який спосіб пов'язані між собою оригінал і зображення?
- 47 Назвіть основні властивості й теореми перетворення Лапласа.
- 57 Сформулюйте теорему розкладання. У яких випадках і для чого вона використовується?
- 67 Наведіть операторні схеми заміщення індуктивності та ємності за нульових та ненульових початкових умов.
- 77 Який існує порядок розрахунку перехідних процесів у ЛЕК операторним методом?
- 87 Що називається операторною передавальною функцією кола?
- 97 Скільки типів операторних передавальних функцій відомо й що, вони собою являють?
- 107 Назвіть властивості операторної передавальної функції кола. У чому полягає критерій стійкості ЛЕК (критерій Гурвіца)?
- 117 Що називається перехідним процесом (ПП) або перехідним режимом (ПР) в ЛЕК?
- 127 Які є причини появи перехідних процесів у ЛЕК?
- 137 У яких ЛЕК не виникають перехідні процеси?
- 147 Скільки практично триває перехідний процес у ЛЕК?
- 157 Як формулюється закон комутації для елемента C ?
- 167 Як формулюється закон комутації для елемента L ?
- 177 Які бувають незалежні початкові умови кола?
- 187 Що лежить у підґрунті класичного методу аналізу перехідних процесів у ЛЕК?
- 19 Як пов'язані між собою порядок кола й порядок диференційного рівняння, яке описує перехідний процес в колі?
- 20 Що називається сталою часу кола τ ?
- 21 В який спосіб пов'язана стала часу кола τ з коренем характеристичного рівняння p для кіл першого порядку?
- 22 Які типи перехідних процесів можуть виникати в ЛЕК другого порядку, яке містить різнохарактерні реактивні елементи (L та C)?
- 23 В який спосіб слід записувати вираз задля визначання критичного опору ($R_{кр}$) послідовного коливального контуру?
- 24 В який спосіб слід записувати вираз задля визначання коефіцієнта загасання послідовного коливального контуру?
- 25 В який спосіб слід записувати вираз задля визначання частоти вільних коливань (ω_v) та періоду вільних коливань (T_v) у послідовному контурі?
- 26 В який спосіб слід записувати вираз задля визначання декременту коливання (Δ) та логарифмічного декременту коливання ($\ln \Delta$)?
- 27 Який є порядок розрахунку перехідних процесів у ЛЕК класичним методом?

- 28 Що називається перехідною функцією кола?
- 29 Назвіть і схарактеризуйте чотири типи перехідної функції кола.
- 30 Що називається імпульсною функцією кола?
- 31 Назвіть і схарактеризуйте чотири типи імпульсних функцій кола.
- 32 Який зв'язок існує поміж перехідною й імпульсною функціями кола?
- 33 Який зв'язок існує поміж перехідною функцією кола й операторною передавальною функцією кола?
- 34 Який зв'язок існує поміж імпульсною функцією кола й операторною передавальною функцією кола?
- 35 У яких випадках використовують інтеграли Дюамеля?
- 36 Наведіть одну з форм запису інтеграла Дюамеля.
- 37 Яке коло називається диференціюючим? Наведіть приклад.
- 38 Яке коло називається інтегрувальним? Наведіть приклад.
- 39 В який спосіб пов'язані поміж собою величина сталої часу диференціювального кола і якість диференціювання вхідного сигналу?
- 40 В який спосіб пов'язані поміж собою величина сталої часу інтегрувального кола і якість інтегрування вхідного сигналу?
- 41 Який зв'язок існує поміж перехідною функцією кола й комплексною передавальною функцією?
- 42 Який зв'язок існує поміж імпульсною функцією кола й комплексною передавальною функцією?

Список рекомендованої літератури

- 1 *Белецкий А.Ф.* Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1986.
- 2 *Бакалов В.П., Воробийченко П.П., Крук Б.И.* Теория электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1998.
- 3 *Зевеке Г.В.* и др. Основы теории цепей: Учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Энергия, 1975.
- 4 *Бодэ Г.* Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. – ГИИЛ, 1948.
- 5 *Зелях Э.В.* Двухполюсники и четырехполюсники: Учебное пособие. – Одесса, 1976.
- 6 *Горовиц А.М.* Синтез систем с обратной связью: Учебник для вузов. – М.: Сов. радио, 1970.

ЧАСТИНА 2

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт

Лабораторна робота № 3.1а ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У КОЛАХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1 Мета роботи

Дослідити кола з одним накопичувачем енергії в перехідному режимі на віртуальному макеті.

2 Список літератури

- 2.1 *Белецкий А.Ф.* Теория линейных электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1986.
- 2.2 *Бакалов В.П., Воробийченко П.П., Крук Б.И.* Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1998.

3 Тест-запитання

3.1 Тест-запитання задля виявлення ступеня підготовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Підготувати відповіді на тест-запитання.
- 4.2 Вивчити теоретичний матеріал за рекомендованою літературою й конспектом лекцій.
- 4.3 Для схем рис. 4.1 визначити $u_C(t)$, $i_C(t)$, $i_L(t)$, $u_L(t)$ і побудувати часові діаграми в інтервалі часу $0 \leq t \leq 4\tau$.

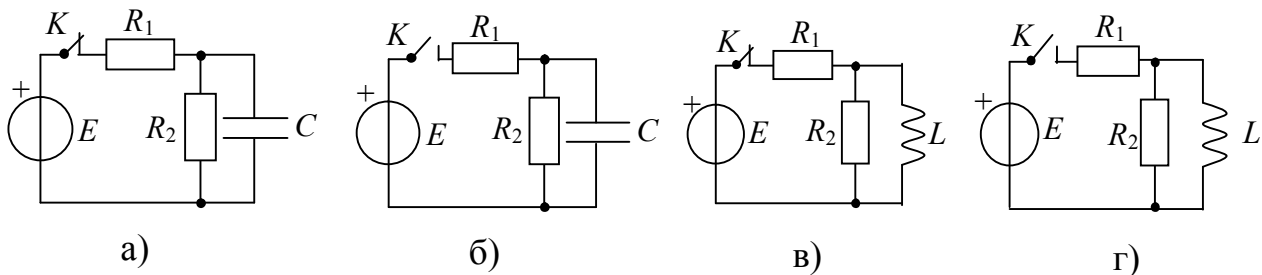


Рисунок 4.1 – Схеми кіл першого порядку

4.4 Дані для розрахунків:

$$E = n, \text{ В}; R_1 = 20 \text{ Ом}; R_2 = 10n, \text{ Ом}; C = \frac{100}{m}, \text{ мкФ}; L = n, \text{ мГн}.$$

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Накреслити часові діаграми: $u_{C3}(t)$, $i_{C3}(t)$, $u_{Cp}(t)$, $i_{Cp}(t)$, $i_{L3}(t)$, $u_{L3}(t)$, $i_{Lp}(t)$, $u_{Lp}(t)$ і порівняти їх з аналогічними розрахунками.
- 5.2 За експериментальними діаграмами $u_{C3}(t)$, $u_{Cp}(t)$ та i_{L3} , i_{Lp} визначити сталі часу кіл заряду й розряду τ_{C3} , τ_{Cp} , τ_{L3} , τ_{Lp} .
- 5.3 Порівняти значення величин, розрахованих у домашньому завданні, з величинами, здобутими в експерименті.
- 5.4 Змінюючи величини елементів, визначити їхній вплив на тривалість перехідного процесу (на величину τ).

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 За допомогою повзунків, розташованих усередині нижньої частини макета, встановіть задані параметри елементів (рис. 6.1).

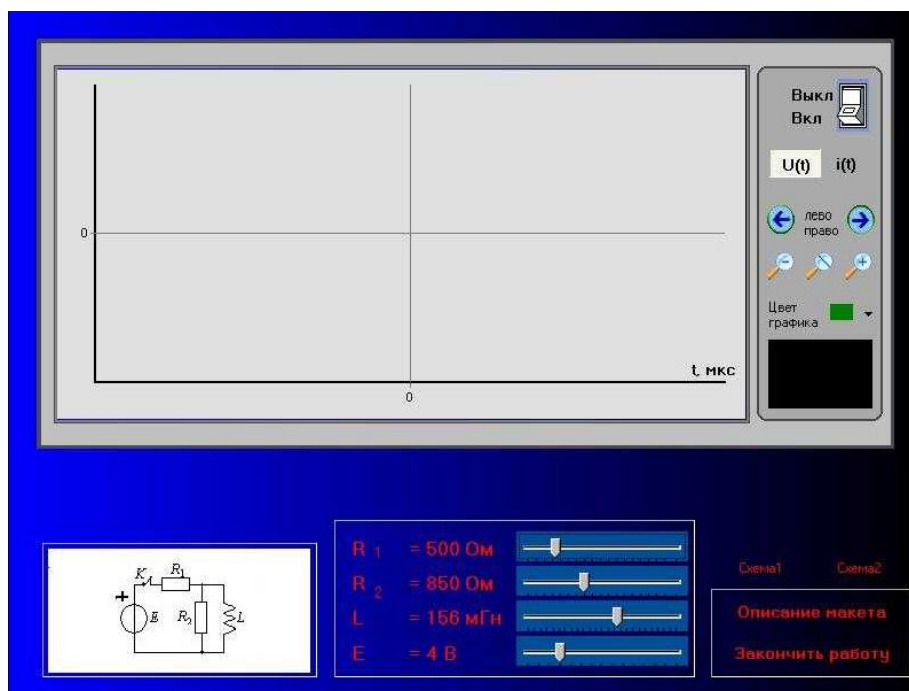


Рисунок 6.1 – Віртуальний макет досліджуваного кола

- 6.2 Увімкніть віртуальний макет, натиснувши кнопку вмикання у правому верхньому куті макета.
- 6.3 Переводячи ключ на схемі макета з положення „1” до положення „2”, простежте й накресліть криві перехідного процесу. Приклад виконання роботи для дослідження розряду індуктивності наведено на рис. 6.2.

- 6.4 За осцилограмами перехідного процесу визначте сталу часу кола.
 6.5 Повторіть пп. 6.3...6.4 для всіх випадків, наведених на рис. 4.1.

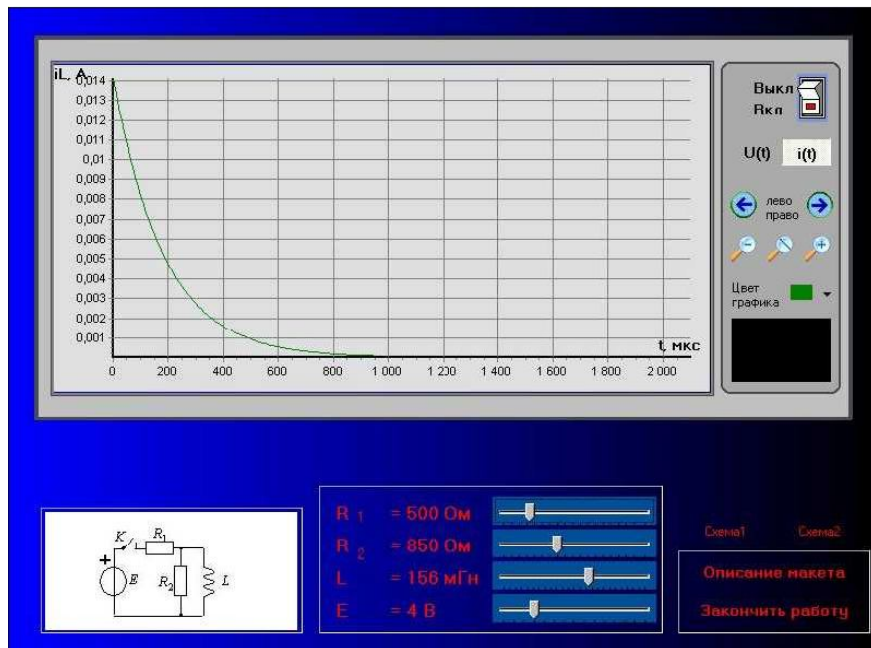


Рисунок 6.2 – Приклад виконання роботи
 для дослідження розряду індуктивності

- 6.6 За вказівкою викладача аналогічно до п. 6.1 змініть параметри елементів однієї зі схем і повторіть пп. 6.3...6.4. Оцініть вплив елементів на величину τ .

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
 7.2 Схеми вимірювань.
 7.3 Результати виконання домашнього завдання.
 7.4 Осцилограми струмів і напруг.
 7.5 Розрахунки величин τ за результатами експерименту.
 7.6 Висновки.

Лабораторна робота № 3.16
ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ
У КОЛАХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1 Мета роботи

Дослідити коло з двома накопичувачами енергії в перехідному режимі на віртуальному макеті.

2 Список літератури

- 2.1 Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1986.
- 2.2 Воробиенко П.П. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989.
- 2.3 Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1998.

3 Тест-запитання

- 3.1 Тест-запитання задля виявлення ступеня підготовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Підготувати відповіді на тест-запитання.
- 4.2 Вивчити теоретичний матеріал за рекомендованою літературою й конспектом лекцій.
- 4.3 Розрахувати критичний опір $R_{кр}$.
- 4.4 Розрахувати частоту власних коливань коливального контура.
- 4.5 Для кожного із заданих значень R розрахувати:
 - 1) коефіцієнт загасання δ ;
 - 2) частоту вільних коливань ω_v ;
 - 3) період вільних коливань T_v ;
 - 4) декремент коливань Δ ;
 - 5) логарифмічний декремент коливань $\ln \Delta$.
- 4.6 Результати обчислень занести до табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Результати розрахунків

№ пп.	R , Ом	δ	ω_v , рад/с	T , мс	Δ	$\ln \Delta$	Експеримент	
							T , мс	Δ
1								
2								
3								
4								
5								

4.7 Дані для розрахунків:

$$L = n, \text{ мГн}; C = 4 n, \text{ нФ}; R_k = 2 n, \text{ Ом}.$$

При розрахунках треба змінювати опір кола від 0 до $R = 5 \rho$, де $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – хвильовий опір RLC контура (рис. 4.1).

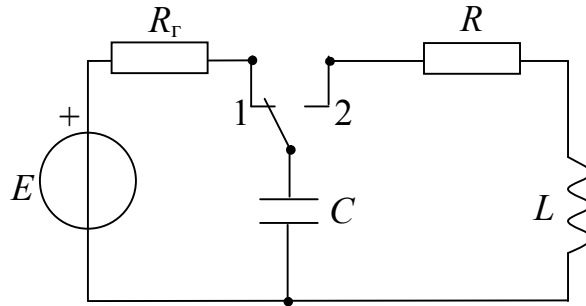


Рисунок 4.1 – Схема досліджуваного кола

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Установіть задані значення елементів досліджуваної схеми.
- 5.2 За допомогою осцилографа визначте величини T_B та Δ для різних значень опорів.
- 5.3 Зрівняйте значення величин, розрахованих в домашньому завданні, з величинами, здобутими в експерименті.

