

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ІМ. О.С. ПОПОВА

Кафедра телебачення та радіомовлення

**Методичні вказівки до лабораторних робіт
з курсу**

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

для студентів ННІ РТІБ

Напрямок підготовки: 6.050901 “Радіотехніка”

Одеса 2015

Рецензент: **Баляр В.Б.**

Укладачі: **Ошаровська О.В., Устінов С.С., Мазуркевич О.Ф.,
Патласенко Н.О.**

Методичні вказівки містять порядок виконання лабораторних робіт з курсу “Цифрова обробка сигналів”, ключові положення, домашні та лабораторні завдання, контрольні питання.

Методичні вказівки призначено студентам усіх форм навчання за напрямом “Радіотехніка” для здобуття практичних знань студентами, які вивчають дисципліни “Цифрова обробка сигналів”, а також можуть бути корисними студентам, що навчаються за спеціальністю “Апаратура радіозв’язку, радіомовлення та телебачення” ОНАЗ ім. О.С. Попова при виконанні завдань з курсів “Аудіовізуальні та мультимедійні системи”, “Новітні аудіовізуальні та мультимедійні технології” та під час дипломного проектування.

СХВАЛЕНО

на засіданні кафедри телебачення та радіомовлення
і рекомендовано до друку.
Протокол № 4 від 28.11.2014 р.

ЗАТВЕРДЖЕНО

методичною радою
ОНАЗ ім. О.С. Попова.
Протокол № 3 від 24.03.2015 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	
<i>Лабораторна робота № 1. ДОСЛІДЖЕННЯ ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ.....</i>	
<i>Лабораторна робота № 2. СКАЛЯРНЕ КВАНТУВАННЯ СИГНАЛІВ. 19</i>	
<i>Лабораторна робота № 3. ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ ЗАСТОСУВАНЬ ЦОС.....</i>	
<i>Лабораторна робота № 4. СИНТЕЗ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ ЗІ СКІНЦЕВОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ.....</i>	
<i>Лабораторна робота № 5. СИНТЕЗ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ З НЕСКІНЕЧНОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ.....</i>	
<i>Лабораторна робота № 6. ОБРОБЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ У СЕРЕДОВИЩІ MatLab.....</i>	

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна “Цифрова обробка сигналів” складається з одного модуля (кількість кредитів ECTS – 5; змістових модулів – 8; загальна кількість годин – 180, у тому числі, лекції – 42 год., лабораторні заняття – 14 год., практичні заняття 14 год., самостійна робота – 100 год.; рік підготовки – 3-й, вид контролю – залік, іспит.

Мета курсу – формування знань з основ цифрової обробки сигналів: математичний апарат цифрової обробки сигналів, дискретизація, квантування, цифрове кодування, одновимірна та багатовимірна скалярна та векторна згортка, кореляція, фільтрація, скорочення надмірності, реставрація, покращення та оптимізація представлення аудіовізуальної інформації, використання ЦОС для математичного моделювання, апаратного та програмного забезпечення у системах зв'язку, мовлення, комп'ютерних комплексах, системах відтворення інформації та інших.

ЗМІСТ ДИСЦИПЛІНИ

Визначення загальних принципів вивчення ефективних методів реалізації основних алгоритмів цифрового оброблення одновимірних та багатовимірних скалярних і векторних сигналів, що є моделями звуку, монохромних та кольорових нерухомих і рухомих зображень, тощо. Вивчення методів дискретної згортки та кореляції (ДЗ, ДК), ортогональних перетворень, у тому числі, дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), дискретного косинусного перетворення (ДКП), зокрема, за швидкими алгоритмами (ШЗ, ШК, ШПФ, ШКП). Вивчення методів оцінювання якості цифрової обробки сигналів різної природи. Знайомство з новітніми методами цифрового оброблення сигналів і технічною базою для реалізації цих методів.

Модуль №1. Математичні перетворення і методи їх реалізації в ЦОС (3 кредити).

Вхідні вимоги до вивчення модуля

№ з/п	Зміст знань	Шифр
1	Вища математика. Розділи: диференціальне й інтегральне обчислення, Фур'є-аналіз, узагальнені функції, ряди, функції комплексної змінної, матриці, математична статистика	ЗН1.Вх1
2	Основи теорії кіл. Розділи: лінійні системи, фільтри	ЗН.2.Вх1
3	Сигнали та процеси в радіотехніці: характеристики детермінованих та випадкових сигналів; види модуляції, спектри модульованих сигналів; аналого-цифрове та цифро-аналогове перетворення	ЗН.3.Вх1
Зміст умінь		
1	Виконувати обчислення похідних та інтегралів найпростіших і складних функцій	УМ.1.Вх1
2	Визначати ширину смуги частот, необхідну для передавання сигналу при заданому виді модуляції	УМ.2.Вх1
3	Володіти навичками найпростіших електричних вимірювань	УМ.3.Вх1

Структура залікового модуля 1

Змістовий модуль	Кількість годин				
	Лекції	Лабораторні заняття	Практичні заняття	Індивідуальна робота	Самостійна робота
1 Математичний апарат ЦОС	6		2		20
2 Моделі лінійних систем	4	2			10
3 Згортка	4	2	2	2	10
4 Ортогональні перетворення	8	2	2	2	10
5 Спеціальні види перетворень	6	2	2	2	10
6 Цифрова одновимірна та багатовимірна фільтрація	6	2	4	4	20
7 Оптимальне оброблення сигналів	4	2	2		10
8 Програмно-апаратна реалізація та використання методів ЦОС	4	2			10
Разом, 1 модуль, год.	42	14	14	10	100

Зміст змістових модулів

1. Математичний апарат ЦОС (6 год.)

Сингулярні функції. Віконні функції. Векторно-матрицевий апарат. Дискретизувальні решітки. Ортогональні й скіснокутові решітки. Опис процесів просторово-часової дискретизації і квантування сигналів, зокрема, звуку, монохромних і кольорових нерухомих і рухомих зображень. Просторово-часова теорема відліків. Опис системи телевізійної розгортки як системи просторово-часової дискретизації багатовимірного векторного сигналу. Інтегральні одновимірні й багатовимірні скалярні та векторні перетворення з ядром. Ортогональні системи функцій. Z-перетворення. Елементи теорії чисел

2. Моделі лінійних систем (4 год.)

Опис характеристик у реальній та спектральній областях. Дискретні моделі цифрових систем. Часові, просторові та просторово-часові імпульсні, частотні та перехідні характеристики. Їх співвідношення. Каузальні й некаузальні системи. Математичні моделі лінійних систем.

3. Згортка (4 год.)

Неперервна і дискретна згортка (НЗ, ДЗ) й кореляція (НК, ДК). Співвідношення згортки та перетворення Дюамеля. Теореми про згортку. Аперіодична і циклічна згортка. Методи швидкої згортки й кореляції (ШЗ й ШК). Спектральний метод згортки. Векторно-матрицевий запис згортки. Графи алгоритмів згортки. Приклади згортки одновимірних і багатовимірних скалярних та векторних сигналів. Секціонована згортка. Використання згортки для моделювання процесів фільтрації сигналів та зображень. Використання

згортки і кореляції для вирішення прикладних завдань. Реалізація згортки на базі скалярних і векторних процесорів.

4. Ортогональні перетворення (8 год.)

Узагальнені ортогональні перетворення одновимірних і багатовимірних скалярних і векторних сигналів. Перетворення Фур'є. Теореми про перетворення Фур'є. Неперервне (НПФ) та дискретне (ДПФ) перетворення Фур'є. Матрицевий запис ДПФ. Об'єм обчислень. Співвідношення фур'є-образів для ДПФ і НПФ. Спотворення Фур'є-образу і Фур'є-прообразу при ДПФ. Швидке перетворення Фур'є (ШПФ). Алгоритми реалізації ШПФ, які ґрунтуються на різних принципах. Алгоритми Кулі-Тьюкі, Пізе, Стокхема, Джентльмена-Сенда, Винограда тощо. Операція “метелик”. Алгоритми перестановок відліків. Виведення алгоритму ШПФ для $N = 4$, $N = 8$ та $N = 16$. Графи алгоритму ШПФ. Використання властивостей сигналу для скорочення об'єму обчислень. Використання віконних функцій для ослаблення крайових ефектів. Приклади ШПФ для одновимірних, двовимірних скалярних та векторних сигналів. Деякі властивості ШПФ. Реалізація різних типів ШПФ на базі скалярних і векторних процесорів. Фур'є-процесори.

5. Спеціальні види перетворень (6 год.)

Перетворення Гільберта. Математичний опис. Властивості. Приклади використання. Швидкі алгоритми обчислення.

Перетворення Карунена-Лоева – оптимальне адаптивне перетворення за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки. Алгоритми реалізації.

Перетворення Френеля. Швидкий алгоритм на базі зведення до алгоритму ШПФ.

Новітні методи перетворень. Wavelet-перетворення. Принцип. Математичний опис. Варіанти реалізації. Використання для оброблення та стиснення сигналів. Фрактальний аналіз. Ідеї, покладені у основу фрактального аналізу та варіанти його реалізації та його використання для оброблення й стиснення багатовимірних сигналів. Використання методів розпізнавання образів у алгоритмах цифрового оброблення і стиснення одновимірних і багатовимірних сигналів.

6. Цифрова одновимірна та багатовимірна фільтрація (6 год.)

Використання z-перетворення для опису цифрової фільтрації та синтезу цифрових фільтрів. Цифрові фільтри одновимірного й двовимірного сигналів. Типи. Класифікація. Трансверсальні цифрові фільтри. Структурні схеми. Параметри. Характеристики. Синтез одновимірних, двовимірних та тривимірних трансверсальних цифрових фільтрів. Рекурсивні одновимірні та двовимірні цифрові фільтри. Схеми. Параметри. Характеристики. Методи синтезу одновимірних й двовимірних рекурсивних цифрових фільтрів. Цифрове диференціювання, інтегрування, інтерполяція та децимація сигналу. Реалізація диференціювання, інтегрування, інтерполяції та децимації одновимірного та багатовимірного скалярного та векторного сигналу на базі використання швидких алгоритмів. Приклади характеристик і технічної реалізації.