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 За допомогою повзунків, розташованих усередині нижньої частини макета, встановіть задані параметри елементів (рис. 6.1).

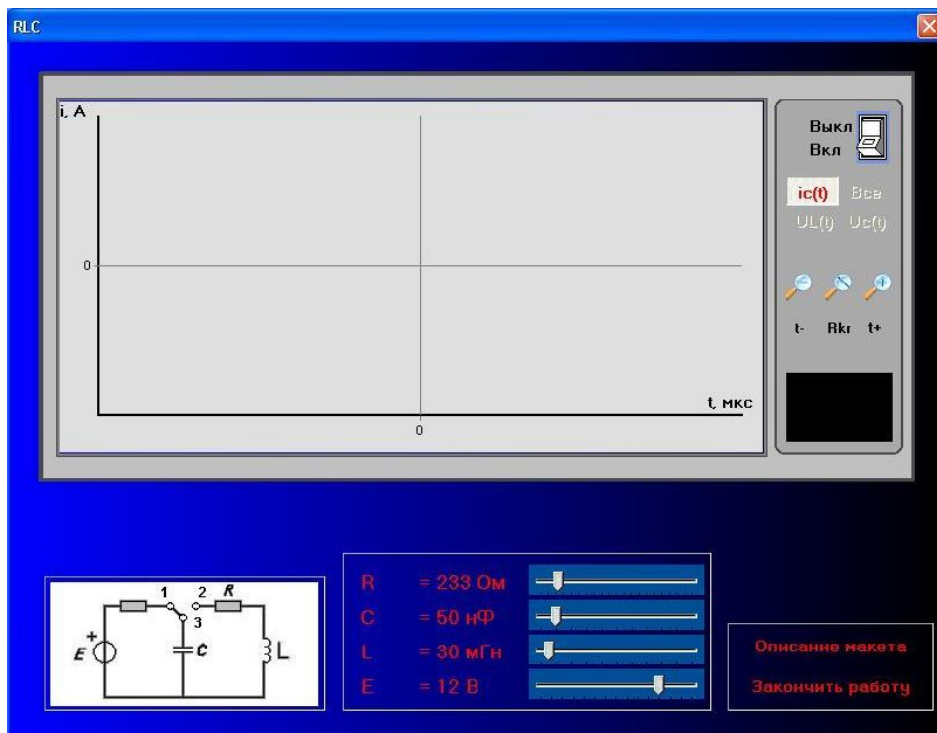


Рисунок 6.1 – Віртуальний макет досліджуваного кола

- 6.2 Увімкніть віртуальний макет, натиснувши на кнопку вмикання у правому верхньому куті макета.
- 6.3 Переводячи ключ на схемі макета з положення „1” до положення „2”, відстежте криві перехідного процесу. Вибір кривої здійснюється шляхом натискання відповідної кнопки в правому верхньому куті екрана. Приклад виконання роботи для коливального режиму наведено на рис. 6.2.
- 6.4 За осцилограмою перехідного процесу визначте період вільних коливань T_B і декремент коливання Δ . Результати вимірювань занесіть до таблиці.
- 6.5 Повторіть пп. 6.3... 6.4 для всіх значень опору R з табл. 4.1.

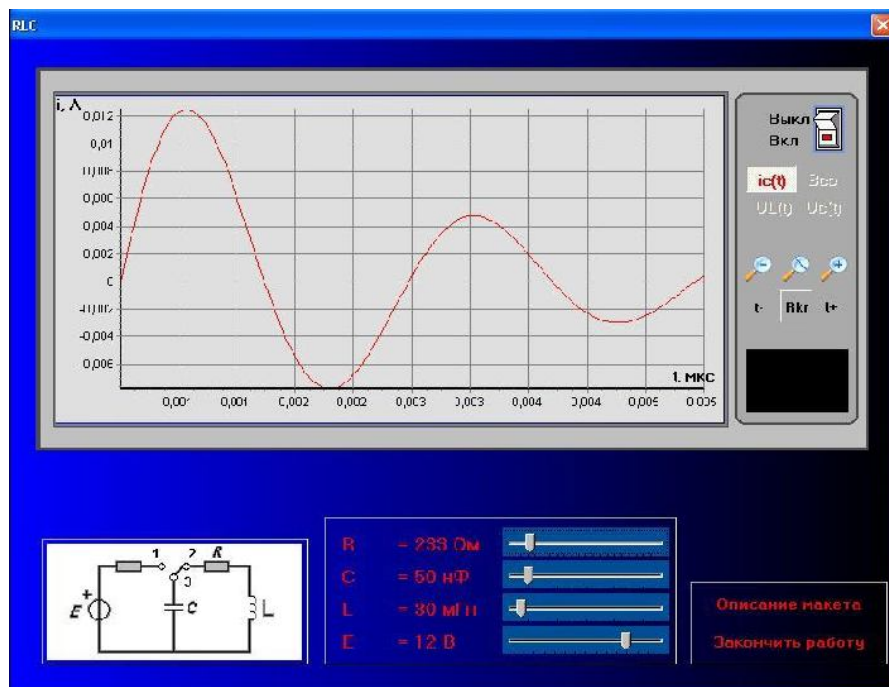


Рисунок 6.2 – Приклад виконання роботи для коливального режиму

- 6.6 Змінюючи величину опору R , визначте критичний опір кола $R_{кр}$ (при цьому крива на осцилографі набирає характерного вигляду).
- 6.7 Накресліть криві напруги на ємності й індуктивності та струми в колі для значень опору, зазначених викладачем.

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Схема вимірювань.
- 7.3 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.4 Таблиці та графіки вимірювань.
- 7.5 Розрахунки величин за результатами експерименту.
- 7.6 Висновки.

Лабораторна робота № 3.2
ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСТОТНИХ ТА ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1 Мета роботи

Виявити зв'язок частотних та часових характеристик електричних кіл. Набути навичок в дослідженні частотних та часових залежностей електричних кіл першого порядку.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1988.
- 2.2 Арбузнікова Н.Ф., Калашніков А.Ю., Шкуліпа А.В. Часові та операторні методи аналізу електричних кіл. Навчальний посібник для бакалаврів, ОНАЗ ім. О.С. Попова, Одесса, 2009.– Ч. 1.

3 Тест-запитання

- 3.1 Тест-запитання задля виявлення ступеня підготовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

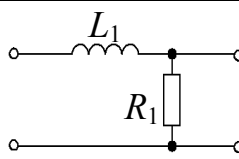
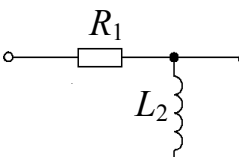
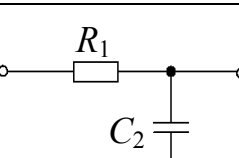
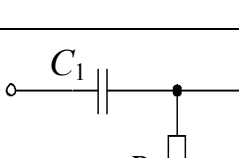
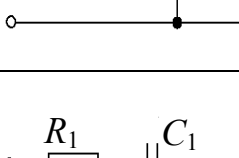
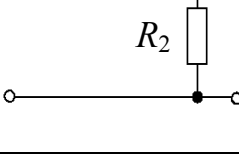
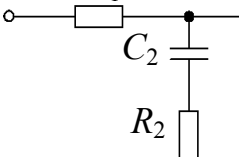
4 Домашнє завдання

- 4.1 Підготувати відповіді на тест-запитання.
- 4.2 Вивчити теоретичний матеріал за рекомендованою літературою й конспектом лекцій.
- 4.3 Для наведених схем таблиці 4.1 необхідно:
 - 1) здобути вирази модулів комплексних передавальних функцій напруги $H(\omega)$ і побудувати амплітудно-частотні характеристики;
 - 2) здобути вирази перехідних функцій напруги $h_{uu}(t)$ і побудувати перехідні характеристики $h_{uu}(t/\tau)$;
 - 3) здобути вирази імпульсних функцій $g(t)$ і побудувати імпульсні характеристики $\hat{g}(t/\tau)$.
- 4.4 Вихідні дані для розрахунків:

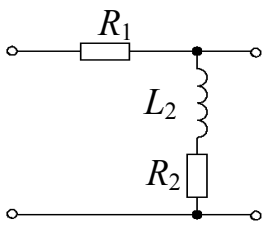
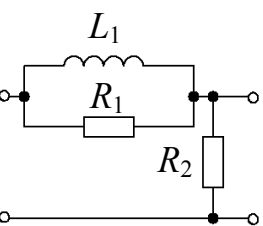
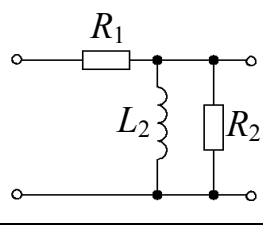
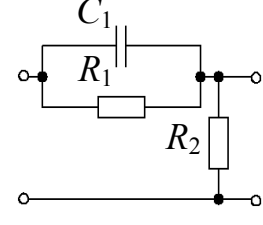
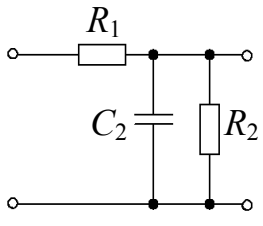
$$R_1 = n, \text{ Ом}; \quad R_2 = 10n, \text{ Ом}; \quad C = 100/n, \text{ мкФ}; \quad L = n, \text{ мГн}.$$

Результати обчислень занести до таблиці; за даними таблиці побудувати графіки: частотні – в межах $0 \leq (\omega\tau) \leq 4$, часові – в межах $0 \leq (t/\tau) \leq 4$.

Таблиця 4.1 – Досліджувані схеми першого порядку та їхньої функції напруги

№ пп.	Схеми	Модуль передавальної функції $H(\omega)$	Перехідна функція $h(t)$	Імпульсна функції $\hat{g}(t)$	Стала часу τ
1		$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{L_1}{R_1}$
2		$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}}$	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\hat{\delta}(t) - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{L_2}{R_1}$
3		$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$R_1 C_2$
4		$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}}$	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\hat{\delta}(t) - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$R_2 C_1$
5		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\hat{\delta}(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$(R_1 + R_2) C_1$
6		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\hat{\delta}(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + e^{-\frac{t}{\tau}}$	$(R_1 + R_2) C_2$
7		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{L_1}{R_1 + R_2}$

Закінчення таблиці 4.1

№ пп.	Схеми	Модуль передавальної функції $H(\omega)$	Перехідна функція $h(t)$	Імпульсна функція $\hat{g}(t)$	Стала часу τ
8		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} + \hat{\delta}(t)$	$\frac{L_2}{R_1 + R_2}$
9		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\hat{\delta}(t) - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{L_1(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$
10		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\hat{\delta}(t) - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	$\frac{L_2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$
11		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} + \hat{\delta}(t)$	$\frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}$
12		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2}$

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Скласти досліджувану схему, встановити значення елементів відповідно до домашнього завдання.
- 5.2 Дослідити й накреслити частотні й часові характеристики заданої схеми.
- 5.3 Порівняти характеристики, здобуті у дослідний та розрахунковий спосіб.

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 Скласти досліджувану схему, задля чого кожному з двополюсників ($Z1$, $Z2$) треба поставити у відповідність пасивні елементи відповідно до домашнього завдання.
 - 6.2 Установити значення елементів безпосередньо з клавіатури (увести числові значення до відповідного вікна) або за допомогою стрілок “▲” та “▼” поряд з відповідними вікнами.
 - 6.3 Для спостереження частотних та часових характеристик слід поставити галочку поряд з потрібною характеристикою й натиснути кнопку “Расчет”.
- Приклад виконання роботи для кола першого порядку наведено на рис. 6.1.

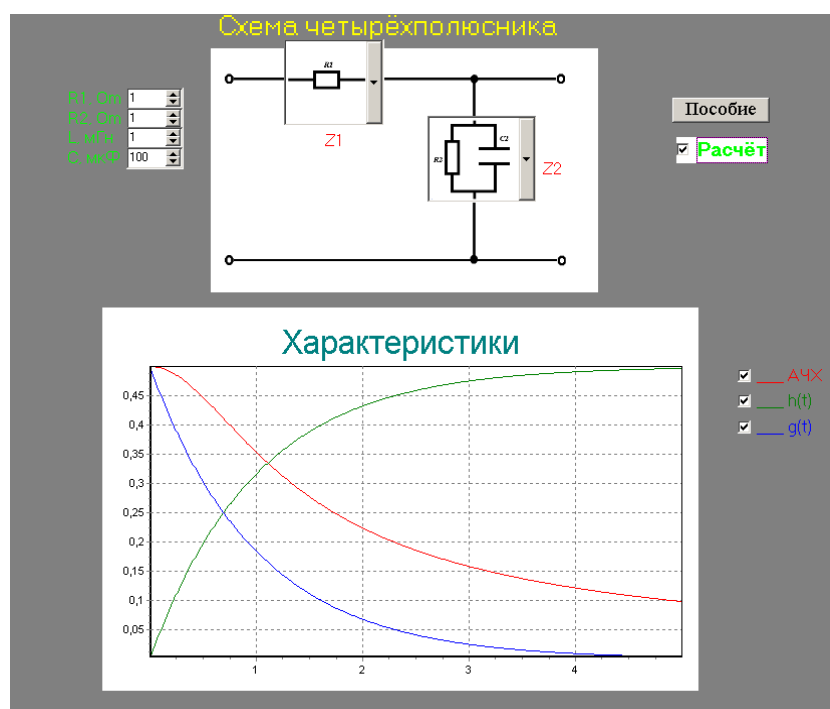


Рисунок 6.1 – Приклад виконання лабораторної роботи

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Схема вимірювань.
- 7.3 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.4 Таблиці та графіки вимірювань.
- 7.5 Розрахунки величин за результатами експерименту.
- 7.6 Висновки.

Лабораторна робота № 3.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДГУКУ КОЛА

ЗА РІЗНИХ ВИДІВ СТУПІНЧАСТОГО ВПЛИВУ

1 Мета роботи

Набути навичок визначання відгуку кола на задані впливи, використовуючи накладання й перехідну функцію кола.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1988.
- 2.2 Арбузнікова Н.Ф., Калашніков А.Ю., Шкуліпа А.В. Часові та операторні методи аналізу електричних кіл. Навчальний посібник для бакалаврів, ОНАЗ ім. О. С. Попова, Одесса, 2009.– Ч. 1.

3 Тест-запитання

- 3.1 Тест-запитання задля виявлення ступеня підготовності до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Підготувати відповіді на тест-запитання.
- 4.2 Вивчити теоретичний матеріал за рекомендованою літературою й конспектом лекцій.
- 4.3 З таблиці 4.1 обрати схему й для неї визначити перехідну функцію $h(t)$.
- 4.4 З таблиці 4.2 обрати сигнал впливу $u_1(t)$.
- 4.5 Визначити відгук $u_2(t)$ за заданого впливу, розрахувати й побудувати часову діаграму цього відгуку.
- 4.6 Дані для розрахунків:

$$R_1 = n, \text{ Ом}; R_2 = 10 \text{ Ом}; C = 100/m, \text{ мкФ}; L = n, \text{ мГн}.$$

Результати обчислень занести до таблиці. За даними таблиці побудувати графік $u_2(t)$ у діапазоні $0 \leq t/\tau \leq 6$.