7. Оптимальне оброблення сигналів (4 год.)

Критерії оптимальності оброблення одновимірних та багатовимірних сигналів. Використання критеріїв якості як критеріїв оптимальності. Алгоритми та приклади оптимального оброблення. Методи корекції та реставрації зображень і звуку.

8. Програмно-апаратна реалізація та використання методів ЦОС (4 год.)

Цифрові моделі методів лінійних і нелінійних перетворень, методів модуляції та детектування, фільтрації, передспотворень, корекції характеристик, придушення завад. Методи модуляції, цілком побудовані на методах ЦОС: методи OFDM і COFDM. Загальний опис методів стиснення і мультиплексування сигналів зображень, звуку і даних у нових аудіовізуальних системах, що організують передавання аудіовізуальної інформації телекомунікаційними та інформаційними мережами.

Теми практичних занять модуля 1

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Вивчення дискретизації, квантування й цифрового представлення сигналів і зображень у цифрових системах і пристроях	2
2	Дослідження дискретної згортки часових, просторових та просторово-часових скалярних і векторних сигналів	2
3	Дослідження швидкого перетворення Фур'є одновимірних і двовимірних скалярних і векторних сигналів	2
4	Дослідження швидкого косинусного перетворення одновимірних і двовимірних скалярних і векторних сигналів	2
5	Дослідження цифрової часової, просторової й просторово-часової скалярної й векторної СІХ-фільтрації	2
6	Дослідження цифрової часової, просторової й просторово-часової скалярної й векторної НІХ-фільтрації	2
7	Дослідження Wavelet-перетворення та його застосувань у ЦОС	2

Перелік лабораторних занять модуля 1

№з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Дослідження формування дискретних сигналів	2
2	Скалярне квантування сигналів	2
3	ДПФ для застосувань ЦОС	2
4	Дослідження і синтез цифрових фільтрів зі скінцевою імпульсною характеристикою (СІХ-фільтрів)	4
5	Дослідження і синтез цифрових фільтрів з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ-фільтрів)	4
6	Оброблення зображень у середовищі MatLab	2

--	--	--

Вихідні знання та уміння з модуля 1

№	Зміст знань	Шифр
1	Знання процесів дискретизації та квантування аналогових сигналів і методів цифрового представлення одновимірних та двовимірних сигналів у цифрових системах і пристроях	ЗН1. Вих1
2	Знання принципів представлення сигналів у вигляді одновимірних і двовимірних масивів і вміння використовувати перетворення сигналів у матричній формі	ЗН.2 Вих1
3	Знання механізмів реалізації дискретної згортки одновимірних та двовимірних скалярних і векторних сигналів.	ЗН.3 Вих1
4	Знання алгоритмів реалізації швидких ортогональних перетворень та швидкої згортки	ЗН.4 Вих1
5	Знання принципів реалізації спеціальних типів перетворень сигналів	ЗН5.Вих1
6	Знання принципів синтезу та властивостей трансверсальних фільтрів одновимірних та багатовимірних сигналів	ЗН6.Вих1
7	Знання принципів синтезу та властивостей рекурсивних фільтрів одновимірних та багатовимірних сигналів	ЗН7.Вих1
8	Знання методів оптимального оброблення одновимірних та багатовимірних сигналів	ЗН8.Вих1
9	Знання методів реалізації методів ЦОС у радіотехнічних та телевізійних застосуваннях	ЗН9.Вих1
Зміст умінь		
1	Вміння реалізувати принципи запису перетворення сигналів у матричній формі	УМ.1 Вих1
2	Вміння використовувати оператори обчислювального середовища для дискретного представлення сигналів та зображень	УМ.2 Вих1
3	Вміння використовувати методи ортогонального перетворення сигналів	УМ.3 Вих1
4	Вміння виконувати дослідження процесів оброблення сигналів з використанням прямого і зворотного перетворень Фур'є	УМ.4 Вих1
5	Вміння виконувати дослідження дискретної згортки одновимірних та двовимірних скалярних і векторних сигналів	УМ.5 Вих1
6	Вміння використовувати методи швидкого перетворення Фур'є одновимірних й двовимірних сигналів	УМ6.Вих1
7	Вміння використовувати методи швидкого косинусного перетворення одновимірних й двовимірних сигналів	УМ7.Вих1
8	Вміння виконувати дослідження спотворень просторових сигналів за допомогою двовимірної згортки	УМ8.Вих1
9	Вміння виконувати проектування та дослідження часових та спектральних характеристик КІХ - фільтрів	УМ9.Вих1
10	Вміння виконувати проектування та дослідження часових та спектральних характеристик НІХ - фільтрів	УМ10.Вих1
11	Вміння виконувати дослідження якості зображень у результаті цифрового оброблення відповідних сигналів	УМ11.Вих1

12	Виконувати проектування систем ЦОС різного призначення	УМ12.Вих1
13	Розробляти нові алгоритми ЦОС	УМ13.Вих1

14	Реалізовувати заданий алгоритм ЦОС програмним або апаратним шляхом	УМ14.Вих1
15	Виконувати аналіз та синтез швидких алгоритмів цифрового оброблення	УМ15.Вих1
16	Здійснювати вибір відповідного методу оброблення	УМ16.Вих1
17	Виконувати вибір або побудову системи скорочення надмірності цифрового потоку, виходячи з потрібної якості відтвореного повідомлення	УМ17.Вих1
18	Подавати та трактувати вхідні та вихідні числові дані для подальшого цифрового оброблення або використання	УМ18.Вих1
19	Співвідносити змінні та функції з цифровими сигналами (зображеннями, послідовностями зображень), що їх реалізують	УМ19.Вих1
20	Використовувати типові алгоритми цифрового оброблення для реалізації цифрових фільтрів та інших пристроїв як у часовому (просторовому, просторово-часовому), так і у спектральному просторі	УМ20.Вих1

ЗМІСТ ПРОТОКОЛУ

Протокол лабораторної роботи оформлюється у робочому зошиті в послідовності, визначеній стандартом підприємства з основ лабораторного практикуму – СТП ФСБ-58-05-807. Протокол повинен мати назву роботи, результати виконання домашнього завдання, з апіс результатів спостережень і розрахунків, проведених у процесі виконання лабораторного завдання. У протоколі повинні бути надані графік, осцилограми, результати опрацювання експериментальних даних та висновки, зроблені на основі їхнього аналізу.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов/ А. Оппенгейм, Р. Шафер – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: в 2 т./ У. Прэтт. ; пер. с англ. под ред. Д.С. Лебедева – М.: Мир, 1982. – Т.1 – 392 с.
3. Lim Jae S. Two-dimentional signal processing – Prentice Hall signal processing series, 1990, 694 p.
4. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов/ Р. Лайонс. – М.: Бином, 2006. – 652 с.
5. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений/ Л. П. Ярославский. – М.: Сов. радио, 1979. – 312 с.
6. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов/ Л. Рабинер, Б. Гоулд; пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
7. Айфичер Э. Цифровая обработка сигналов: практический подход/ Э. Айфичер, Б. Джервис; пер. с англ. под ред. А.В. Назаренко. – М.: Вильямс, 2004. – 992 с.
8. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры/ Г. Лэм – М.: Мир, 1982 – 592 с.

9. Дьяконов В. MatLab обработка сигналов и изображений. Специальный справочник/ В. Дьяконов, И. Абраменкова – СПб.: Питер, 2002 – 608 с.

Лабораторна робота № 1

ДОСЛІДЖЕННЯ ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ

Мета роботи. Вивчення математичного апарату та особливостей подання дискретних одновимірних та багатовимірних сигналів, дослідження формування дискретних сигналів та особливостей відновлення вихідних сигналів.

КЛЮЧОВІ ПОЛОЖЕННЯ

Поняття сигнал у загальному виді відносять до певного матеріального носія інформації. Сигнали зазвичай переносять інформацію щодо стану або щодо поведінки певної фізичної системи та слугують для створення інформаційного зв'язку між людьми або між людьми та машинами. Сигнали можуть бути подані багатьма способами, зокрема, математично сигнал представляють як функцію однієї або багатьох незалежних змінних. Наприклад, сигнал мови математично подають як функцію часу, а сигнал зображення – як функцію яскравості від двох просторових змінних.

Незалежна змінна в математичному подаванні сигналу може бути або дискретною або неперервною. Наприклад, *сигнали неперервного часу* визначені в усьому діапазоні часу і тому подані неперервною незалежною змінною (такі сигнали також називають *аналоговими сигналами*). Таким самим чином, *сигнали дискретного часу* визначені в певних точках часу і тому подані дискретною незалежною змінною, тобто дискретні сигнали подані послідовністю чисел. Такі сигнали, як мова або зображення можуть бути як неперервними, так і дискретними та, за виконання певних умов, таке подання сигналів є майже рівнозначним. Слід зазначити, що амплітуда сигналу також може бути неперервною або дискретною. Сигнали, в яких незалежна змінна та амплітуда є дискретними, називають *цифровими сигналами* [1].

1 Періодична дискретизація одновимірних сигналів

Розглянемо одновимірну функцію $x(t)$, яка, наприклад, може описувати вихідний аналоговий звуковий сигнал.

Для математичного описання процесу дискретизації одновимірних сигналів використовують *гребінку Дірака* (*Dirac comb* або *impulse train*), яка являє собою періодично повторювану послідовність дельта-функцій Дірака $\delta(t)$, причому інтервал T між окремими дельта-функціями зберігається постійним (рис.1.1) [1]:

$$D(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (1.1)$$

де $-\infty < k < \infty$; $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака; T – певний заданий період.

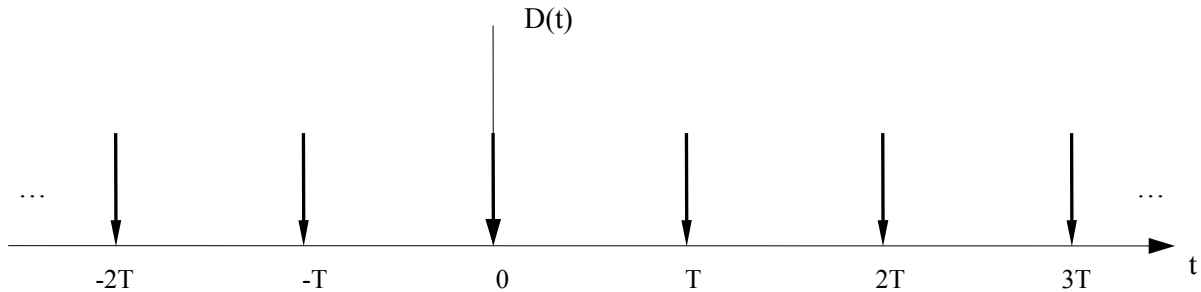


Рисунок 1.1 – Гребінка Дірака

Тобто процес дискретизації одновимірного сигналу подають у вигляді добутку вхідного аналогового сигналу $x(t)$ та гребінки Дірака $D(t)$:

$$\tilde{x}(t) = x(t) \times D(t) = x(t) \delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - nT_d) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \right) \delta nT_d (t - nT_d), \quad (1.2)$$

де $-\infty < n < \infty$; T_d – період дискретизації відповідно до *просторово-часової теореми відліків*.

2 Періодична дискретизація двовимірних сигналів

Розглянемо двовимірну функцію $F_1(x, y)$, яка, наприклад, може описувати вихідне неперервне зображення нескінченних розмірів (тобто являє собою розподіл яскравості зображення або розподіл будь-якого іншого параметра зображення) [2]. Для математичного описання процесу дискретизації такої функції використовують *просторово-дискретизувальну решітку (решітку Дірака)*, яка складається з нескінченного числа дельта-функцій Дірака, заданих у вузлах ортогональної решітки з шагом $(\Delta x, \Delta y)$ (рис. 1.2):

$$D(x, y) \delta = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \delta(x - k_1 \Delta x, y - k_2 \Delta y), \quad (1.3)$$

де $-\infty < k_1 < \infty$; $-\infty < k_2 < \infty$; $(\Delta x, \Delta y)$ – шаг дискретизації відповідно до *просторово-часової теореми відліків*.

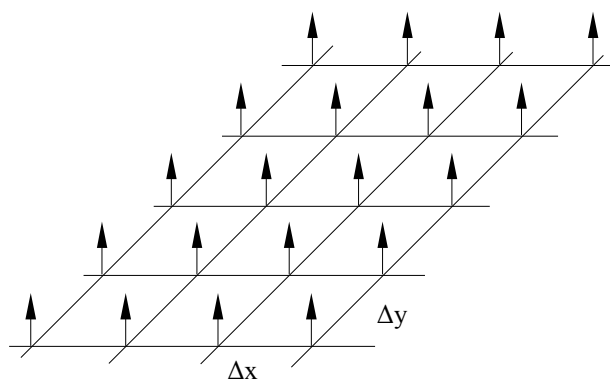


Рисунок 1.2 – Просторово-дискретизувальна решітка Дірака

Тоді дискретний двовимірний сигнал представляють як добуток вихідної функції $F_1(x, y)$ та просторово-дискретизувальної решітки $D(x, y)$:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x, y) &= F_1(x, y) \times D(x, y) = \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} F_1(n_1\Delta x, n_2\Delta y) \delta(x - n_1\Delta x) \delta(y - n_2\Delta y)\end{aligned}\quad (1.4)$$

3 Просторово-часова теорема відліків

3.1 Просторово-часова теорема відліків для одновимірних сигналів

Нехай вхідний аналоговий одновимірний сигнал $x(t)$, спектр якого обмежено частотою $\omega_{\max}$, надано дискретними відліками, взятими з певним інтервалом в часі T_d (рис. 1.3). Дискретний сигнал $\tilde{x}(t)$ буде еквівалентний вхідному сигналу $x(t)$ тільки в тому випадку, коли частота взяття його відліків ω_d буде більшою за $\omega_{\max}$ в два рази $\omega_d > 2\omega_{\max}$.

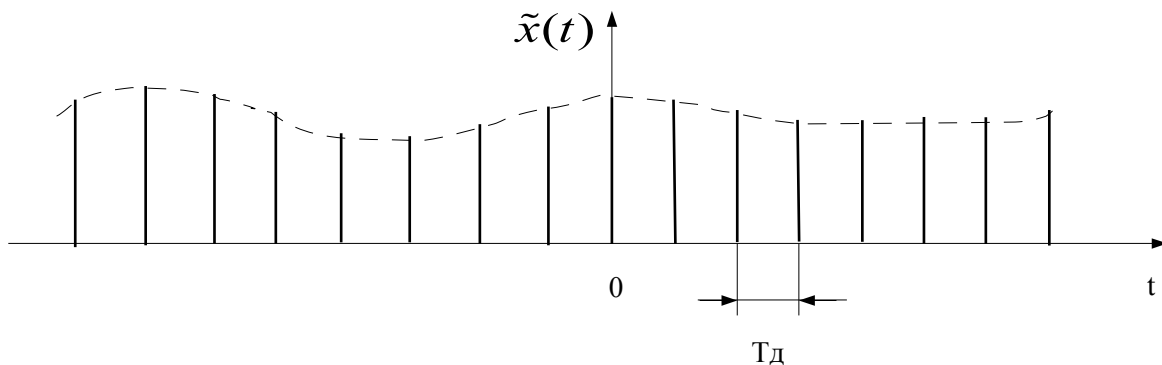


Рисунок 1.3 – Сигнал наданий його дискретними відліками

На рисунку 1.4 в) показано спектр дискретного одновимірного сигналу $X_d(\omega)$, який являє собою нескінченне повторення спектра вхідного аналогового сигналу $X(\omega)$ із зсувом, кратним $2\pi/T_d$. Такий характер спектра дискретного сигналу обумовлений тим, що спектр *гребінки Дірака* також являє собою періодично повторювані дельта-функції з певним заданим зсувом T . З рис. 1.4 видно, що при виборі частоти дискретизації ω_d більшої за максимальну частоту спектра вхідного сигналу $\omega_{\max}$ в два рази, сусідні спектри не будуть перекривати один одного. А отже, ми можемо відновити аналоговий сигнал $x(t)$ із дискретного $\tilde{x}(t)$ шляхом інтерполяції (або низькочастотної фільтрації в частотній області) без спотворень [1].

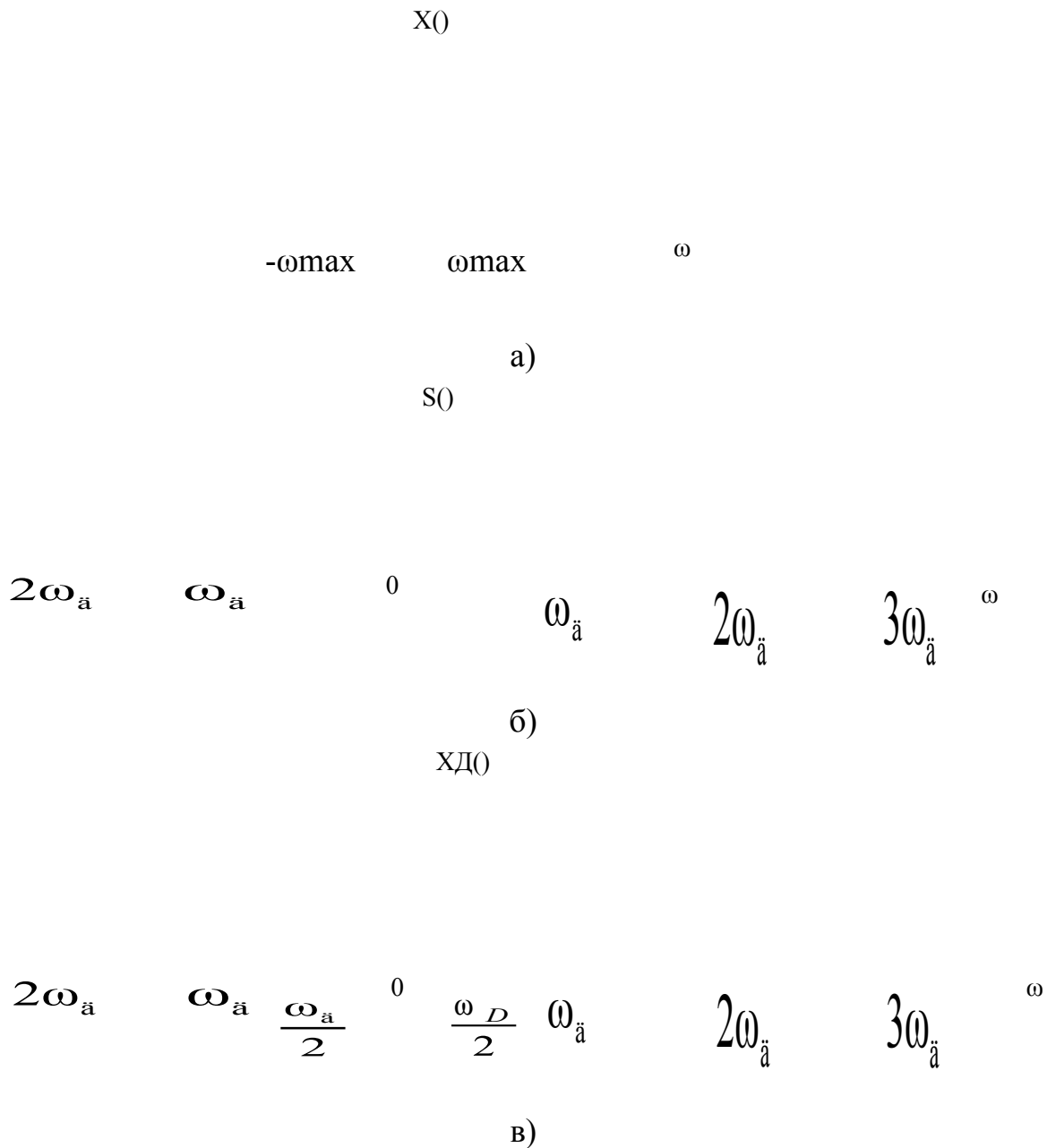


Рисунок 1.4 – Вплив дискретизації на спектр сигналу:

а) спектр вихідного сигналу; б) спектр гребінки Дірака; в) спектр дискретного сигналу при $\omega_a > 2\omega_{\max}$

Якщо вимоги теореми відліків не виконуються $\omega_d < 2\omega_{\max}$, то копії спектра $X(\omega)$ будуть накладатись один на одного, що призводить до неможливості відокремлення вхідного спектра, тобто до неможливості відновити вхідний сигнал $x(t)$ (рис. 1.5). Спотворення, які виникають при невірному виборі частоти дискретизації, називають *спотвореннями накладання спектрів* або просто *накладанням*.