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Скласти досліджувану схему, встановити значення елементів та форму впливу відповідно до домашнього завдання.
- 5.2 Відстежити перехідну характеристику кола й відгук на заданий вплив. Порівняти здобуті дані з розрахунковими.
- 5.3 Відстежити відгук кола на впливи іншої форми (за завданням викладача).

Таблиця 4.1 – Досліджувані схеми і їх функції

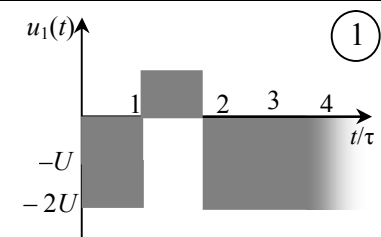
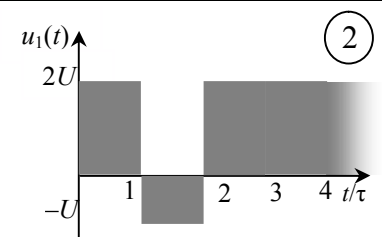
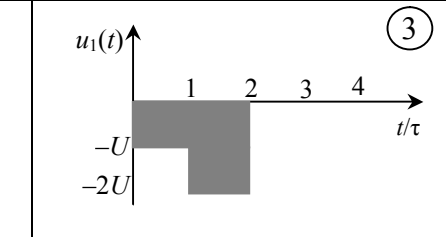
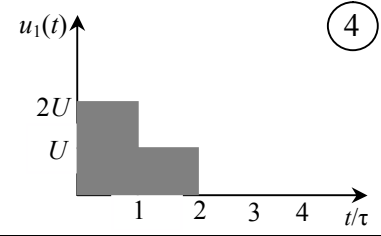
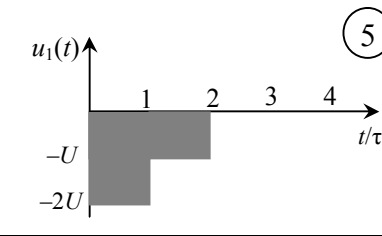
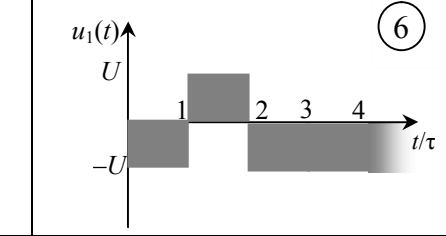
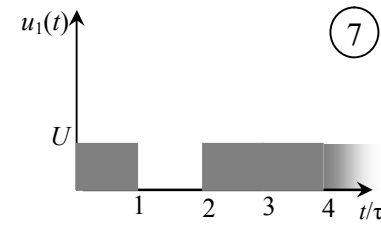
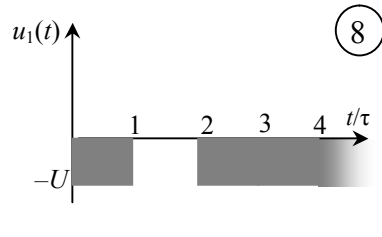
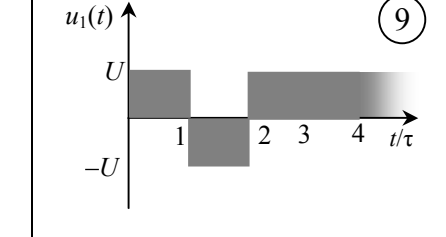
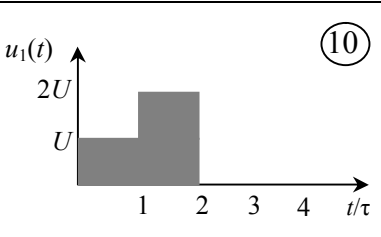
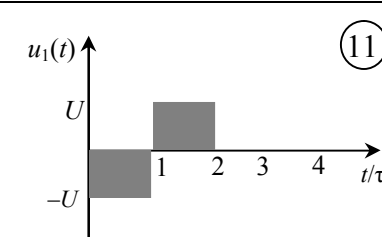
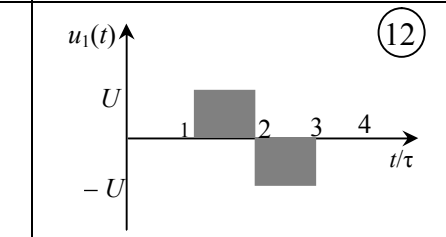
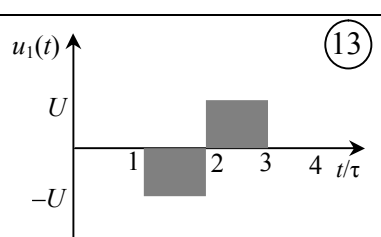
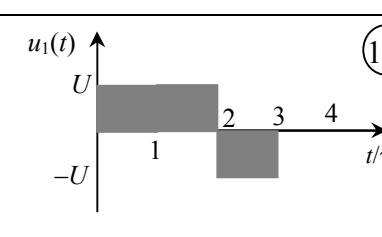
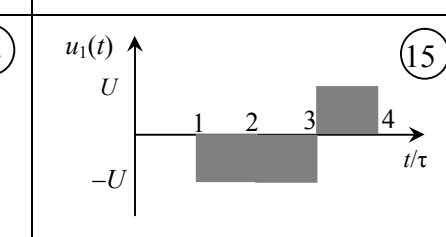
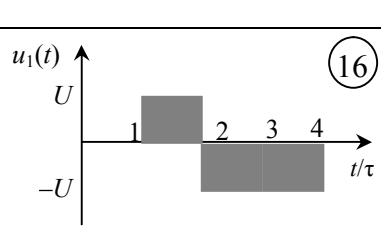
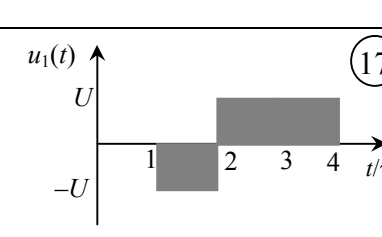
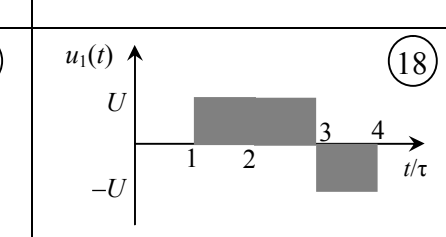
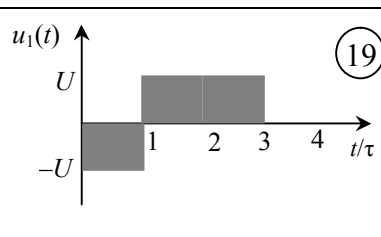
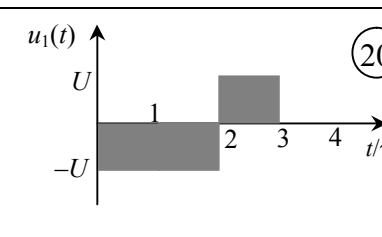
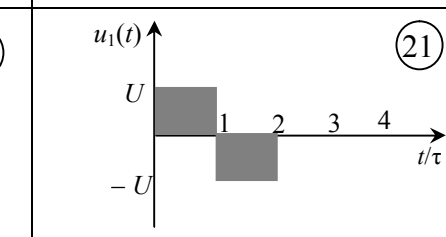
№ пп.	Схеми	Перехідна функція $h(t)$	Відгук $u_2(t)$ на $u_1(t)$ діаграми 21, табл. 4.2	Стала часу τ
1		$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	а) $0 \leq \frac{t}{\tau} \leq 1$ $1 - e^{-\frac{t}{\tau}};$ б) $1 \leq \frac{t}{\tau} \leq 2$ $1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - 2\left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau}}\right);$	$\frac{L_1}{R_2}$
2			в) $\frac{t}{\tau} > 2$ $1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - 2\left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau}}\right) + 1 - e^{-\frac{t-2\tau}{\tau}}$	$R_1 C_2$
3		$e^{-\frac{t}{\tau}}$	а) $0 \leq \frac{t}{\tau} \leq 1$ $e^{-\frac{t}{\tau}};$ б) $1 \leq \frac{t}{\tau} \leq 2$ $e^{-\frac{t}{\tau}} - 2e^{-\frac{t-\tau}{\tau}};$	$\frac{L_2}{R_1}$
4			в) $\frac{t}{\tau} > 2$ $e^{-\frac{t}{\tau}} - 2e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} + e^{-\frac{t-2\tau}{\tau}}$	$R_2 C_1$
5		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	а) $0 \leq \frac{t}{\tau} \leq 1$ $\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right);$ б) $1 \leq \frac{t}{\tau} \leq 2$ $\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - 2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau}}\right);$	$\frac{L_1}{R_1 + R_2}$
6			в) $\frac{t}{\tau} > 2$ $\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - 2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau}}\right) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t-2\tau}{\tau}}\right)$	$\frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2}$

Закінчення таблиці 4.1

№ пп.	Схеми	Перехідна функція $h(t)$	Відгук $u_2(t)$ на $u_1(t)$ діаграми 21, табл. 4.2	Стала часу τ
7			а) $0 \leq \frac{t}{\tau} \leq 1$ $e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right);$ б) $1 \leq \frac{t}{\tau} \leq 2$	$\frac{L_2}{R_1 + R_2}$
8		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + e^{-\frac{t}{\tau}}$	$e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - 2e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} - 2\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} \right)$ в) $\frac{t}{\tau} > 2$ $e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - 2e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} - 2\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} \right) + e^{-\frac{t-2\tau}{\tau}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t-2\tau}{\tau}} \right)$	$\frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}$
9		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	а) $0 \leq \frac{t}{\tau} \leq 1$ $\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}};$ б) $1 \leq \frac{t}{\tau} \leq 2$ $\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} - 2\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t-\tau}{\tau}};$	$(R_1 + R_2)C_1$
10			в) $\frac{t}{\tau} > 2$ $\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} - 2\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t-2\tau}{\tau}}$	$\frac{L_2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$
11		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	а) $0 \leq \frac{t}{\tau} \leq 1$ $\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right);$ б) $1 \leq \frac{t}{\tau} \leq 2$ $\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - 2 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} \right) \right)$	$(R_1 + R_2)C_2$
12		$+ \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	в) $\frac{t}{\tau} > 2$ $\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - 2 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} \right) \right) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t-2\tau}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t-2\tau}{\tau}} \right)$	$\frac{L_1(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$

--	--	--	--

Таблиця 4.2 – Часові діаграми впливу

 1	 2	 3
 4	 5	 6
 7	 8	 9
 10	 11	 12
 13	 14	 15
 16	 17	 18
 19	 20	 21

6 Порядок виконання роботи

6.1 Обрати досліджувану схему. Для цього треба натиснути кнопку «Вибрати схему». У вікні, яке відкриється, поставити галочку поряд зі схемою, відповідно до домашнього завдання (рис. 6.1).

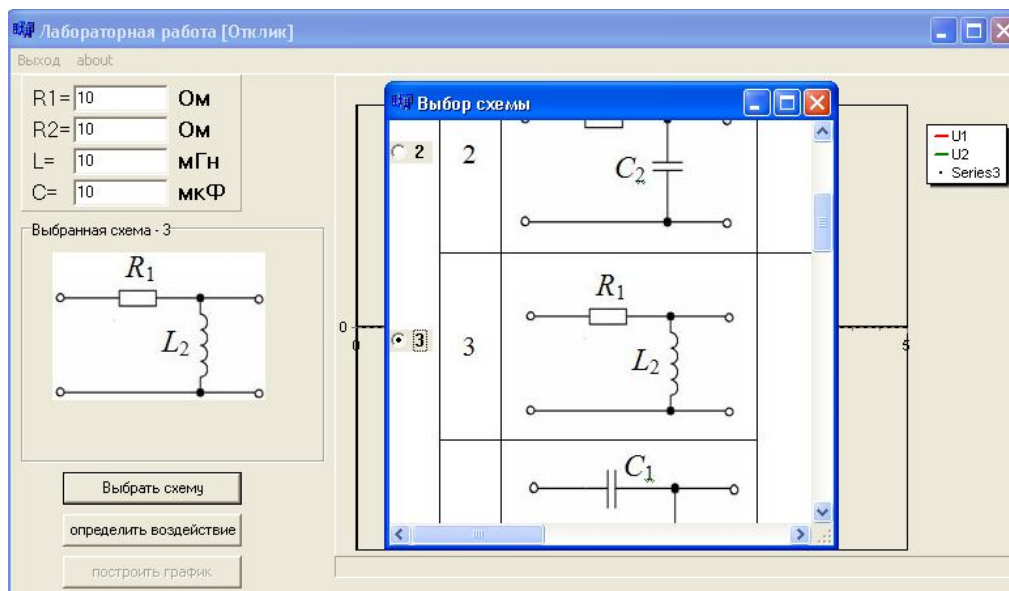


Рисунок 6.1 – Приклад вибору схеми

6.2 Встановити значення елементів безпосередньо з клавіатури (увести числові значення до відповідного вікна).

6.3 Для вибору вхідного впливу треба натиснути кнопку «Определить воздействие». Встановити потрібний вплив згідно з домашнім завданням (увести числові значення до відповідного вікна інтервалу часу), натиснути кнопку «Предпросмотр воздействия», а потім кнопку «Применить». Для того щоби зробити вплив нескінченним, слід поставити галочку в «Infinity» (рис. 6.2).

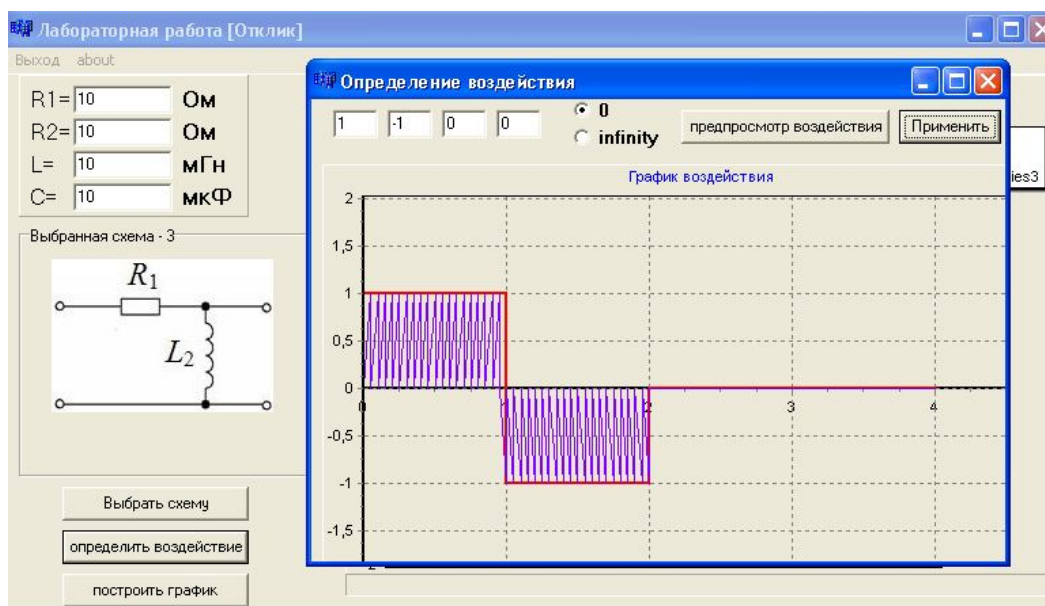


Рисунок 6.2 – Приклад вибору впливу

6.4 Задля дослідження відгуку кола треба натиснути кнопку «Построить график» (рис. 6.3).