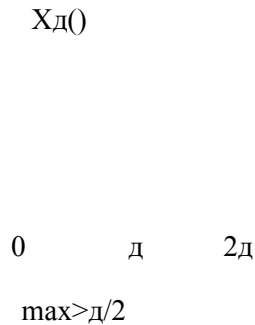


Рисунок 1.5 – Спектр дискретного сигналу при $\omega_a < 2\omega_{\max}$

3.2 Просторово-часова теорема відліків для двовимірних сигналів

Нехай вихідний аналоговий двовимірний сигнал $F_1(x, y)$, спектр якого є обмеженим просторовими частотами $\omega_{x\max}$ та $\omega_{y\max}$, надано дискретними відліками, взятими з певними просторовими інтервалами Δx та Δy . Дискретний двовимірний сигнал $\tilde{F}(x, y)$ буде еквівалентний вхідному сигналу $F_1(x, y)$ тільки в тому випадку, коли частоти взяття просторових відліків ω_{xd} та ω_{yd} будуть більшими за $\omega_{x\max}$ та $\omega_{y\max}$ щонайменше в два рази [2].

На рисунку 1.6 показано спектр дискретного двовимірного сигналу $S(\omega_x, \omega_y)$, який являє собою нескінченне повторення спектра вхідного аналогового двовимірного сигналу із просторовими частотами, кратними ω_{xd} та ω_{yd} . Такий характер спектру дискретного сигналу обумовлений тим, що спектр *решітки Дірака* також являє собою періодично повторювані дельта-функції з певними заданими просторовими частотами. З рис. 1.7 видно, що при виборі просторових частот дискретизації ω_{xd} та ω_{yd} більших за максимальні просторові частоти спектра вхідного сигналу $\omega_{x\max}$ та $\omega_{y\max}$ в два рази, сусідні просторові спектри не будуть перекривати один одного. А отже, ми можемо відновити вхідний сигнал $F_1(x, y)$ із дискретного $\tilde{F}(x, y)$ шляхом лінійної просторової інтерполяції (або лінійної просторової фільтрації) без спотворень.

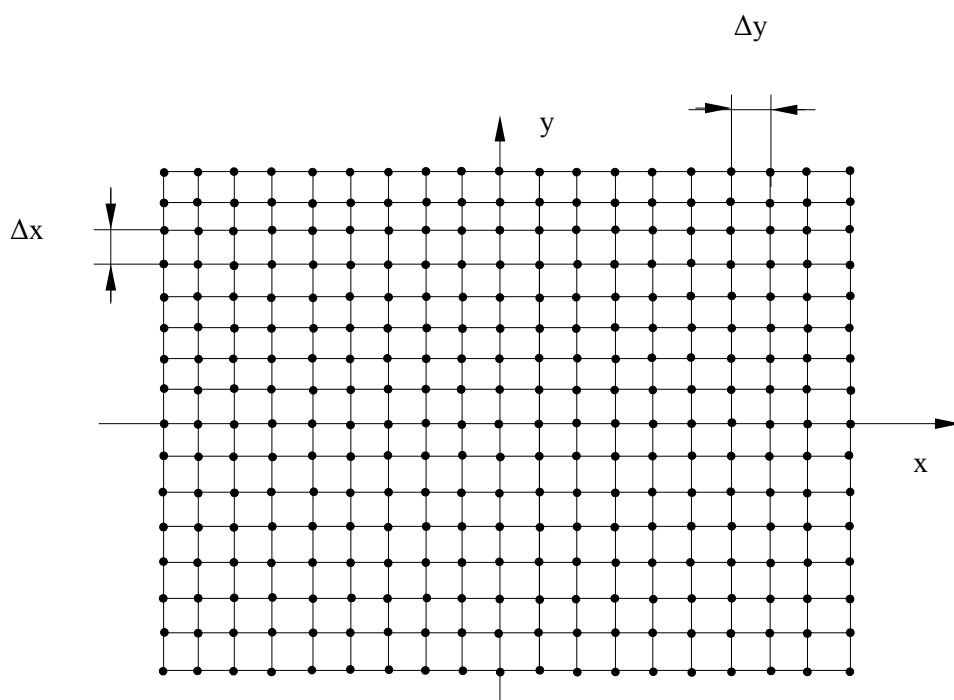


Рисунок 1.6 – Двовимірний сигнал, представлений його дискретними відліками

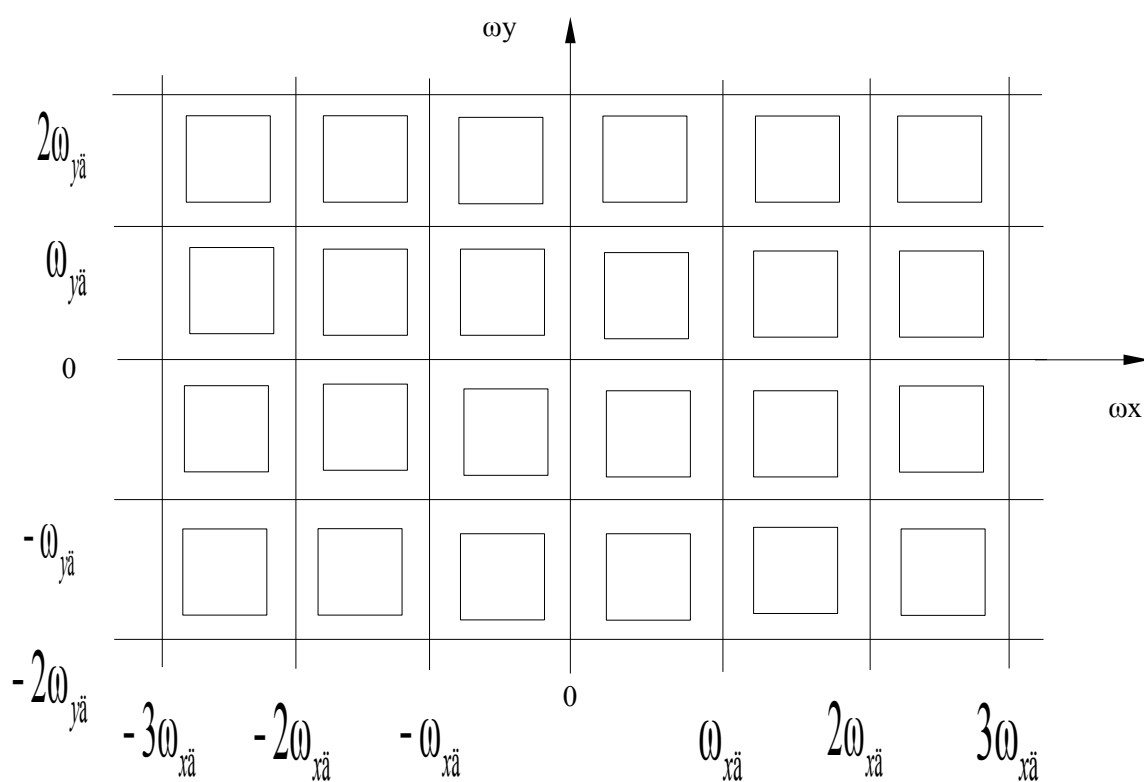


Рисунок 1.7 – Спектр двовимірного дискретного сигналу при $\omega_{хд}$ та $\omega_{уд}$ більші за $2\omega_{хmax}$ та $2\omega_{ymax}$ відповідно

4 Відновлення вихідного сигналу за його дискретними відліками

З відліків функції $\tilde{x}(t)$ можна отримати неперервний вихідний сигнал $x(t)$ шляхом лінійної інтерполяції або низькочастотної фільтрації сигналу. Так само і для двовимірного дискретного сигналу $\tilde{F}(x, y)$ – неперервний сигнал $F_1(x, y)$ можна отримати шляхом лінійної просторової інтерполяції або просторової низькочастотної фільтрації.

Нехай $h(t)$ (або $R(x, y)$ у двовимірному випадку) – імпульсний відгук інтерполяційного фільтра, а $H(\omega)$ – його частотна характеристика ($R(\omega_x, \omega_y)$ у двовимірному випадку). Відновлення вхідного сигналу виконується як згортка послідовності відліків із імпульсним відгуком інтерполяційного фільтра (такий фільтр називають *відновлювальним*) [2]. Таким чином відновлений вхідний сигнал описують наступним виразом:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{x}(t) * h(t); \\ F_1(x, y) &= \tilde{F}(x, y) * R(x, y). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Або в частотній області вираз (1.5) еквівалентний добутку спектра сигналу та частотної характеристики фільтра:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \tilde{X}(\omega) \times H(\omega); \\ F_1(\omega_x, \omega_y) &= \tilde{F}(\omega_x, \omega_y) \times R(\omega_x, \omega_y). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Вирази (1.5) та (1.6) відносяться до фундаментальної теореми ЦОС – *теореми про згортку*, яку у загальному вигляді записують як:

$$\begin{aligned} x(t) &= h(t) * \tilde{x}(t) \xrightarrow{\text{FT}} H(\omega) \times X(\omega); \\ F(x, y) &= R(x, y) * \tilde{F}(x, y) \xrightarrow{2D \text{ FT}} R(\omega_x, \omega_y) \times F(\omega_x, \omega_y), \end{aligned} \quad (1.7)$$

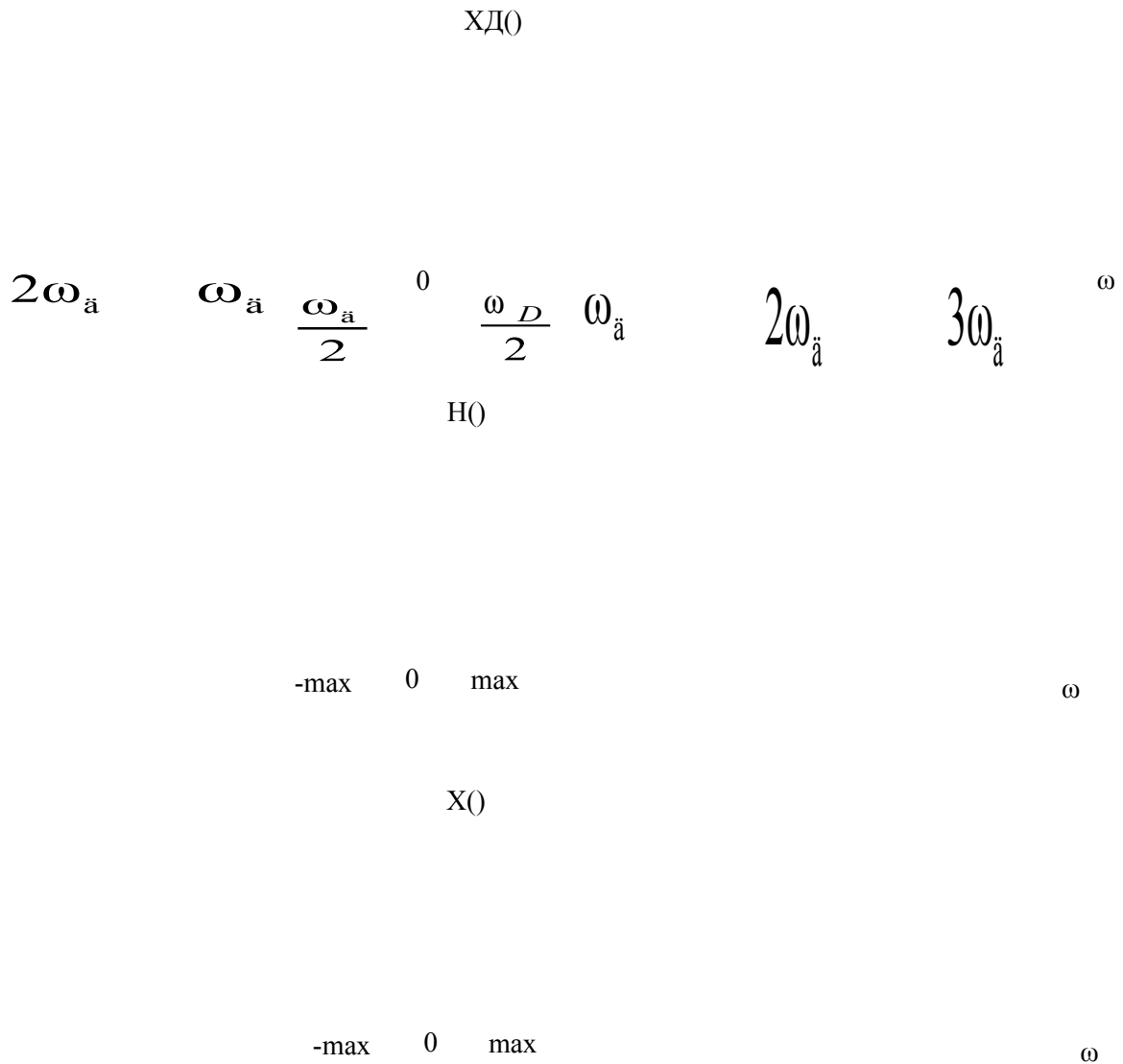
де ДПФ – дискретне перетворення Фур'є; 2D ДПФ – двовимірне перетворення Фур'є.

Імпульсний відгук $h(t)$ відновлювального фільтра являє собою функцію виду $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Функція відновлення сигналу або *інтерполяційна функція* в цьому випадку буде являти собою нескінечну суму $\text{sinc}(x)$ функцій для одновимірних та двовимірних сигналів відповідно:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \text{sinc}(t - kT_A / kT_A) \\ F_1(x, y) &= \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} x_{k_x, k_y} \text{sinc}(x - k_x \Delta x / k_x \Delta x) \text{sinc}(y - k_y \Delta y / k_y \Delta y) \end{aligned} \quad (1.8)$$

На практиці, через неможливість оперувати нескінечними величинами, відновлення вхідного сигналу виконують шляхом *апроксимації* між відліками вхідного сигналу.



**Рисунок 1.8 – Приклад відновлення одного періоду спектра
одновимірного сигналу, використовуючи ідеальний ФНЧ**

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Вивчити ключові положення до лабораторної роботи. Сигнал $x(t) = (2\pi \cdot 100t)$ дискретизують з шагом $T = 1/4000$ с. Якою буде дискретна послідовність $x[n]$?

КЛЮЧОВІ ПИТАННЯ

1. Які сигнали називають дискретними?
2. Як математично описати процес дискретизації: а) у випадку одновимірних сигналів; б) у випадку двовимірних сигналів?
3. Як змінюється спектр дискретного сигналу порівняно зі спектром аналогового сигналу?
4. Які умови необхідно виконати для того, щоб дискретний сигнал був еквівалентним вихідному аналоговому сигналу?
5. За яких умов виникають спотворення накладання?
6. Як математично описати процес відновлення неперервного сигналу за його дискретними відліками?
7. Поміркуйте над різницею процесів інтерполяції та апроксимації.

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАВДАННЯ

- 1 Виконати дискретизацію одновимірного неперервного сигналу за допомогою гребінки Дірака. Інтервал T між дельта-функціями обрати таким, щоб у спектрі дискретного сигналу були: а) присутні спотворення накладання; б) не було спотворень накладання.
- 2 Побудувати часові залежності дискретного сигналу зі спотвореннями накладання та без спотворень накладання. Проаналізувати яке з цього дискретного подання еквівалентне вхідному неперервному сигналу.
- 3 До протоколу занести модулі спектрів отриманих дискретних сигналів та вихідного неперервного сигналу. Зробити висновок щодо характеру зміни спектра дискретного сигналу. Зафіксувати частоту дискретизації, необхідну для відновлення вихідного сигналу без спотворень.
- 4 Виконати дискретизацію двовимірного неперервного сигналу за допомогою решітки Дірака. Інтервали Δx та Δy обрати такими, щоб в спектрі дискретного сигналу були: а) присутні спотворення накладання; б) не було спотворень накладання.
- 5 Проаналізувати характер змінення модуля спектра дискретного двовимірного сигналу: а) за наявності спотворень накладання та б) без спотворень накладання. Зафіксувати інтервали дискретизації необхідні для відновлення вихідного двовимірного сигналу без спотворень.
- 6 Використовуючи операцію НЧ просторової фільтрації виконати відновлення вихідного неперервного двовимірного сигналу із модулів спектрів: а) зі спотвореннями накладання; б) без спотворень накладання. Проаналізувати чи відповідають відновлені сигнали вихідному неперервному сигналу, проаналізувати характер спотворень, які виникають.

Лабораторна робота № 2

СКАЛЯРНЕ КВАНТУВАННЯ СИГНАЛІВ

Мета роботи. Дослідження принципів скалярного квантування сигналів на прикладі двовимірного сигналу; визначення критерію оптимальності квантування; аналіз спотворень, які виникають при квантуванні сигналу зображення.

КЛЮЧОВІ ПОЛОЖЕННЯ

1 Загальні принципи скалярного квантування сигналів

Позначимо f як неперервну скалярну величину, яка може бути розподілом яскравості всередині зображення або параметри моделі зображення. Для представлення f кінцевою кількістю бітів використовують кінцеве число рівнів квантування L . Таким чином, процес, що ставить у відповідність певному f один із фіксованих рівнів L називають *амплітудним квантуванням* (або просто *квантуванням*). У загальному випадку процес квантування – це процес виконання нелінійного перетворення, характеристика якого має вигляд монотонної східчастої функції. Якщо кожен скалярну величину квантують незалежно, то такий процес називають *скалярним квантуванням*. Якщо дві або більше скалярних величин квантують разом, то такий процес називають *векторним квантуванням* [3].

Позначимо квантовану скалярну величину f через $\tilde{f}$, тоді можемо виразити процес квантування як

$$\tilde{f} = Q(f) = r_i \quad d_{i-1} < f \leq d_i, \quad (2.1)$$

де Q – позначає процес квантування;

r_i для $1 \leq i \leq L$ – рівні відновлення;

d_i для $0 \leq i \leq L$ – рівні прийняття рішення.

Виходячи з (2.1), якщо f знаходиться між рівнями прийняття рішення d_{i-1} та d_i , йому ставлять у відповідність рівень відновлення r_i . Процес квантування також можна виразити наступним чином

$$e_Q = \tilde{f} - f, \quad (2.2)$$

де e_Q – помилка квантування або шум квантування.