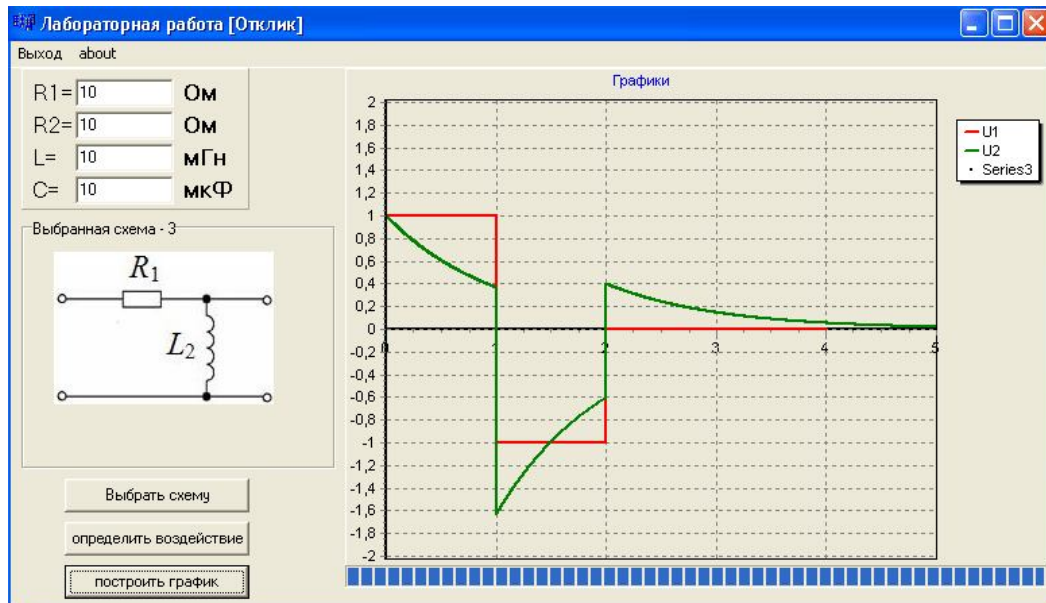


Рисунок 6.3 – Приклад дослідження відгуку кола

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Схема вимірювань.
- 7.3 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.4 Таблиці та графіки вимірювань.
- 7.5 Розрахунки величин за результатами експерименту.
- 7.6 Висновки.

Лабораторная работа № 3.4 ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

1 Мета роботи

Дослідити електричне коло зі зворотним зв'язком на предмет його стійкості.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1988.
- 2.2 Арбузнікова Н.Ф., Калашніков А.Ю., Шкуліпа А.В. Часові та операторні методи аналізу електричних кіл. Навчальний посібник для бакалаврів, ОНАЗ ім. О.С. Попова, Одесса, 2009.– Ч. 1.

3 Тест-запитання

- 3.1 Тест-запитання задля виявлення ступеня підготовленості до виконання лабораторної роботи наведено в Додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Підготувати відповіді на тест-запитання.
- 4.2 Вивчити теоретичний матеріал за рекомендованою літературою й конспектом лекцій.

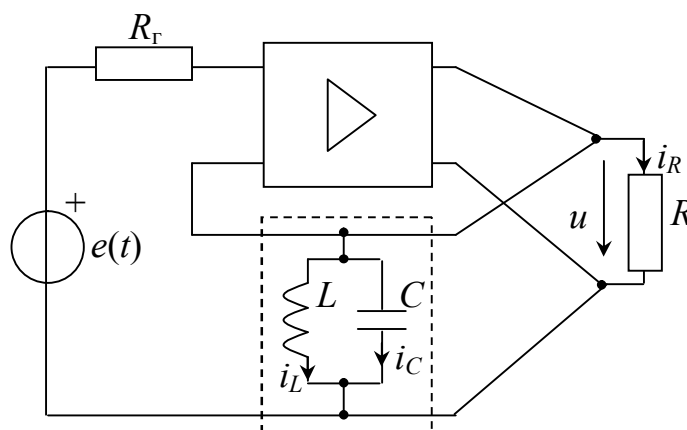


Рисунок 4.1 – Дослідне коло

- 4.3 Для кола рис. 4.1 визначити корінь характеристичного рівняння, заданого виразом

$$p^2 + p \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = 0.$$

Розрахувати корінь для трьох випадків:

1) $R = 0$;

2) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$;

$$3) |R| > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Дані для розрахунку кола зворотного зв'язку (на рис. 4.1 обведено штриховою лінією): $L = n$, мГн; $C = \frac{10}{m}$, мкФ.

4.4 Зобразити корені, розраховані в п. 4.3, на комплексній площині.

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Установити значення елементів кола зворотного зв'язку.
- 5.2 Для трьох значень опору R , здобутих у домашньому завданні (п. 4.3), дослідити часові характеристики кола й зафіксувати корінь характеристичного рівняння.
- 5.3 Порівняти домашні розрахунки з експериментальними діаграмами.
- 5.4 Розглянути часові залежності для трьох випадків (корінь на уявній осі, корінь у лівій півплощині, корінь у правій півплощині).

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 За допомогою повзунків або стрілочок “▲” та “▼” у лівому верхньому куті макета встановити необхідні величини елементів кола зворотного зв'язку (R , L , C).
- 6.2 Задля переглядання часових характеристик треба натиснути кнопку «Graph» на лабораторному макеті.

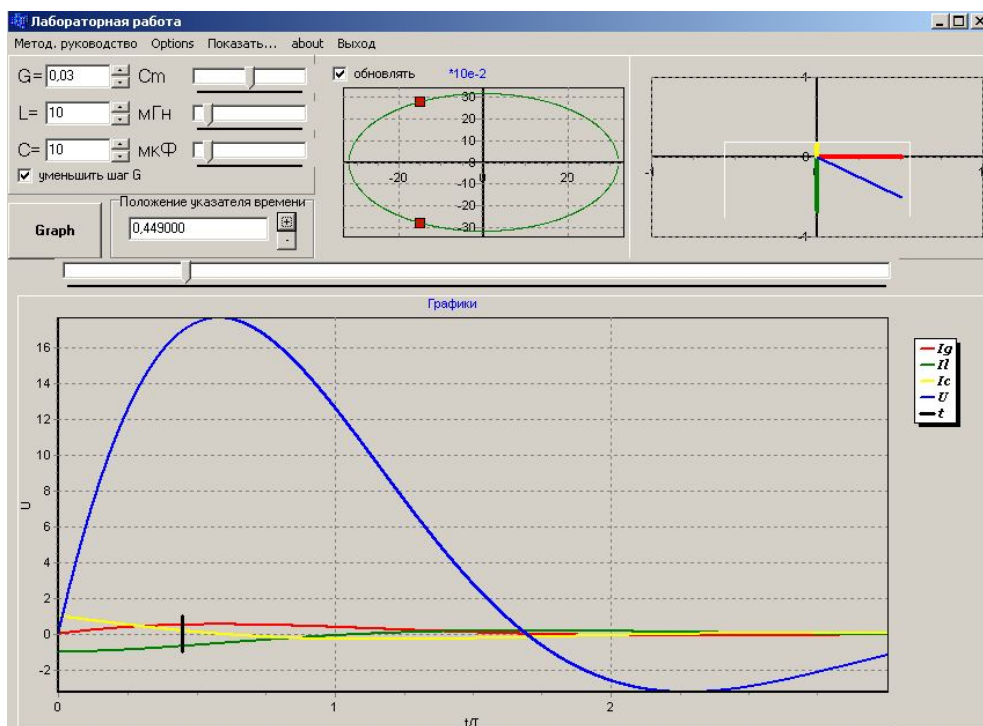


Рисунок 6.1 – Приклад виконання лабораторної роботи

- 6.3 У верхньому правому куті макета наведено розташування коренів характеристичного рівняння (див. п. 4.3) на комплексній площині й векторних діаграм для довільного моменту часу (закладинка “Положение указателя времени” над графіком).
- 6.4 Задля зміни виду коливання треба змінити значення елементів відповідно до домашнього завдання (п. 6.1) і повторити пп. 6.2 та 6.3.

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Схема вимірювання.
- 7.3 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.4 Таблиці та графіки вимірювань.
- 7.5 Розрахунки величин за результатами експерименту.
- 7.6 Висновки.

ДОДАТОК А
Тест-запитання до лабораторних робіт

Лабораторна робота № 3.1а
ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ
У КОЛАХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

- 1 Який режим кола називається стаціонарним?
- 2 Який режим кола називається перехідним?
- 3 За яких умов у колі виникає перехідний процес?
- 4 У яких електричних колах перехідний процес є відсутній?
- 5 Що розуміють під комутацією?
- 6 Що таке ідеальний ключ?
- 7 Що таке старий стаціонарний режим (ССР) електричного кола?
- 8 Що таке новий стаціонарний режим (НСР) електричного кола?
- 9 Як довго триває перехідний процес теоретично?
- 10 Як довго триває перехідний процес практично?
- 11 В який спосіб слід записувати правило комутації для індуктивності?
- 12 В який спосіб слід записувати правило комутації для ємності?
- 13 Що розуміють під початковими умовами кола?
- 14 Що є підґрунтям класичного методу розрахунку перехідних процесів?
- 15 В який спосіб є пов'язані порядок диференційного рівняння й порядок кола?
- 16 Які складові має розв'язування диференційного рівняння?
- 17 Які складові має струм або напруга в перехідному режимі?
- 18 В який спосіб слід записувати характеристичне рівняння кола?
- 19 В який спосіб слід записувати рівняння миттєвого значення напруги на індуктивності?
- 20 В який спосіб слід записувати рівняння миттєвого значення струму в індуктивності?
- 21 В який спосіб слід записувати рівняння миттєвого значення напруги на ємності?
- 22 В який спосіб слід записувати рівняння миттєвого значення струму в ємності?
- 23 Що таке стала часу кола?
- 24 В який спосіб стала часу пов'язана з коренем характеристичного рівняння?
- 25 Який характер носять часові діаграми струмів та напруг у колах першого порядку в перехідному режимі?
- 26 Як поводитьься індуктивність за нульових початкових умов?
- 27 Як поводитьься ємність за нульових початкових умов?
- 28 Як поводитьься індуктивність за $t \rightarrow \infty$?
- 29 Як поводитьься ємність за $t \rightarrow \infty$?
- 30 В який спосіб слід записувати сталу часу RL кола?
- 31 В який спосіб слід записувати сталу часу RC кола?

Лабораторна робота № 3.16
ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ
У КОЛАХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

- 1 Який прилад можна використовувати задля спостереження часових залежностей струмів та напруг?
- 2 Які умови називаються ненульовими?
- 3 Які умови називаються нульовими початковими?
- 4 Чи мають вплив числові значення величин джерел на порядок розрахунків перехідних процесів?
- 5 Якого порядку є коло, якщо в роз'язку диференційного рівняння наявні дві експоненти?
- 6 Чим треба скористатися, щоби визначити сталі інтегрування A (початкові значення експонент)?
- 7 В який спосіб віднаходиться вільна складова (i_B, u_B) ?
- 8 Від чого залежать корені характеристичного рівняння?
- 9 В який спосіб віднаходиться примушена складова $i_{пр}, u_{пр}$?
- 10 Як записати операторне зображення джерела незмінної напруги?
- 11 Чи справедливе твердження, що операторна схема заміщення електричного кола може бути визначена, якщо коло зображено до комутації?
- 12 Корені p_1 та p_2 характеристичного рівняння є дійсні, при цьому перехідний процес коливальний. Чи правильне є це твердження?
- 13 Корені p_1 та p_2 характеристичного рівняння комплексно-спряжені, при цьому перехідний процес аперіодичний. Чи правильне є це твердження?
- 14 Якою є умова аперіодичного перехідного процесу щодо хвильового опору кола?
- 15 В який спосіб зв'язані операторні величини опорів та провідностей з комплексними?
- 16 Що таке початкова умова?
- 17 Що таке вільна складова?
- 18 Що таке порядок кола?
- 19 Чим характеризується стаціонарний режим електричного кола, якщо в колі є джерело сталого впливу?
- 20 У чому полягає причина виникнення перехідних процесів в електричних колах, які містять елементи R, L, C ?
- 21 В який спосіб записати магнітну енергію індуктивності w_L , якою протікає струм i ?
- 22 В який спосіб записати електричну енергію ємності w_C , на затискачах якої є напруга u ?
- 23 Що характеризує примушена складова $i_{пр}$ або $u_{пр}$?
- 24 Що є розв'язком диференційного рівняння?
- 25 У чому полягає суть правила комутації для елемента C ?
- 26 У чому полягає суть правила комутації для елемента L ?
- 27 Які корені характеристичного рівняння кола другого порядку, якщо $R < 2\rho$?

- 28 В який спосіб записати операторний опір послідовного RLC контура?
- 29 Яка умова критичного режиму перехідного процесу для кола другого порядку?
- 30 Яка є умова періодичного режиму перехідного процесу для кола другого порядку?

Лабораторна робота № 3.2

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСТОТНИХ ТА ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

- 1 Що являє собою частотна характеристика?
- 2 Що являє собою часова характеристика?
- 3 Що таке амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)?
- 4 Що таке фазочастотна характеристика (ФЧХ)?
- 5 Що називається передавальною функцією кола?
- 6 Що називається комплексною передавальною функцією (КПФ) кола?
- 7 Що називається операторною передавальною функцією (ОПФ) кола?
- 8 Що таке перехідна функція кола?
- 9 В який спосіб пов'язані комплексна та операторна функції кола?
- 10 В який спосіб слід записати перехідну функцію по операторній передавальній функції кола?
- 11 В який спосіб слід записати перехідну функцію по КПФ?
- 12 Що являє собою перехідна характеристика кола?
- 13 Скільки перехідних функцій можна записати для чотириполюсного кола?
- 14 В який спосіб слід записати сталу часу кола, яке складається з елементів R та C ?
- 15 В який спосіб слід записати сталу часу кола, яке складається з елементів R та L ?
- 16 Як графічно виглядає амплітудно-частотна характеристика кола першого порядку?
- 17 Як графічно виглядає перехідна характеристика кола першого порядку?
- 18 Як зв'язані графіки перехідної й амплітудно-частотної характеристик чотириполюсного кола?
- 19 Що таке імпульсна функція кола?
- 20 Скільки імпульсних функцій можна записати для чотириполюсного кола?
- 21 Як графічно виглядає імпульсна характеристика кола першого порядку?
- 22 В який спосіб зв'язані графіки перехідної й імпульсної функцій кола першого порядку?
- 23 В який спосіб зв'язані графіки передавальної та імпульсної функцій кола першого порядку?
- 24 В який спосіб слід записати операторну перехідну функцію кола, якщо відома комплексна функція?
- 25 В який спосіб слід записати комплексну передавальну функцію, якщо відома операторна передавальна функція?