Безпосереднім методом квантування є *рівномірне квантування*, за якого рівні відновлення та рівні прийняття рішення рівномірно розташовано у смузі квантування. Тобто, для рівномірного квантувача:

$$d_i - d_{i-1} = \Delta, \quad 1 \leq i \leq L, \quad (2.3)$$

$$r_i = \frac{d_i + d_{i-1}}{2} \quad 1 \leq i \leq L, \quad (2.4)$$

де Δ – шаг, що дорівнює відстані між двома сусідніми рівнями відновлення або рівнями прийняття рішення.

Приклад квантування скалярної величини та розподіл рівнів відновлення та прийняття рішення показані на рис. 2.1 2.2.

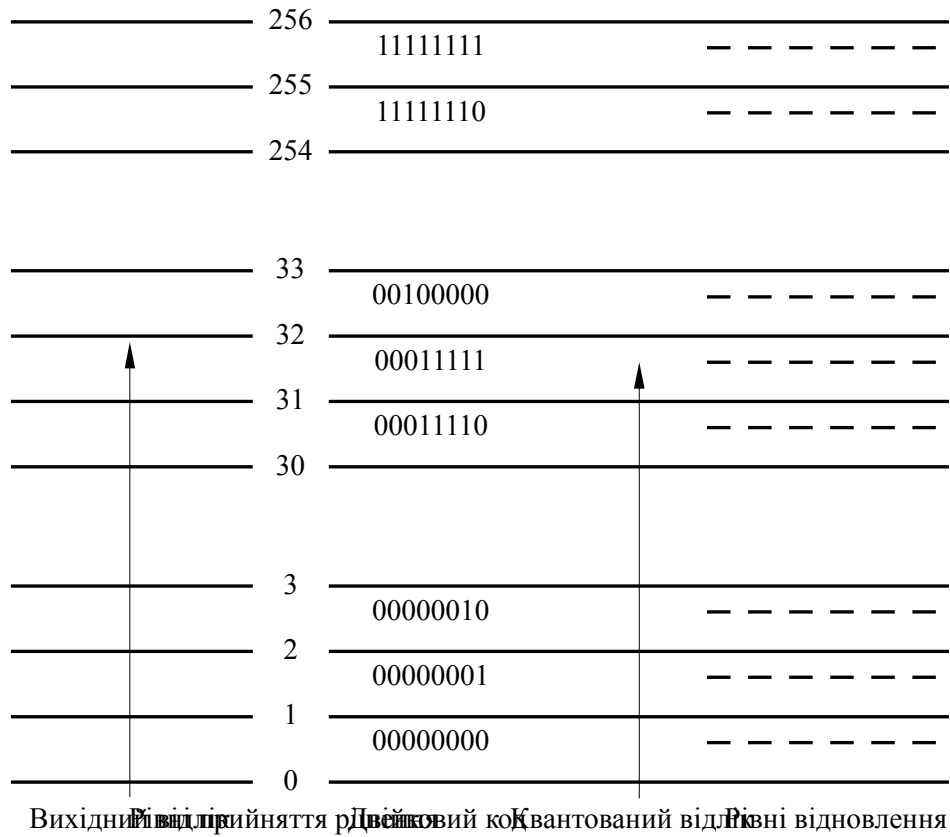


Рисунок 2.1 – Приклад скалярного квантування

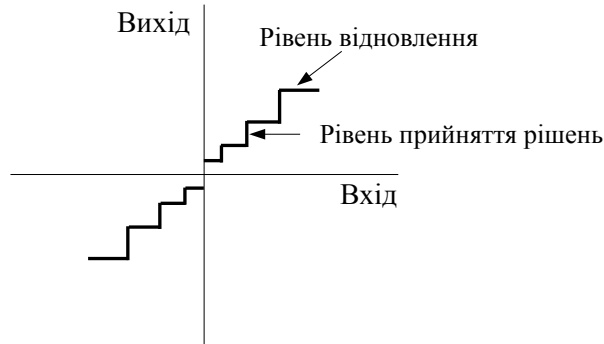
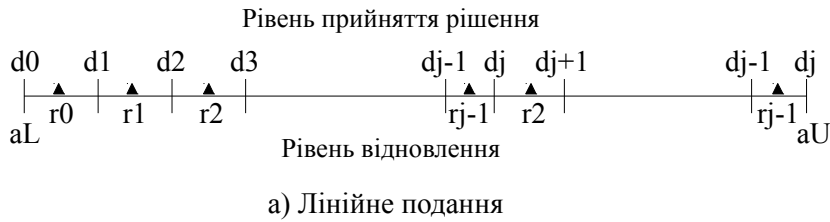


Рисунок 2.2 – Рівні прийняття рішення та рівні відновлення

Рівномірне квантування не завжди буде оптимальним. Припустимо, що основна частина f зосереджена в певній області прийняття рішення. Ціком вірним тоді буде призначення цій області більшої кількості рівнів відновлення. Тобто, квантування в якому рівні відновлення та рівні прийняття рішення розташовано нерівномірно у смузї квантування називають нерівномірним квантуванням.

2 Оптимальне квантування скалярних величин

Процес квантування скалярної величини f є детермінованим процесом, якщо визначені рівні прийняття рішення та рівні відновлення. Ці рівні визначають за критерієм мінімізації бажаної помилки квантування, тобто за критерієм *мінімуму середньоквадратичної помилки* між f та $\tilde{f}$ [3]. Середньоквадратична помилка квантування визначається як

$$e_Q = e_Q \left\{ (f - \tilde{f})^2 \right\} = \int_{a_L}^{a_U} (f - \tilde{f})^2 p(f) df = \sum_{i=0}^L (f - r_i)^2 p(f) df, \quad (2.5)$$

де $p(f)$ – густина ймовірності скалярної величини f ; a_L, a_U – діапазон в якому знаходиться скалярна величина f .

Таким чином, оптимальне розташування рівнів відновлення r_i всередині діапазону від d_{i-1} до d_i може бути визначено шляхом мінімізації e_Q відносно r_i .

Встановлюючи $\frac{\partial e_Q}{\partial r_i} = 0$ та $\frac{\partial e_Q}{\partial d_i} = 0$, отримаємо:

$$d_i = \frac{r_i + r_{i+1}}{2} \quad 1 \leq i \leq L-1; \quad (2.6)$$

$$r_i = \frac{\int_{d_i}^{d_{i+1}} fp(f)df}{\int_{d_i}^{d_{i+1}} p(f)df} \quad 1 \leq i \leq L. \quad (2.7)$$

Тобто оптимальне розташування рівнів прийняття рішення є посередині між кожною парою рівнів відновлення. Якщо густина ймовірності $p(f)$ має рівномірний закон розподілення, рівні відновлення будуть розташовані рівномірно. Для інших законів розподілення густини ймовірності (Гауссів, Лапласа, тощо) рівні відновлення будуть розташовані частіше у діапазоні великих значень густини ймовірності $p(f)$ та рідше у діапазоні малих значень густини ймовірності. Якщо r_i та d_i було обрано за виразами (2.6) та (2.7), мінімум середньоквадратичної помилки для рівномірної густини ймовірності дорівнює $e_{Q\min} = \frac{1}{12L^2}$. Для інших розподілів густини ймовірності помилку квантування слід обчислювати за виразом:

$$e_{Q\min} = \sum_{i=0}^{L-1} \left[\int_{d_i}^{d_{i+1}} f^2 p(f) df - r_i^2 \int_{d_i}^{d_{i+1}} p(f) df \right]. \quad (2.8)$$

Квантувач побудований за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки будемо називати *оптимальним* [3]. На рис. 2.3 наведені криві залежності помилки квантування та кількості рівнів відновлення для рівномірного та оптимального квантування. З рисунка видно, що при використанні оптимального квантування кількість біт для представлення рівнів відновлення менша. Цей приклад базується на припущенні, що густина ймовірності розподілена за нормальним законом. Для інших законів розподілення густини потужності такий порівняльний аналіз також можливо провести. Таким чином, чим більше розподілення густини ймовірності відрізняється від рівномірного, тим більший ефект має нерівномірне квантування перед рівномірним.

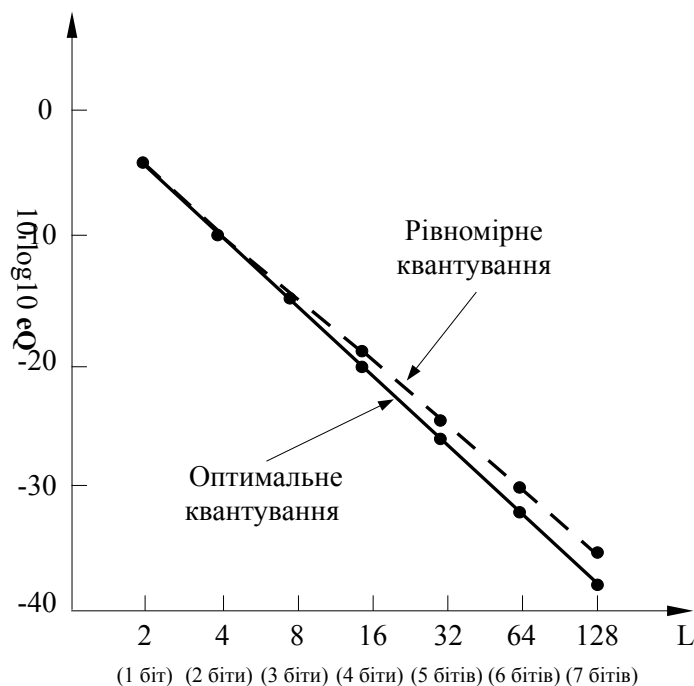


Рисунок 2.3 – Порівняння помилки квантування eQ залежно від типу квантування

3 Оптимальне квантування векторних величин

Вище було розглянуто проблему квантування скалярної величини f . При кодуванні зображень задача квантування стикається з квантуванням багатьох скалярних величин, тобто скалярного квантування певної векторної величини [3]. Припустимо, що ми маємо N скалярних величин f_i для $1 \leq i \leq N$ і кожна скалярна величина f_i квантується до рівня відновлення L_i . Якщо подати L_i як степінь 2-х та кодувати ці рівні рівномірним двійковим кодом, рівні відновлення будуть зв'язані з кількістю бітів B_i наступним виразом:

$$\begin{aligned} L_i &= 2^{B_i}; \\ B_i &= \log_2 L_i. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Загальна кількість біт B необхідна для кодування N скалярних величин:

$$B = \sum_{i=1}^N B_i. \quad (2.10)$$

З виразів (2.9) та (2.10) загальна кількість рівнів відновлення дорівнює

$$L = \prod_{i=1}^N L_i = 2^B. \quad (2.11)$$

Важливо зазначити, що з виразів (2.10) та (2.9) виходить, що загальна кількість бітів B є сумою B_i , тоді як загальна кількість рівнів відновлення є додатком L_i .