- 26 В який спосіб слід записати імпульсну функцію кола, якщо відома комплексна передавальна функція?
- 27 В який спосіб слід записати комплексну передавальну функцію, якщо відома імпульсна функція?
- 28 В який спосіб слід записати перехідну функцію кола, якщо відома комплексна передавальна функція?
- 29 В який спосіб слід записати імпульсну функцію кола, якщо відома перехідна?
- 30 В який спосіб слід записати перехідну функцію кола, якщо відома імпульсна?

Лабораторна робота № 3.3 ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДГУКУ КОЛА ЗА РІЗНИХ ВИДІВ СТУПІНЧАСТОГО ВПЛИВУ

- 1 Що називають впливом на коло?
- 2 Що називають відгуком кола?
- 3 Які впливи називають періодичними?
- 4 Які впливи називають регулярними?
- 5 Який спектр мають неперіодичні впливи?
- 6 Який є спектр у періодичних коливань?
- 7 Що називається перехідною функцією кола?
- 8 Скільки видів перехідних функцій можна визначити для чотирьохполюсного кола?
- 9 В який спосіб можна визначити відгук кола, якщо впливом є східчаста функція $u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ U, & t > 0. \end{cases}$?
- 10 Вплив – складна східчаста функція. Яку засаду слід використовувати при розрахунку відгуку кола?
- 11 Вплив запізнюється на час t_0 . В який спосіб слід записати перехідну функцію в цьому разі?
- 12 В який спосіб можна визначити сталу часу кола, що містить елементи R і C ?
- 13 В який спосіб можна визначити сталу часу кола, що містить елементи R і L ?
- 14 В який спосіб можна визначити перехідну функцію кола, якщо відома операторна функція цього кола?
- 15 В який спосіб можна визначити перехідну функцію кола, якщо відома комплексна передавальна функція цього кола?
- 16 Яким методом можна визначити перехідну функцію кола, якщо задано схему кола?
- 17 Чим відрізняються перехідна й амплітудно-частотна характеристики кола першого порядку?
- 18 Чи має розмірність перехідна функція напруги i , якщо так, то яку саме?
- 19 Чи має розмірність перехідна функція струму i , якщо так, то яку саме?

- 20 Чи має розмірність перехідна функція опору і, якщо так, то яку саме?
- 21 Чи має розмірність перехідна функція провідності і, якщо так, то яку саме?
- 22 Чи має розмірність операторна передавальна функція напруги і, якщо так, то яку саме?
- 23 Чи має розмірність операторна передавальна функція струму і, якщо так, то яку саме?
- 24 Як називається метод визначання перехідної функції кола, якщо вплив являє собою довільну функцію часу?
- 25 У яких випадках користуються інтегралом накладання задля визначання перехідної функції кола?

Лабораторна робота № 3.4

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

- 1 Що таке коло зворотного зв'язку?
- 2 За яких умов електричне коло зі зворотним зв'язком генеруватиме коливання?
- 3 Що є основним елементом кола зі зворотним зв'язком?
- 4 Що собою являє чотириполусник зворотного зв'язку?
- 5 Що таке „петльове посилення”?
- 6 Що таке додатний зворотний зв'язок?
- 7 Що таке від'ємний зворотний зв'язок?
- 8 Що таке годограф передавальної функції?
- 9 У якій півплощині має розташовуватися годограф передавальної функції за додатного зворотного зв'язку?
- 10 У якій півплощині повинен розташовуватися годограф передавальної функції за від'ємного зворотного зв'язку?
- 11 Що таке самозбудження кола зі зворотним зв'язком?
- 12 Скільки способів сполучування чотириполусників задля створення кола зі зворотним зв'язком можна представити?
- 13 Що таке стійке електричне коло?
- 14 Що можна стверджувати стосовно стійкості електричного кола, якщо корені характеристичного рівняння цього кола розташовано в лівій півплощині?
- 15 В який спосіб записувати вихідну напругу кола, якщо відомі є корені характеристичного рівняння p_1 та p_2 ?
- 16 Яке коло називається абсолютно стійким?
- 17 Яке коло називається автоколивальним?
- 18 Що називається стаціонарним режимом роботи генератора?
- 19 За якого зворотного зв'язку настає баланс фаз?
- 20 Що можна стверджувати стосовно стійкості системи, якщо корені характеристичного рівняння мають від'ємну дійсну частину?

ДОДАТОК Б

Приклади розв'язування задач модуля 3

Класичний метод розрахунку перехідного процесу у лінійних електричних колах першого порядку

Задача 1 Для кола рис. 1.1 задано:
 $E = 1 \text{ В}$; $R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$; $L = 100 \text{ мГн}$.

Визначити:

- 1) незалежну початкову умову кола $i_L(0_-)$;
- 2) сталу часу кола τ .

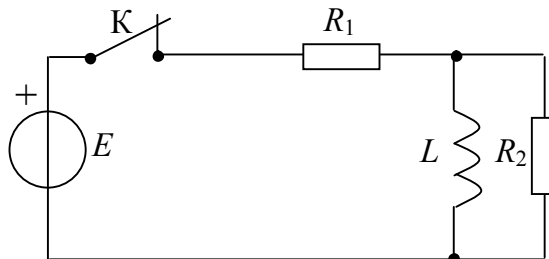


Рисунок 1.1 – Досліджуване коло

Розв'язок

1 Визначимо струм в індуктивності L до комутації. Еквівалентна схема заміщення при цьому має вигляд рис. 1.2.

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_1} = \frac{5}{50} = 0,1 \text{ А.}$$

Для кола рис. 1.1 можна записати:

$$i(0_-) = i(0_+).$$

Отже,

$$i_L(0_+) = \frac{E}{R_1} = 0,1 \text{ А.}$$

$$2 \text{ Стала часу кола } \tau = \frac{L}{R_{\text{екв}}}$$

визначається в режимі після комутації.

$$3 \text{ Визначимо } R_{\text{екв}}: R_{\text{екв}} = R_2.$$

Отже,

$$\tau = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{50} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Задача 2 Для кола рис. 2.1 задано:
 $E = 1 \text{ В}$; $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$;
 $L = 20 \text{ мГн}$.

Треба визначити:

- 1) струм в індуктивності $i_L(t)$ після комутації;
- 2) побудувати часову діаграму струму $i_L(t)$.

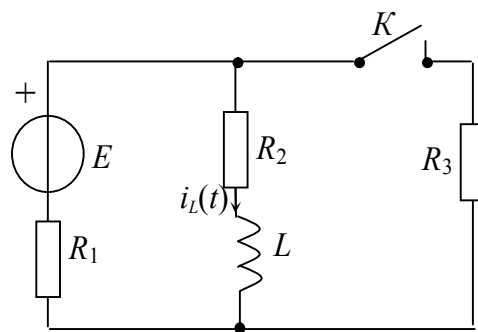


Рисунок 2.1 – Досліджуване коло

Розв'язок

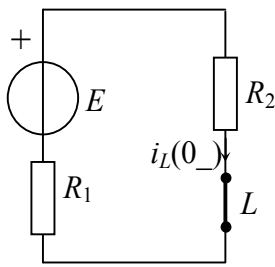


Рисунок 2.2 – Схема заміщення кола до комутації

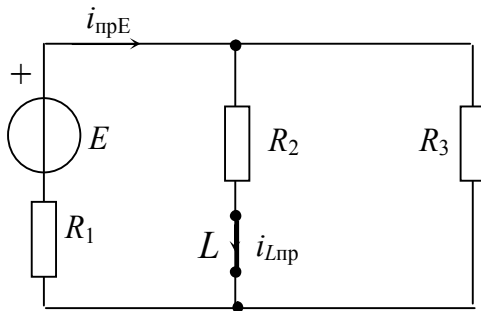


Рисунок 2.3 – Еквівалентна схема заміщення в НСР

1 Визначимо величину струму в індуктивності до комутації ($t < 0$). Еквівалентна схема заміщення при цьому має вигляд рис. 2.2:

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{1}{5 + 10} \cong 0,067 \text{ А.}$$

2 Визначимо значення примушеної складової струму в індуктивності $i_{Lпр}$. Для цього зобразимо схему рис. 2.1 у новому стаціонарному режимі (рис. 2.3).

Величина струму у гілці з джерелом напруги

$$i_{прЕ} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{1}{5 + \frac{10 \cdot 20}{10 + 20}} = 0,085 \text{ А.}$$

Величина струму в індуктивності

$$i_{Lпр} = i_{прЕ} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0,085 \frac{20}{10 + 20} = 0,056 \text{ А.}$$

3 Запишемо розв'язок рівняння в загальному вигляді:

$$i_L(t) = i_{Lпр}(t) + i_{Lв}(t). \quad (2.1)$$

4 Визначимо значення вільної складової струму в індуктивності $i_{Lв}(t)$:

$$i_{Lв} = A e^{pt}.$$

Значення кореня p : $p = -\frac{1}{\tau}$, де $\tau = \frac{L}{R_{екв}}$. Величина

$$R_{екв} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 10 + \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 14 \text{ Ом є еквівалентним опором кола щодо}$$

затискачів індуктивності. Тоді $\tau = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{14} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ с,}$

$$p = -\frac{1}{1,43 \cdot 10^{-3}} = -700 \text{ с}^{-1}.$$

Сталу інтегрування A визначимо, використовуючи правило комутації для індуктивності. Для цього перепишемо рівняння (2.1) за $t = 0$:

$$i(0_-) = i(0_+) = 0,056 + A = 0,067,$$

звідки $A = 0,067 - 0,056 = 0,011$.

Запишемо вираз струму в індуктивності $i_L(t)$ після комутації:

$$i_L(t) = 0,056 + 0,011e^{-700t} \text{ A.} \quad (2.2)$$

Із виразу (2.2) визначимо $i(t)$ за $t = 0$; τ ; 2τ ; 3τ ; ∞ . Результати занесемо до таблиці 2.1.

За даними таблиці 2.1 побудуємо графіки (рис. 2.4).

Таблиця 2.1 – Розрахункові величини

t / τ	0	1	2	3	∞
$i(t), \text{ A}$	0,067	0,059	0,057	0,0565	0,056

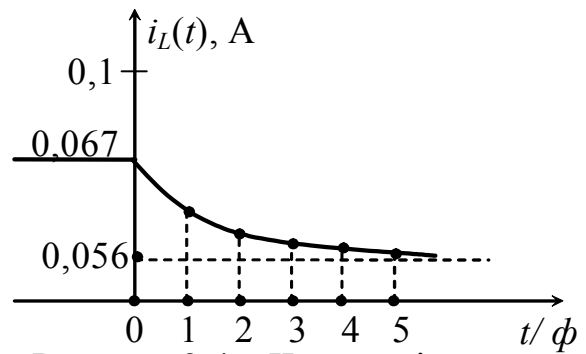


Рисунок 2.4 – Часова діаграма струму індуктивності

Задача 3 Для кола рис. 3.1 задано:

$$J = 0,2 \text{ A}, R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}, \quad C = 50 \text{ мкФ}.$$

Визначити: 1) напругу на ємності $u_C(t)$; 2) побудувати графік зміни напруги на ємності $u_C(t)$.

Розв'язок

1 Визначимо величину напруги на ємності до комутації $u_C(0_-)$, для цього зобразимо еквівалентну схему (рис. 3.2).

$$\text{Вочевидь, що} \\ u_C(0_-) = R_3 \cdot i_3(0_-),$$

$$\text{де } i_3(0_-) = J \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \\ = 0,2 \frac{10}{10 + 10 + 10} = 0,067 \text{ A,} \quad \text{а}$$

$$u_C(0_-) = 10 \cdot 0,067 = 0,67 \text{ В}.$$

2 Визначимо значення примушеної складової напруги на ємності $u_{\text{спр}}$. Для цього зобразимо вихідну схему в новому стаціонарному режимі (рис. 3.3).

Величина напруги

$$u_{\text{спр}} = i_{3\text{спр}} R_3;$$

$$i_{3\text{спр}} = I \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 0,2 \frac{10}{10 + 10} = 0,1 \text{ A,}$$

$$\text{а } u_{\text{спр}} = 0,1 \cdot 10 = 1 \text{ В}.$$

3 Запишемо розв'язок рівняння в загальному вигляді:

$$u_C(t) = u_{\text{спр}} + u_{\text{пр}}(t) \quad (3.1)$$

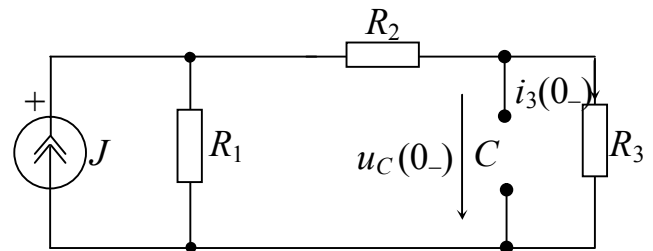


Рисунок 3.2 – Еквівалентна схема заміщення кола до комутації

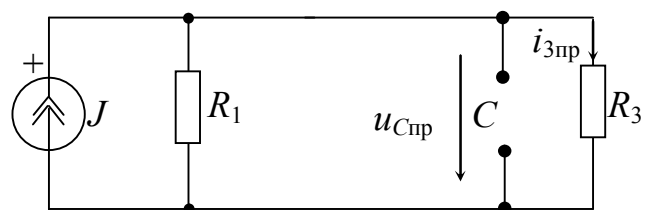
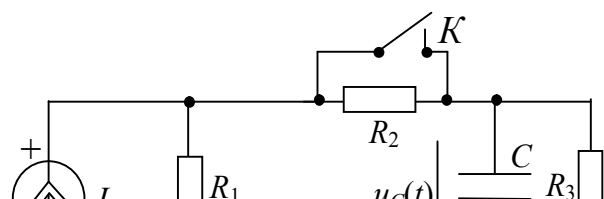


Рисунок 3.3 – Еквівалентна схема заміщення кола в НСР



Визначимо значення вільної складової напруги на ємності:

$$u_{CB}(t) = Ae^{pt}.$$

Значення кореня:

$$p = -\frac{1}{\tau},$$

де $\tau = R_{\text{екв}} C$ – стала часу кола.

Величина

$$R_{\text{екв}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ Ом},$$

де $R_{\text{екв}}$ – еквівалентний опір кола щодо затискачів ємності. Стала часу $\tau = 5 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 0,25 \cdot 10^{-3}$ с. Корінь характеристичного рівняння

$$p = -\frac{1}{0,25 \cdot 10^{-3}} = -4000 \text{ с}^{-1}.$$

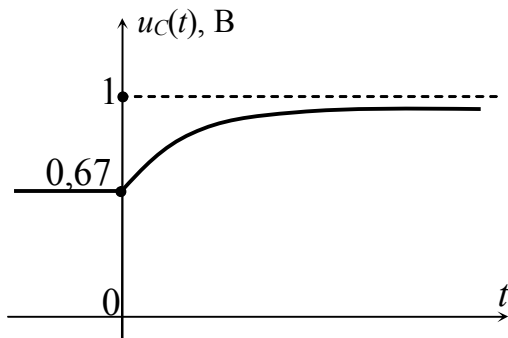


Рисунок 3.4 – Приблизна діаграма напруги ємності

Сталу інтегрування A визначимо, використовуючи правило комутації для ємності. Для цього перепишемо рівняння (3.1) для $t = 0$:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 1 + A = 0,67 \text{ В},$$

звідки $A = 0,67 - 1 = -0,33$.

4 Запишемо рівняння напруги на ємності $u_C(t)$ у перехідному режимі:

$$u_C(t) = 1 - 0,33e^{-4000t} \text{ В}.$$

За цією формулою побудуємо приблизний графік (рис. 3.4).

Класичний метод розрахунку ПП у ЛЕК другого порядку

Задача 4 Для кола рис. 4.1 задано:

$E = 5 \text{ В}; R_1 = 20 \text{ Ом}; R_2 = 40 \text{ Ом};$
 $R_3 = 15 \text{ Ом}; R_4 = 10 \text{ Ом}; C = 30 \text{ мкФ};$
 $L = 40 \text{ мГн}.$

Визначити:

- 1) $i_L(0_-), u_C(0_-);$
- 2) $i_{L\text{пр}}, u_{C\text{пр}}.$

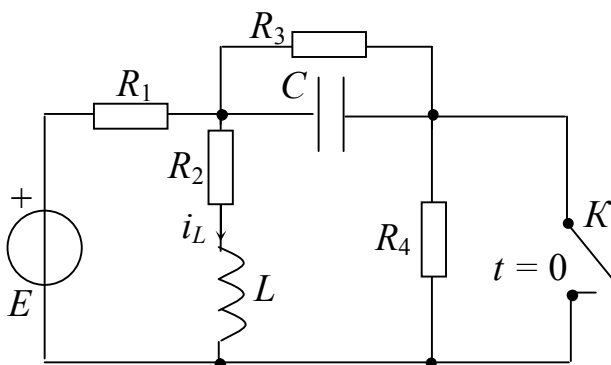


Рисунок 4.1 – Досліджуване коло

Розв'язок

1 Задля віднайдення значень струму в індуктивності $i_L(0_-)$ і напруги ємності $u_C(0_-)$ до комутації зобразимо схему рис.

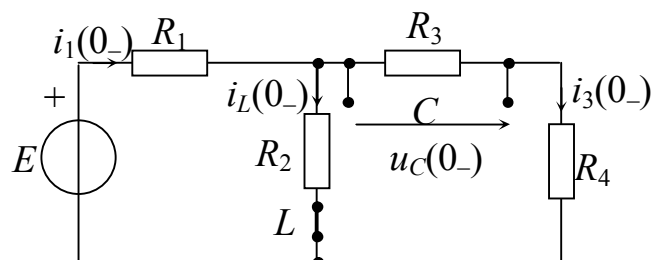


Рисунок 4.2 – Еквівалентна схема заміщення кола в ССР

4.1 у старому стаціонарному режимі (рис. 4.2).

Струм в індуктивності можна визначити за правилом „чужого” опору:

$$i_L(0_-) = i_1(0_-) \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4},$$

де

$$i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{5}{20 + \frac{40(15 + 10)}{40 + 15 + 10}} = 0,14 \text{ A}.$$

Тоді

$$i_L(0_-) = 0,14 \frac{15 + 10}{40 + 15 + 10} = 0,0538 \text{ A},$$

а

$$i_3(0_-) = i_1(0_-) - i_L(0_-) = 0,14 - 0,0538 = 0,086 \text{ A}.$$

Напруга ємності $u_C(0_-) = i_3(0_-) R_3 = 0,086 \cdot 15 = 1,29 \text{ В}$

2 Для визначення примушених значень $i_{L\text{пр}}$ та $u_{C\text{пр}}$ зобразимо схему рис. 4.1 у новому стаціонарному режимі (рис. 4.3).

Струм джерела

$$i_{1\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{5}{20 + \frac{40 \cdot 15}{40 + 15}} = 0,16 \text{ A};$$

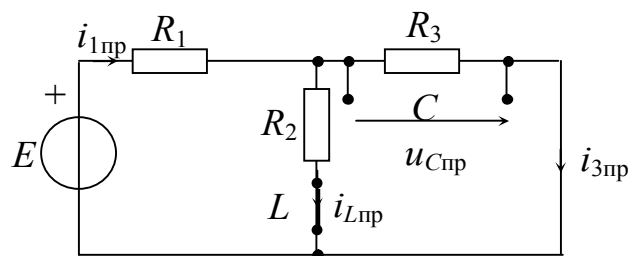


Рисунок 4.3 – Еквівалентна схема заміщення кола в НСР

струм індуктивності

$$i_{L\text{пр}} = i_{1\text{пр}} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0,16 \frac{15}{40 + 15} = 0,044 \text{ A};$$

струм резистора R_3

$$i_{3\text{пр}} = i_{1\text{пр}} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0,16 \frac{40}{55} = 0,116 \text{ A};$$

напруга ємності

$$u_{C\text{пр}} = i_{3\text{пр}} R_3 = 0,116 \cdot 15 = 1,74 \text{ В}.$$

Пряме перетворення Лапласа

Задача 5 Використовуючи пряме перетворення Лапласа, визначити зображення $U(p)$ сигналу $u(t)$ рис. 5.1 у вигляді експонентного імпульсу:

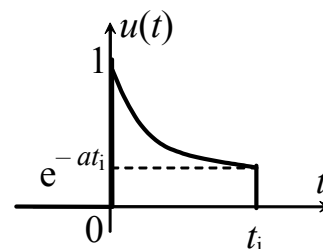


Рисунок 5.1 – Імпульс напруги

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-at}, & 0 \leq t \leq t_i; \\ 0, & t > t_i, \end{cases}$$

де a – позитивне дійсне число.

Розв'язок

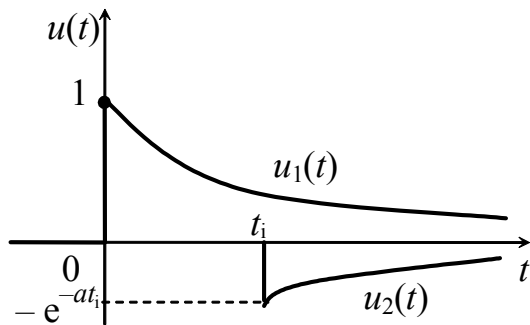


Рисунок 5.2 – Досліджуваний сигнал у вигляді суми двох функцій

На підставі прямого перетворення Лапласа можна записати:

$$\begin{aligned} U(p) &= \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt = \int_0^{t_i} e^{-at} e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{p+a} \left(1 - e^{-(p+a)t_i} \right). \end{aligned}$$

Такий самий результат можна здобути в інший спосіб. Для цього вихідну функцію $u(t)$ можна подати як суму двох функцій (рис. 5.2):

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

де $u_1(t) = e^{-at}$; $u_2(t) = -e^{-a(t-t_i)}$.

Зображення $u_1(t)$ має вигляд (див. табл. 2.1 перетворення Лапласа даного посібника):

$$U_1(p) = \frac{1}{p+a}.$$

Зображення $u_2(t)$ відповідно до теореми запізнювання:

$$U_2(p) = -\frac{1}{p+a} e^{-at_i} e^{-pt_i}.$$

Через лінійність перетворення Лапласа зображення функції $U(p)$ дорівнюватиме сумі зображень:

$$U(p) = U_1(p) + U_2(p);$$

$$U(p) = \frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+a} e^{-at_i} e^{-pt_i} = \frac{1}{p+a} \left(1 - e^{-(p+a)t_i} \right).$$

**Операторний метод розрахунку
перехідних процесів
у лінійних електричних колах**

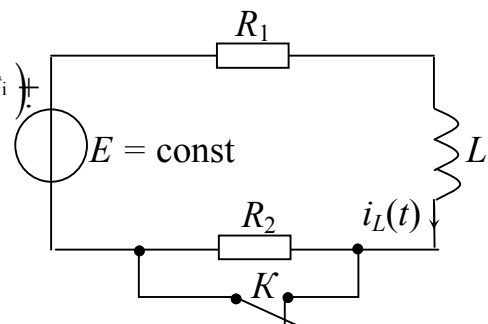


Рисунок 6.1 – Досліджуване коло

Задача 6 У колі рис. 6.1 спрацьовує ключ K у момент часу $t = 0$ і вводить резистор R_2 . Операторним методом визначити $i_L(t)$ за $t \geq 0$, якщо відомі E , R_1 , R_2 , L . Побудувати графік $i_L(t)$.

Розв'язок

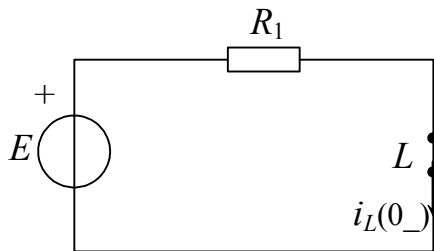


Рисунок 6.2 – Еквівалентна схема заміщення кола до комутації

1 Коло рис. 6.1 розглядається в старому стаціонарному режимі ($t < 0$) (рис. 6.2).

Оскільки в колі діє джерело постійної напруги E , то опір індуктивності дорівнює нулеві й струм у цьому разі можна записати як

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_1} - \text{ненульова початкова умова.}$$

2 Складемо операторну схему заміщення (коло розглядаємо після комутації) (рис. 6.3).

3 За законом Ома визначимо зображення струму індуктивності:

$$I_L(p) = \frac{\frac{E}{p} + Li_L(0_-)}{R_1 + R_2 + pL} = \frac{E + pL \cdot i_L(0_-)}{p[pL + (R_1 + R_2)]}. \text{ В}$$

Використовуючи таблицю відповідностей за Лапасом, визначимо оригінал $i_L(t)$. Для цього зображення $I_L(p)$ подамо у вигляді суми зображень:

$$I_L(p) = \frac{E}{p[pL + (R_1 + R_2)]} + \frac{Li_L(0_-)}{[pL + (R_1 + R_2)]}.$$

Щоби здобути зображення табличної форми, чисельник і знаменник кожного

дробу розділимо на L :

$$I_L(p) = \frac{E}{L} \frac{1}{p \left[p + \frac{(R_1 + R_2)}{L} \right]} + \frac{i_L(0_-)}{\left[p + \frac{(R_1 + R_2)}{L} \right]}.$$

Оскільки $i_L(0_-) = \frac{E}{R_1}$, то

$$I_L(p) = \frac{E}{L} \frac{1}{p \left[p + \frac{(R_1 + R_2)}{L} \right]} + \frac{E}{R_1} \frac{1}{\left[p + \frac{(R_1 + R_2)}{L} \right]}.$$

Зображення струму індуктивності подано у вигляді суми зображень. Оригінал $i(t)$ визначатиметься як сума оригіналів, відповідних кожному зображенню:

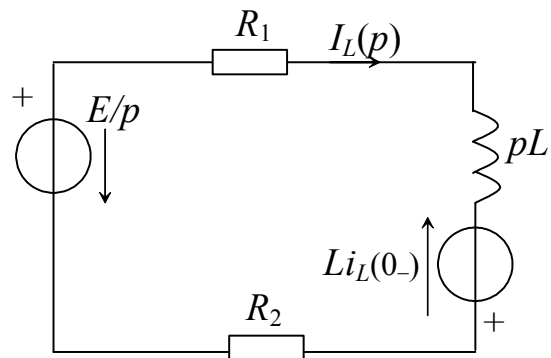


Рисунок 6.3 – Операторна схема заміщення кола

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= \frac{E}{L(R_1 + R_2)} \left(1 - e^{-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t} \right) + \frac{E}{R_1} e^{-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t} = \\
&= \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t} + \frac{E}{R_1} e^{-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t} = \\
&= \frac{E}{R_1 + R_2} + \left(\frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t} = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{E \cdot R_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t}. \quad (6.1)
\end{aligned}$$

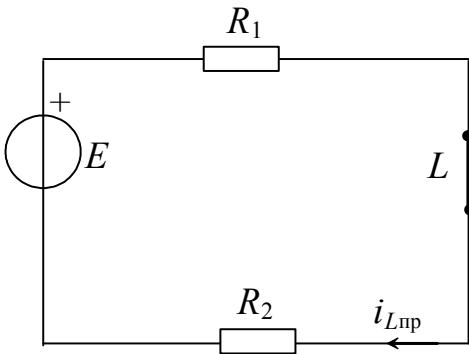


Рисунок 6.4 – Еквівалентна схема заміщення кола в НСР

Перевірка. Покладемо $t = 0_-$, що відповідає початковим умовам (див. рис. 6.2):

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{ER_2}{R_1(R_1 + R_2)} = \frac{E}{R_1}.$$

Покладемо $t \rightarrow \infty$, що відповідає новому стаціонарному режиму (див. рис. 6.4):

$$i_{Lпр} = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Побудуємо приблизний графік $i(t)$ (рис. 6.5), де $\tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$.

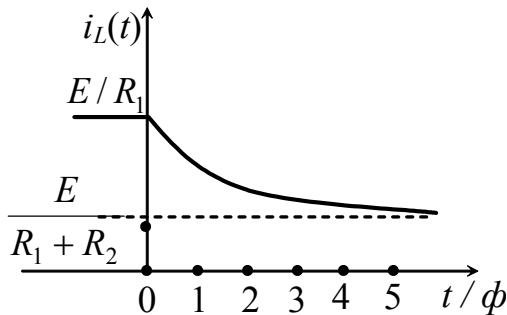


Рисунок 6.5 – Приблизна часова діаграма струму індуктивності

Пункт 4 (визначання оригіналу) можна виконати, використовуючи теорему розкладання. Дістане в пункті 3 зображення струму індуктивності має нульовий корінь у знаменнику. Тому при визначанні оригіналу використаємо вираз (2.24) даного посібника:

$$I_L(p) = \frac{E + pL \cdot i_L(0)}{p[pL + (R_1 + R_2)]} = \frac{E + pL \frac{E}{R_1}}{p[pL + (R_1 + R_2)]},$$

тобто

$$I_L(p) = \frac{M(p)}{pN_1(p)}.$$

Знаменник має корені:

$$p_0 = 0 \quad \text{й} \quad p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{L}.$$

Похідна $N'_1(p) = L$

$$\frac{M(0)}{N_1(0)} = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{E + \left(-\frac{R_1 + R_2}{L}\right)L \frac{E}{R_1} e^{-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t}}{\left(-\frac{R_1 + R_2}{L}\right)L} = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{ER_1 - ER_1 - ER_2}{-R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t} = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{ER_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t}. \quad (6.2)$$

Вирази (6.1) та (6.2) збігаються. Отже, результат розв'язку задачі не залежить від способу її розв'язування.