Якщо ми маємо фіксовану кількість бітів B для кодування N скалярних величин, використовуючи скалярне квантування векторного джерела, B необхідно розділити між N скалярними величинами. Оптимальний метод розв'язання цієї задачі залежить від критерію визначення помилки та розподілення густини ймовірності скалярних величин. Як правило, при оптимальному методі скалярним величинам з великим розкидом ставлять у відповідність кодове слово більшої довжини і навпаки. Якщо густина ймовірності однакова для всіх скалярних величин, окрім їх розкиду, та використовується однаковий метод квантування (наприклад, оптимальний метод) для кожної скалярної величини, вирішення проблеми розташування бітів буде наступним:

$$B_i = \frac{B}{N} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_i^2}{\left[\prod_{i=1}^N \sigma_i^2 \right]^{1/N}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.12)$$

де σ_i^2 – середньоквадратичний відхил i -ї скалярної величини від f_i .

З виразу (2.12) випливає, що

$$L_i = 2^{B_i} = 2^{B/N} \frac{\sigma_i}{\left(\prod_{i=1}^N \sigma_i \right)^{1/N}}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.13)$$

Виходячи з (2.13), кількість рівнів відтворювання для f_i пропорційна σ_i^2 . Слід мати на увазі, що B_i у виразі (2.12) може бути від'ємним та не завжди цілим, що не задовольняє скалярному квантуванню. Тобто для розв'язання задачі розташування бітів, необхідно запровадити певні обмеження.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Вивчити ключові положення до лабораторної роботи. Нехай f визначає скалярну величину, яка лежить у діапазоні $0 \leq f \leq 5$, обчислити рівні відновлення r_i та рівні прийняття рішення d_i при рівномірному квантуванні для загальної кількості рівнів квантування 6.

КЛЮЧОВІ ПИТАННЯ

1. В чому полягає процес скалярного квантування?
2. Що називають векторним квантуванням?
3. Опишіть різницю між рівномірним та нерівномірним квантуванням?
4. Яке квантування називають оптимальним?
5. За яких умов нерівномірне квантування має переваги перед рівномірним квантуванням?

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАВДАННЯ

1. Прочитати напівтонове зображення з файла в середовищі MatLab.

Виконати операцію квантування за формулою $\tilde{f} = \text{round}\left(\frac{f}{Q}\right)$, де Q – параметр квантування, що його необхідно змінювати від 2 до 10. Отримане квантоване зображення $\tilde{f}$ деквантують за допомогою добутку $\tilde{f}$ та Q . Записати квантоване зображення $\tilde{f}$ у файл. Квантоване зображення $\tilde{f}$ необхідно порівняти з оригіналом та занести висновки у протокол.

2. Прочитати напівтонове зображення з файла середовища MatLab. Виконати двовимірне дискретне перетворення Фур'є зображення та виконати порогове оброблення коефіцієнтів Фур'є за наступним виразом

$$\tilde{f}_{ij} = \text{iffit2} \left(\begin{cases} \text{round}(\text{fft2}(f_{ij})), & \text{if } |\text{fft2}(f_{ij})| > T_{\text{th}} \\ 0, & \text{if } |\text{fft2}(f_{ij})| \leq T_{\text{th}} \end{cases} \right),$$

де T_{th} – поріг нижче якого значення коефіцієнтів Фур'є округлюють до нуля. Змінюючи значення T_{th} від 0 до того значення за яким буде виявлено суб'єктивне погіршення зображення рівня “добре”, “задовільно”, “незадовільно”. Занести числові значення порогів у протокол. Занести в протокол алгоритми квантування зображення, що їх було виконано.

3. Прочитати напівтонове зображення з файла. Виконати двовимірне дискретне косинусне перетворення зображення та виконати порогове оброблення коефіцієнтів косинусного перетворення за наступним виразом

$$\tilde{f}_{ij} = \text{idct2} \left(\begin{cases} \text{round}(\text{dct2}(f_{ij})), & \text{if } |\text{dct2}(f_{ij})| > T_{\text{th}} \\ 0, & \text{if } |\text{dct2}(f_{ij})| \leq T_{\text{th}} \end{cases} \right),$$

де T_{th} – поріг нижче якого значення коефіцієнтів косинусного перетворення округлюють до нуля. Змінюючи значення T_{th} від 0 до того значення за яким буде виявлено суб'єктивне погіршення зображення до рівня “добре”, “задовільно”, “незадовільно”. Занести числові значення порогів у протокол. Занести в протокол алгоритми квантування зображення, що їх було виконано. Проаналізувати характер спотворень, що виникають при квантуванні зображення.

Лабораторна робота № 3

ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ ЗАСТОСУВАНЬ ЦОС

Мета роботи. Дослідити основні властивості прямого дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), часове та частотне подання різних сигналів, застосування ДПФ у ЦОС.

КЛЮЧОВІ ПОЛОЖЕННЯ

1 Визначення дискретного перетворення Фур'є

Для аналітичного опису сигналів та процесів їх перетворення використовують математичні моделі сигналів. Сигнали розглядають як функції, задані в фізичних координатах, тобто як точки та вектори у функціональному просторі – *просторі сигналів*, що дозволяє надати множині сигналів геометричний смисл та наочність. Найбільш простою є трактовка сигналів як елементів нормованого лінійного метричного простору. Елементи такого простору називають *векторами*, а лінійну комбінацію незалежних векторів – *базисом* такого простору. Одним із найбільш застосовуваних базисів є комплексні експоненціальні функції (або ортогональні гармонічні функції). Розкладання сигналів за цим базисом називають *розкладанням в ряд Фур'є* [4].

У випадку дискретного подання сигналів розкладання на ортогональний гармонічний базис називають *дискретним перетворенням Фур'є* (ДПФ), яке визначається наступним виразом:

- експоненціальна форма

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{(-i2\pi kn)/N} \quad (3.1)$$

- тригонометрична форма

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n (\cos(2\pi nk / N) - i \sin(2\pi nk / N)) \quad (3.2)$$

Де $0 < k < N-1$, $0 < n < N-1$;

N – загальна кількість відліків вхідного дискретного сигналу, а також загальна кількість коефіцієнтів ДПФ;

X_k – k -й коефіцієнт ДПФ;

x_n – n -й відлік вхідного дискретного сигналу.

Коефіцієнти $\{X_k\}$ ДПФ послідовності $\{x_n\}$ наближено дорівнюють відлікам спектра сигналу $x(t)$. Модуль коефіцієнтів ДПФ визначає *амплітудно-частотний спектр* дискретної послідовності $\{x_n\}$, а відношення уявної частини коефіцієнтів ДПФ до їх дійсної частини – *фазочастотний спектр* дискретної послідовності $\{x_n\}$. Тобто за допомогою ДПФ можна визначити амплітуду компоненти вхідного дискретного сигналу на аналітичній частоті mf_d/N (3.3) та фазові відношення між частотними компонентами вхідного дискретного сигналу, де f_d – частота дискретизації [5].

Отже точність подання частоти коефіцієнтів ДПФ залежить від частоти дискретизації f_d , з якою було дискретизовано вхідний сигнал $x(t)$, та від кількості вхідних відліків N . Іншими словами ДПФ дає точний результат тільки тоді, коли вхідний сигнал містить енергію точно на аналітичній частоті (3.3). Якщо вхідний сигнал містить компонент на проміжній частоті, яка лежить між аналітичними частотами (3.3) (наприклад, на $1,5f_d/N$), то виникне явище розтікання енергії сигналу, яке проявляється на всіх вихідних коефіцієнтах ДПФ. Для мінімізації цього явища необхідно, щоб вибірка із N -відліків містила цілу кількість періодів вхідного сигналу, тоді коефіцієнти ДПФ стають точно на максимум неперервного спектру сигналу $x(t)$ та на точки, в яких цей спектр рівний нулю.

Примітка. Розтікання енергії сигналу або розтікання спектра можна трактувати як добуток необмеженого у часі сигналу $x(t)$ та прямокутного вікна тривалістю T . В частотній області такому добутку відповідає згортка спектра вихідного сигналу із спектром прямокутного вікна. Спектр прямокутного вікна являє собою функцію $\text{sinc}(x)$, яка має бічні пелюстки. Згортка спектральних складових сигналу із бічними пелюстками додає “хибну” потужність на сусідні частоти спектра. Більш детально дивись [5].

ДПФ є оборотним перетворенням, тобто вихідний сигнал $\{x_n\}$ можна відновити за коефіцієнтами $\{X_k\}$ ДПФ:

- експоненціальна форма

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn/N}; \quad (3.4)$$

- тригонометрична форма

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k (\cos(2\pi nk/N) + j \sin(2\pi nk/N)). \quad (3.5)$$

2 Властивості ДПФ

При роботі з ДПФ корисно знати як властивості вихідного сигналу $\{x_n\}$ проявляються у відповідному Фур'є-образі та навпаки. Для цього введемо необхідні визначення [1]:

Спряжено-симетричною послідовністю називають послідовність, яка має властивість $x_e[n] = x_e^*[-n]$, а *спряжено-скіносиметричною* послідовністю називають послідовність, яка має властивість $x_o[n] = -x_o^*[-n]$, де $*$ – знак комплексного спряження.