Задача 7 Для кола рис. 7.1 скласти рівняння методом вузлових напруг в операторній формі.

Розв'язок

Це приклад кола з ненульовими початковими умовами. Задля визначення початкових умов розглянемо коло у старому стаціонарному режимі (рис. 7.2).

Струм індуктивності (у колі)

$$i_L(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3};$$

напруга ємності

$$u_C(0_-) = i_L(0_-) \cdot R_2.$$

Отже, операторна схема заміщення для заданого кола має вигляд рис. 7.3.

Коло рис. 7.3 містить два непереборних вузли. Обравши за базисний вузол „0”, складемо рівняння методом вузлових напруг для вузла 1. У загальному вигляді:

$$U_{10}(p) \cdot Y_{11}(p) = J_{11}(p),$$

і для шуканого кола

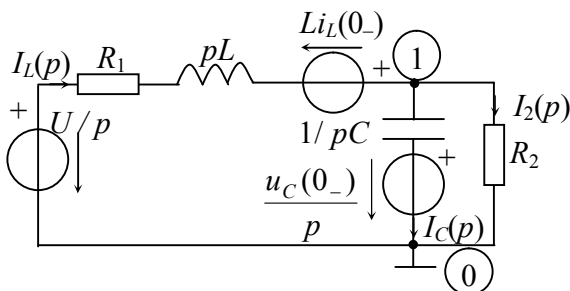


Рис. 7.3 – Операторна схема заміщення кола

$$U_{10}(p) \left(\frac{1}{R_1 + pL} + pC + \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{U}{p} + Li_L(0_-) \right) \frac{1}{(R_1 + pL)} + \frac{u_C(0_-)}{p} pC.$$

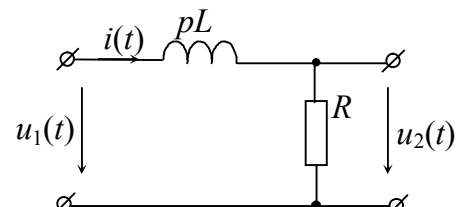


Рис. 8.1 – Досліджуване коло

Перехідна функція кола

Задача 8 Для кола рис. 8.1 знайти перехідну функцію напруги $h_{uu}(t)$ і побудувати графік.

Розв'язок:

1 За означенням перехідної функції, якщо

$$u_1(t) = 1(t),$$

то

$$u_2(t) \equiv h(t).$$

2 Перехідну функцію віднайдемо операторним методом. Для цього зобразимо операторну схему заміщення для кола рис. 8.1, враховуючи, що початкові умови нульові (рис. 8.2).

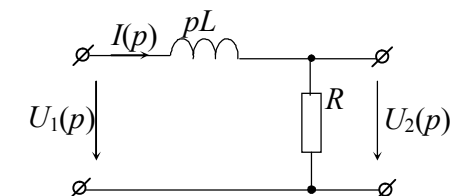


Рисунок 8.2 – Коло в операторній формі

3 Зображення одиничної функції $1(t)$:

$$u_1(t) = 1(t) \Leftrightarrow U_1(p) = \frac{1}{p}.$$

4 За законом Ома зображення напруги на виході чотириполівника дорівнює:

$$U_2(p) = I(p)R,$$

де

$$I(p) = \frac{1/p}{R + pL}.$$

Тоді:

$$U_2(p) = \frac{R}{p(R + pL)} = \frac{R}{L} \frac{1}{p \left(p + \frac{R}{L} \right)}.$$

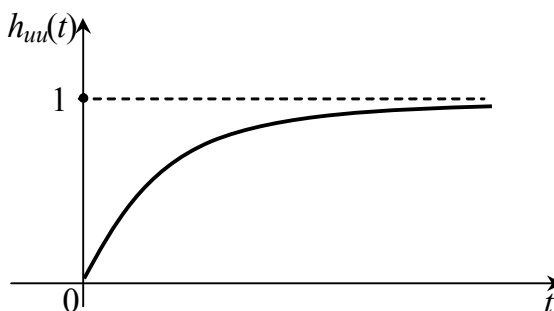


Рисунок 8.3 – Перехідна характеристика кола

5 Оригінал $u_2(t)$ віднайдемо за таблицею Лапласа:

$$h(t) \equiv u_2(t) = 1 - e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (8.1)$$

6 Приблизний графік перехідної характеристики кола $h(t)$ за (8.1) має вигляд рис. 8.3.

Слід зазначити, що розглянуте коло рис. 8.1 є інтегрувальним колом, для якого в розділі 1.3 „Комплексна передавальна функція кола” подано графік АЧХ. З порівняння графіків перехідної характеристики й АЧХ доходимо висновку, що:

$$h_{uu}(0) = H(\infty);$$

$$h_{uu}(\infty) = H(0).$$

Доведено, що для будь-якого ЛЕК першого порядку перехідна характеристика $h(t)$ і частотна $H(\omega)$ мають взаємообернений характер.

Операторна передавальна функція кола

Задача 9 Задано операторну передавальну функцію напруги кола рис. 9.1

$$H_{uu}(p) = \frac{b_1 p}{p + a_0}$$

і зображення впливу

$$u_1(t) \Leftrightarrow U_1(p) = \frac{U}{p}$$

Визначити відгук кола $u_2(t)$ і побудувати графік $u_2(t)$.

Розв'язок

1 Визначимо зображення $U_2(p)$ відгука кола $u_2(t)$:

$$U_2(p) = U_1(p) \cdot H_{uu}(p) = \frac{U}{p} \frac{b_1 p}{p + a_0} = \frac{U b_1}{p + a_0}. \quad (9.1)$$

2 Перейдемо від зображення (9.1) до оригіналу $u_2(t)$, використовуючи таблицю перетворення Лапласа:

$$U_2(p) = \frac{U b_1}{p + a_0} \Leftrightarrow U b_1 e^{-a_0 t} = u_2(t). \quad (9.2)$$

3 Згідно з (9.2) побудуємо приблизний графік $u_2(t)$ (рис. 9.2).

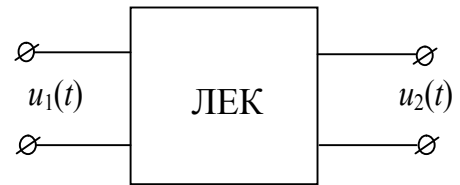


Рисунок 9.1 – Досліджуване коло

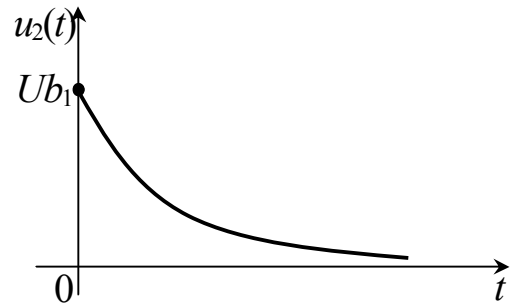


Рисунок 9.2 – Часова діаграма відгук у

Імпульсна функція кола

Задача 10 Для кола рис. 8.1 визначити імпульсну функцію напруги $g_{uu}(t)$ і побудувати її графік.

Розв'язок:

1 Задля визначення імпульсної функції кола використаємо перехідну функцію, віднайдену в задачі 8:

$$h_{uu}(t) = 1 - e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ а } g_{uu}(t) = h'_{uu}(t) + h(0).$$

2 Продиференціюємо вираз перехідної функції:

$$h'_{uu}(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (10.1)$$

Зробимо нормування імпульсної функції:

$$\hat{g}(t) = \tau \cdot g(t) = \frac{L}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

3 За виразом (10.1) побудуємо приблизний графік імпульсної характеристики кола $\hat{g}_{uu}(t)$, задаючи значення: $t/\tau = 0, 1, 2, \dots$ (рис. 10.1).

Зауваження. Задачі 8 та 10 можна також

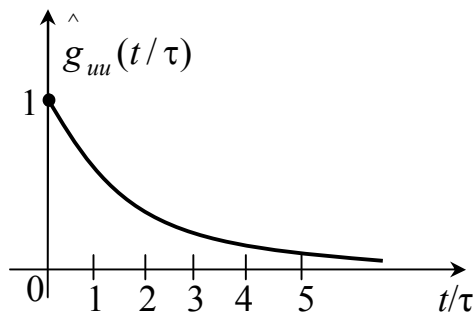


Рисунок 10.1 – Імпульсна характеристика кола

розв'язати, використовуючи операторну передавальну функцію $H(p)$, надто якщо вона заздалегідь є відома, для аналізованого кола. У таких випадках визначають зображення перехідної функції:

$$h(t) \Leftrightarrow H(p) \frac{1}{p},$$

а потім від зображення переходять до оригіналу $h(t)$ у відомі способи.

Зображенням імпульсної функції є операторна функція (див. підрозділ 2.5 ч. 1 даного посібника):

$$g(t) \Leftrightarrow H(p),$$

а потім від зображення переходять до оригіналу, визначаючи в такий спосіб імпульсну функцію кола $g(t)$. Імпульсну функцію слід спочатку унормувати, а потім будувати характеристику.

Визначання відгуку методом накладання

Задача 11 На вхід кола рис. 11.1 подається напруга $u_1(t)$ (рис. 11.2).

$$u_1(t) = \begin{cases} U, & 0 \leq t < t_1; \\ 2U, & t_1 \leq t < 2t_1; \\ 0, & t \geq 2t_1. \end{cases}$$

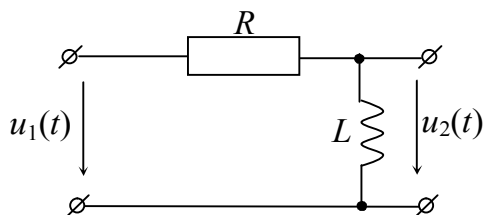


Рисунок 11.1 – Досліджуване коло

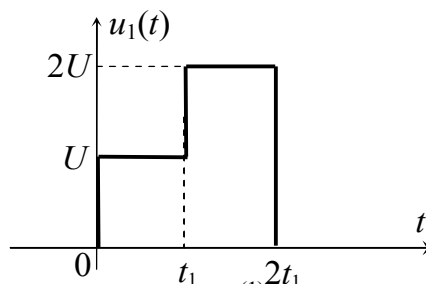


Рисунок 11.2 – Функція впливу

Треба:

- 1) визначити відгук $u_2(t)$ методом накладання;
- 2) побудувати графік $u_2(t)$.

Розв'язок

1 Вхідну напругу $u_1(t)$ за допомогою одиничної функції $1(t)$ можна подати у вигляді трьох східчастих складових (рис. 11.3):

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + u_1^{(3)} = \\ &= U \cdot 1(t) + U \cdot 1(t - t_1) - 2U \cdot 1(t - 2t_1). \end{aligned}$$

2 Відгук кола на ці три складові впливу відповідно є:
для $0 \leq t < t_1$

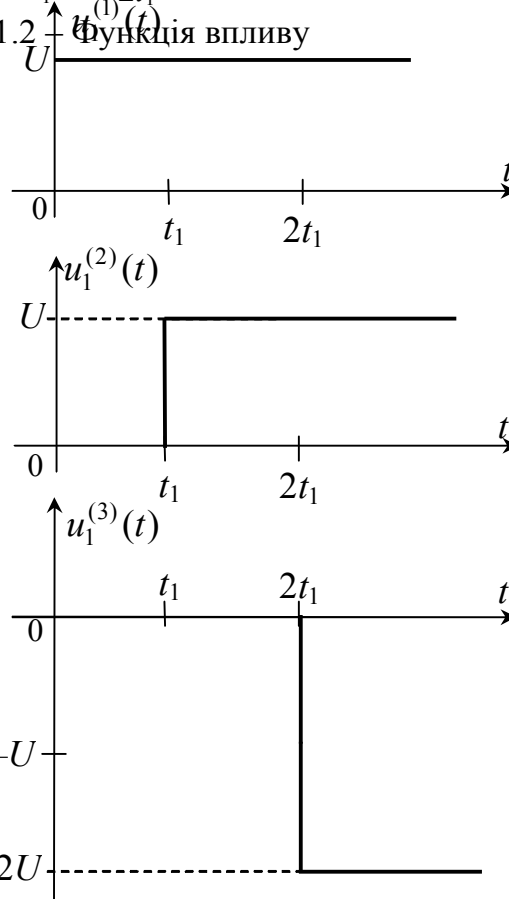


Рисунок 11.3 – Розкладання функції впливу на три складові

$$u_2(t) = U \cdot h_{uu}(t), ;$$

для $t_1 \leq t < 2t_1$;

$$u_2(t) = U \cdot h_{uu}(t) + U \cdot h_{uu}(t - t_1),$$

для $t \geq 2t_1$,

$$u_2(t) = U \cdot h_{uu}(t) + U \cdot h_{uu}(t - t_1) - \\ - 2U \cdot h_{uu}(t - 2t_1),$$

де $h_{uu}(t)$ – перехідна функція напруги кола;

$h_{uu}(t - t_1)$ – перехідна функція напруги кола, зміщена на час t_1 ;

$h_{uu}(t - 2t_1)$ – перехідна функція напруги кола, зміщена на час $2t_1$.

3 Визначимо перехідну функцію напруги кола

$$h_{uu}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p} H_{uu}(p)$$

операторним методом.

Для цього треба визначити операторну передавальну функцію напруги кола $H_{uu}(p)$:

$$H_{uu}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{I(p)pL}{I(p)(pL + R)} = \frac{pL}{pL + R} = \frac{p}{p + \frac{R}{L}}.$$

Тоді

$$h(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p} \frac{p}{p + \frac{R}{L}} = \frac{1}{p + \frac{R}{L}}. \quad (11.1)$$

Зображенню (11.1) у таблиці Лапласа відповідає оригінал $e^{-\frac{R}{L}t}$. Отже,

$$h(t) = e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де τ – стала часу кола RL , $\tau = \frac{L}{R}$.

4 Задамо чисельні значення для цього кола: $R = 10$ Ом; $L = 0,1$ Гн; $U = 10$ В; $t_1 = 10^{-2}$ с. Відгук кола відшукуємо окремо на кожному з інтервалів неперервності впливу $u_1(t)$:

1) $0 \leq t < t_1$:

$$u_2(t) = 10 e^{-10^2 t}, \text{ В}; \quad (11.2)$$

за $t = 0$ маємо $u_2(0) = 10$ В;

за $t = t_1$ маємо $u_2(t_1) = 10 e^{-10^2 \cdot 10^{-2}} = 10 e^{-1} = 3,67$ В.

2) $t_1 \leq t < 2t_1$:

$$u_2(t_1) = 10e^{-10^2 t} + 10e^{-10^2(t-10^{-2})} \text{ В}; \quad (11.3)$$

за $t = t_1$ маємо

$$u_2(t_1) = 10e^{-10^2 \cdot 10^{-2}} + 10e^{-10^2(10^{-2}-10^{-2})} = 10e^{-1} + 10e^0 = 3,67 + 10 = 13,67 \text{ В};$$

за $t = 2t_1$ маємо

$$u_2(2t_1) = 10e^{-10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} + 10e^{-10^2(2 \cdot 10^{-2}-10^{-2})} = 10e^{-2} + 10e^0 = 1,35 + 3,67 = 5,02 \text{ В}.$$

3) $t \geq 2t_1$:

$$u_2(t_1) = 10e^{-10^2 t} + 10e^{-10^2(t-10^{-2})} - 2 \cdot 10e^{-10^2(t-2 \cdot 10^{-2})}, \text{ В}; \quad (11.4)$$

за $t = 2t_1$ маємо

$$\begin{aligned} u_2(2t_1) &= 10e^{-10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} + 10e^{-10^2(2 \cdot 10^{-2}-10^{-2})} - 2 \cdot 10e^{-10^2(2 \cdot 10^{-2}-2 \cdot 10^{-2})} = \\ &= 10e^{-2} + 10e^{-1} + 20e^0 = 1,35 + 3,67 - 20 = -14,98 \text{ В}; \end{aligned}$$

за $t \rightarrow \infty$ маємо

$$u_2(\infty) = 0.$$

5 Результати чисельних розрахунків (п. 4) зводимо до таблиці 11.1, а потім будуємо графік відгуку $u_2(t)$ (рис. 11.4).

Таблиця 11.1 – Результати чисельних розрахунків

t/t_1	$t, \text{ с}$	$u_2(t), \text{ В}$	Розрахункові формули
0	0	10	(11.2)
0,5	$0,5 \cdot 10^{-2}$	6,07	
1	10^{-2}	3,67	
1	10^{-2}	13,67	(11.3)
1,5	$1,5 \cdot 10^{-2}$	8,3	
2	$2 \cdot 10^{-2}$	5,02	
2	$2 \cdot 10^{-2}$	-14,98	(11.4)
2,5	$2,5 \cdot 10^{-2}$	-9,09	
∞	∞	0	

Задача 12 На вхід кола рис. 12.1 подається напруга $u_1(t)$ у вигляді експонентного імпульсу (рис. 12.2), де t_i – тривалість імпульсу; a – дійсне додатне число.

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ U e^{-at}, & 0 \leq t < t_i; \\ 0, & t \geq t_i. \end{cases}$$

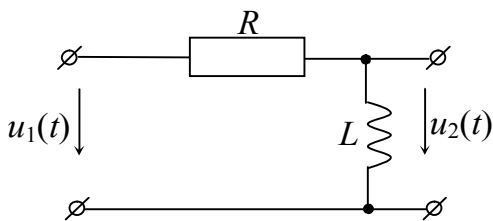


Рисунок 12.1 – Досліджуване коло

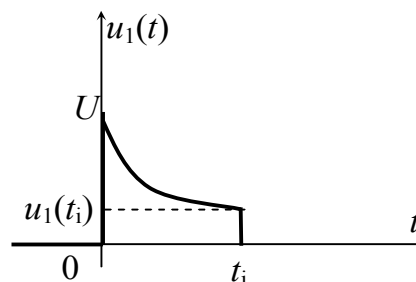


Рисунок 12.2 – Вхідний вплив

Треба:

- 1) визначити відгук кола $u_2(t)$;
- 2) побудувати графік $u_2(t)$.

Розв'язок

1 Визначимо відгук кола $u_2(t)$ за допомогою інтеграла Дюамеля. Для цього треба знати перехідну функцію напруги $h_{uu}(t)$ кола. Цю функцію вже визначено в задачі 11: $h_{uu}(t) = e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$. Оскільки вплив $u_1(t)$ має один розрив першого

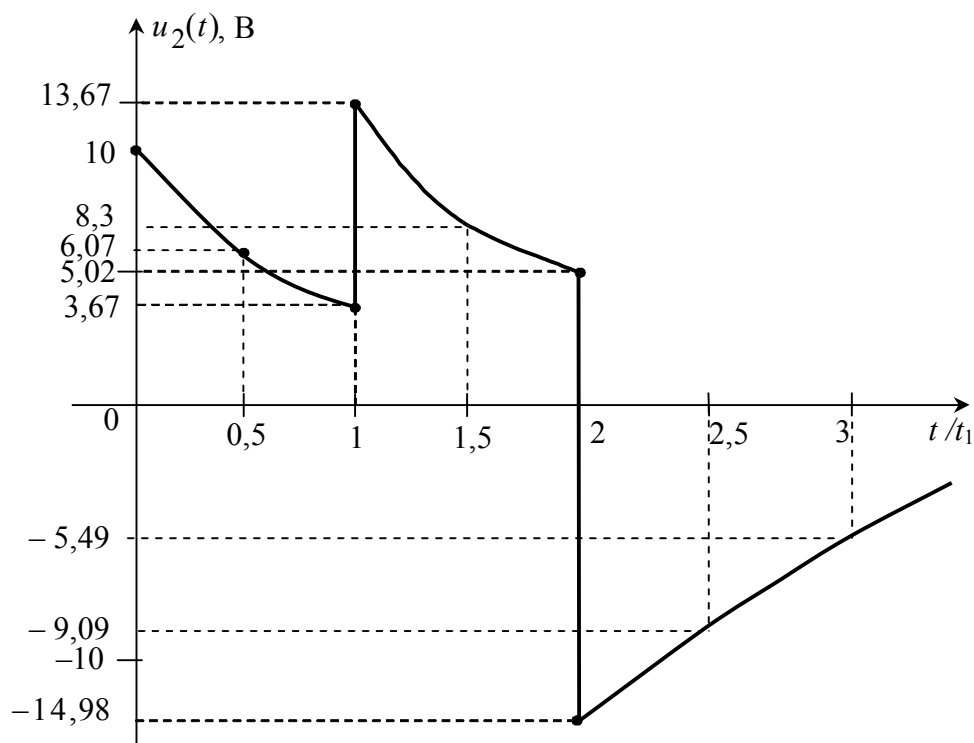


Рисунок 11.4 – Часова діаграма відгуку

роду за $t = t_i$, то відгук кола визначаємо для двох інтервалів неперервності впливу окремо (1.30):

1) $0 \leq t < t_i$:

$$u_2(t) = u_1(0)h_{uu}(t) + \int_0^t u_1'(0)h_{uu}(t-x)dx;$$

2) $t \geq t_i$:

$$u_2(t) = u_1(0)h_{uu}(t) + \int_0^{t_i} u_1'(0)h_{uu}(t-x)dx - u_1(t_i)h_{uu}(t-t_i).$$

У даній задачі $u_1(0) = U$; $u_1'(t) = -aUe^{-ax}$; $u_1(t_i) = Ue^{-at_i}$; $h_{uu}(t) = e^{-\frac{R}{L}t}$; $h_{uu}(t-x) = e^{-\frac{R}{L}(t-x)}$; $h_{uu}(t-t_i) = e^{-\frac{R}{L}(t-t_i)}$.

Тоді для інтервалу 1

$$u_2(t) = Ue^{-\frac{R}{L}t} + \int_0^t (-aUe^{-ax})e^{-\frac{R}{L}(t-x)}dx = -Ue^{-\frac{R}{L}t} \left[1 + \frac{aL}{R-aL} \left(1 - e^{\frac{R-aL}{L}t} \right) \right]; \quad (12.1)$$

для інтервалу 2

$$\begin{aligned} u_2(t) &= Ue^{-\frac{R}{L}t} + \int_0^{t_i} (-aUe^{-ax})e^{-\frac{R}{L}(t-x)}dx - Ue^{-at_i}e^{-\frac{R}{L}(t-t_i)} = \\ &= Ue^{-\frac{R}{L}t} \left[1 + \frac{aL}{R-aL} \left(1 - e^{\frac{R-aL}{L}t_i} \right) - e^{\frac{R-aL}{L}t_i} \right]. \end{aligned} \quad (12.2)$$

2 Задамо чисельні значення для цієї задачі: $R = 10$ Ом; $L = 0,1$ Гн; $a = 2$; $U = 2$ В; $t_i = 10^{-2}$ с.

Для інтервалу 1 маємо вираз відгуку кола згідно з (12.1):

$$u_2(t) = 2e^{-100t} \left[1 + 0,0204 \left(1 - e^{\frac{10-2 \cdot 0,1}{0,1}t} \right) \right], \text{ В.}$$

За $t = 0$

$$u_2(0) = 2 \text{ В;}$$

за $t = t_i$

$$u_2(t_i) = 0,744 \text{ В.}$$

Для інтервалу 2 маємо вираз відгуку кола згідно з (12.2):

$$u_2(t) = 2 \frac{10}{10 - 2 \cdot 0,1} e^{-100t} \left(1 - e^{\frac{10-2 \cdot 0,1}{0,1}t} \right), \text{ В.}$$

За $t = t_i$

$$u_2(t_i) = -1,247 \text{ В;}$$

за $t \rightarrow \infty$ маємо

$$u_2(\infty) = 0.$$

3 Результати чисельних розрахунків (п. 2) зводимо до таблиці 12.1, а потім будуємо графік відгуку (рис. 12.3).

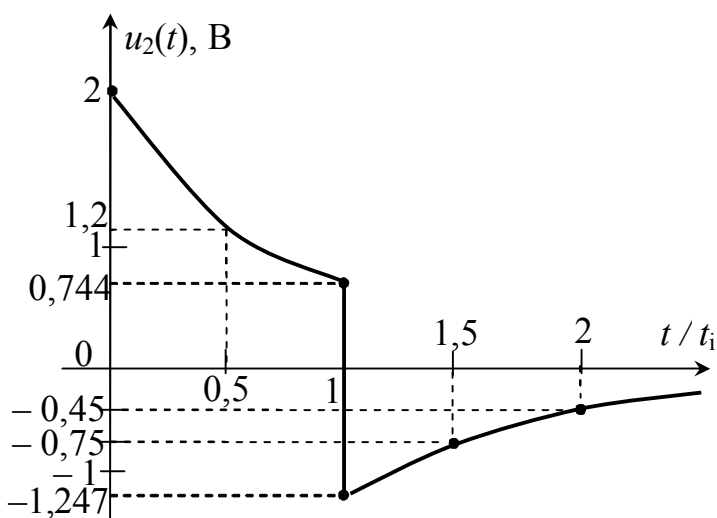


Рисунок 12.3 – Часова діаграма відгуку

Таблиця 12.1 – Результати чисельних розрахунків

t / t_1	$t, \text{с}$	$u_2(t), \text{В}$	Розрахункові формули
0	0	2	(12.1)
0,5	$0,5 \cdot 10^{-2}$	1,2	
1	10^{-2}	0,744	
1	10^{-2}	-1,247	(12.2)
1,5	$1,5 \cdot 10^{-2}$	-0,755	
2	$2 \cdot 10^{-2}$	-0,45	
∞	∞	0	

4 В разі збільшення тривалості імпульсу t_i вхідної напруги $u_1(t)$ часова діаграма рис. 12.3 зміниться: за $t = t_i$ стрибок відгуку $u_2(t)$ опуститься нижче. Наприклад, нехай тривалість імпульсу вхідної напруги збільшиться вп'ятеро: $t_i = 5 \cdot 10^{-2} \text{ с}$.

Здобудемо результати розрахунків, аналогічних до п. 3, які зведемо до таблиці 12.2.

Таблиця 12.2 – Результати чисельних розрахунків за збільшення імпульсу вп'ятеро

t / t_1	$t, \text{мс}$	$u_2(t), \text{В}$
0	0	2
1	50	0,014
1	50	-1,833
∞	∞	0

Згідно з табл. 12.2 побудуємо часову діаграму відгуку $u_2(t)$ (рис. 12.4).

5 Якщо не збільшувати тривалість імпульсу t_i вхідної напруги $u_1(t)$, але збільшити коефіцієнт a показника експоненти вхідної напруги $u_1(t)$, часова діаграма відгуку виглядатиме аналогічно рис. 12.4.

Пропонується студентам перевірити це самостійно.

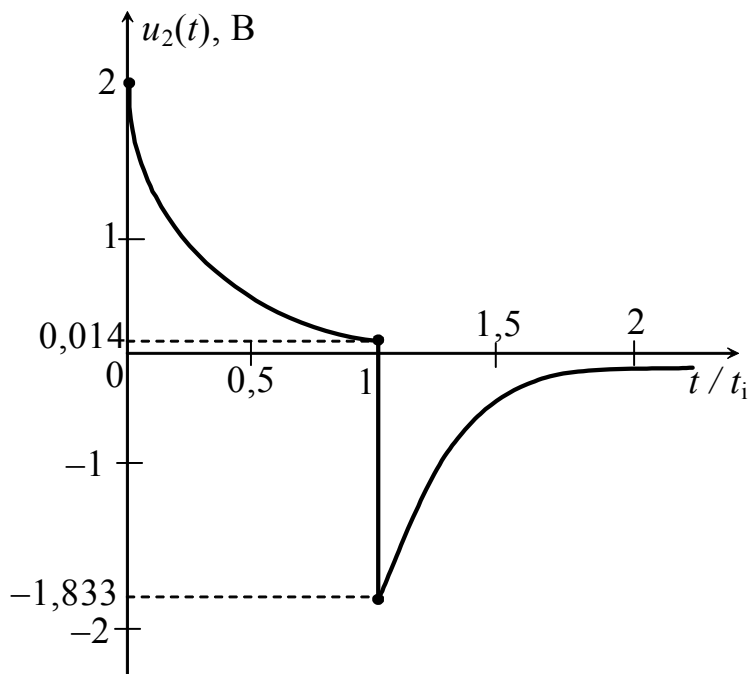


Рисунок 12.4 – Часова діаграма відгуку за збільшення тривалості імпульсу вп'ятеро

Навчально-методичне видання

**АРБУЗНИКОВА Наталія Федорівна
КАЛАШНИКОВ Анатолій Юрійович
ШКУЛПА Альфред Васильович**

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ

Модуль 3

Часові та операторні методи аналізу електричних кіл

Частини 1 та 2

*Навчально-методичний посібник
для бакалаврів*

Редактор

Комп'ютерне верстання

Ращупкіна І. В.

Корнійчук Є. С.