Будь-яку послідовність можна подати у вигляді суми спряжено-симетричної та спряжено-скіносиметричної послідовностей $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$, причому дійсну частину спряжено-симетричної послідовності $x_e[n] = x_e[-n]$ називають *парною послідовністю*, а дійсну частину спряжено-скіносиметричної послідовності $x_o[n] = -x_o[-n]$ – *непарною послідовністю*.

Фур'є-образ $X(e^{j\omega})$ також можна розкласти суму спряжено-симетричної та спряжено-скісносиметричної послідовностей $X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$, де дійсну частину спряжено-симетричної функції $X_e(e^{-j\omega}) = X_e^*(e^{j\omega})$ називають *парною функцією*, а дійсну частину спряжено-скісносиметричної функції $X_o(e^{-j\omega}) = -X_o^*(e^{j\omega})$ – *непарною функцією*.

В табл. 3.1 надано зведену таблицю властивостей симетрії ДПФ [1].

Таблиця 3.1 – Властивості симетрії ДПФ

Послідовність $x[n]$	Фур'є-образ $X(e^{j\omega})$
$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
$\text{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega}))$
$j\text{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega}))$
$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$j\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$

В табл. 3.2 наведені основні властивості та теореми ДПФ [1].

Таблиця 3.2 – Властивості ДПФ та теореми ДПФ

Послідовності $x[n]$ та $y[n]$	Фур'є-образи $X(e^{j\omega})$ та $Y(e^{j\omega})$
Обернення часу	
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$; $X^*(e^{j\omega})$, якщо $x[n]$ є дійсною
Лінійність	
$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Часовий зсув	
$x[n - n_d]$	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
Частотний зсув	

$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
------------------------	-----------------------------

Закінчення таблиці 3.2

Дискретна згортка послідовностей еквівалентна добутку відповідних періодичних Фур'є-образів	
$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Добуток дискретних послідовностей еквівалентний періодичній згортці їх перетворень Фур'є	
$x[n]\cdot y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{-j(\omega-\theta)})d\theta$

В табл. 3.3 наведені декілька стандартних пар, пов'язаних перетворенням Фур'є. Табл. 3.2 та 3.3 можна використовувати для обчислення прямого та зворотного перетворення Фур'є [1].

Таблиця 3.3 – Пари, пов'язані перетворенням Фур'є

Послідовність $x[n]$	Фур'є-образ $X(e^{j\omega})$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{âíâ} \end{cases}$	$\frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
$e^{-j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n + \varphi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pi e^{j\varphi} \delta(\omega-\omega_0+2\pi k) + \pi e^{-j\varphi} \delta(\omega-\omega_0+2\pi k))$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Вивчити ключові положення до лабораторної роботи. Знайдіть Фур'є-

образ послідовності
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{âí â} \end{cases}.$$

КЛЮЧОВІ ПИТАННЯ

1. Що називають базисом простору?
2. За яким базисом виконується розкладання в ряд Фур'є?
3. Надайте визначення амплітудно-частотному спектру.
4. Надайте визначення фазочастотного спектра.
5. В чому полягає явище розтікання спектра?
6. Сформулюйте основні властивості ДПФ.
7. Сформулюйте основні теореми ДПФ.

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАВДАННЯ

Індивідуальні варіанти лабораторного завдання надані в табл. 3.4 у відповідності до номера бригади та номера групи.

1. У відповідності до лабораторного завдання дослідити вплив параметрів ДПФ на величину утрат для гармонічного сигналу. Дослідження провести для трьох різних варіантів розмірності ДПФ.
2. Дослідити часове та частотне подання сигналів за умов мінімізації втрат ДПФ: послідовність прямокутних імпульсів, пилкоподібний сигнал, функції Хевісайда, сигнал зі змінною частотою (КЧ). Результати спектрального аналізу та часові діаграми для декількох періодів кожного з сигналів занести в протокол.
3. Дослідити часове та частотне подання суми двох гармонійних коливань з амплітудами A_1 та A_2 , частотами f_1 та f_2 . Визначити частоти та індекси спектральних складових ДПФ від цього сигналу.
4. Відокремити складову f_N з сигналу п. 2 лабораторного завдання (де номер сигналу N в сумі двох сигналів визначається у відповідності до індивідуального варіанту). Навести індекси спектральних складових, які необхідно обнулити. Навести графічні залежності, які описують імпульсну характеристику дискретної системи; результат добутку спектрів імпульсної характеристики зі спектром суми сигналів та згортку цих сигналів у часовій області.

В таблиці 3.1 наведені наступні позначки:

- гармонійне коливання: A – амплітуда; f – частота гармонійного коливання;
- послідовність П-імпульсів: A – амплітуда; $T_{\text{відл}}$ – період слідування імпульсів як кількість відліків сигналу;
- пилкоподібний сигнал: A – амплітуда; T – період пилкоподібного сигналу в одиницях часу моделювання;
- сигнал КЧ: f_H та f_B – мінімальна та максимальна частоти сигналу КЧ відповідно;

- функція Хевісайда: T_i - час зміни стану сигналу, наданий в одиницях часу моделювання;
- послідовність одиничних імпульсів: τ - час затримки одиничного імпульсу відносно початку часу відліку. Для всіх варіантів час дискретизації цього сигналу слід обрати 1/100.

Таблиця 3.4 –Варіанти лабораторного завдання

Група			Гармонійне коливання		Послідовність П-імпульсів		Пилкоподібний сигнал		КЧ		Функція Хевісайда	Сума двох гармонійних коливань			
№ бригади	№ 1	№ 2	A	f	A	T	A	T	f _Σ	f _Σ	T	A _Σ	f _Σ	A _Σ	f _Σ
	9	2	6	50	12	50	5	10	30	0,1×10 ³	4	12	35	6	230
	8	3	12	30	15	16	6	25	10	1,5×10 ³	7	4	43	8,5	100
	7	4	35	20	20	25	8	35	25	2,5×10 ³	3	9	25	7	130
	6	5	19	250	10	30	9	1	35	0,3×10 ³	8	8	72	3,15	250
	5	6	10	200	8	28	8	3	45	1,7×10 ³	9	7	12	4,7	180
	4	7	5	350	1,5	35	4	12	50	2,7×10 ³	6	9	74	7,8	260
	3	8	3	400	3	80	9	14	55	0,9×10 ³	5	7,6	70	6	330
	2	9	1	420	4	95	10	20	60	0,14×10 ³	3	1,2	30	3	430
	1	10	18	60	6	45	12	18	70	4,5×10 ³	2	3,4	38	9,8	360

Лабораторна робота № 4

ДОСЛІДЖЕННЯ І СИНТЕЗ ЦИФРОВИХ СІХ-ФІЛЬТРІВ

Мета роботи. Синтез СІХ-фільтра методом частотної вибірки, дослідження впливу укорочення ряду Фур'є на поведінку частотної характеристики фільтра, моделювання синтезованого СІХ-фільтра у середовищі Simulink.

КЛЮЧОВІ ПОЛОЖЕННЯ

Цифровий фільтр – це математичний алгоритм, реалізований на апаратному або програмному рівні, який із заданою метою діє на вхідний і генерує вихідний цифровий сигнал. У цифровій обробці сигналів цифрові фільтри використовуються в цілому ряді областей: стиснення даних, оброблення сигналів в медицині, оброблення мови, оброблення зображень, передавання даних і т.д.

Цифрові фільтри розділені на два великі класи: *фільтри з нескінченною імпульсною характеристикою* (НІХ-фільтри) і *фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою* (СІХ-фільтри). Фільтр кожного типу можна подати коефіцієнтами його імпульсної характеристики $h(k)$. Вхідний і вихідний сигнали СІХ-фільтра зв'язані через операцію згортки:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k). \quad (4.1)$$

З цих рівнянь випливає, що імпульсна характеристика для СІХ-фільтрів приймає всього N значень. Рівняння (4.1) можна подати через передавальну функцію СІХ-фільтра:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}. \quad (4.2)$$

1 Структура одновимірних СІХ-фільтрів

Найбільш широко відомою і застосовуваною є структура, яка використовує лінії затримки з відведеннями, схема якої показана на рис. 4.1. Передавальну функцію при цьому задано у вигляді:

$$H(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{N-1}z^{-(N-1)} \quad (4.3)$$

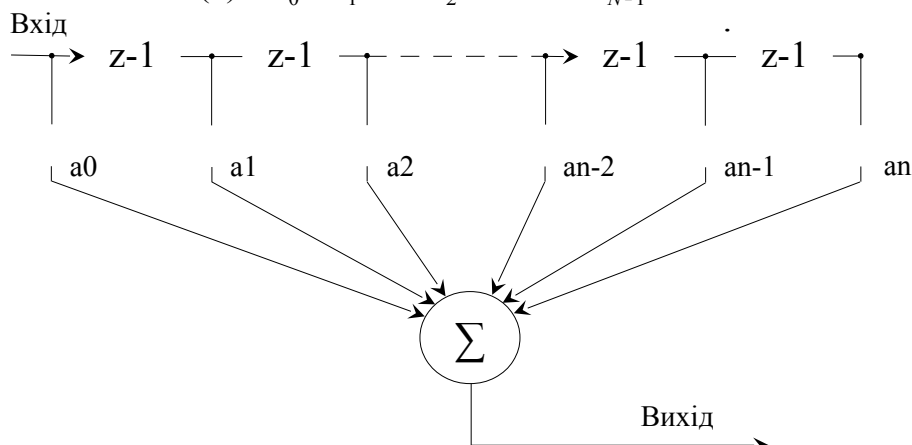


Рисунок 4.1 – Структурна схема СІХ-фільтра

2 Методи синтезу СІХ-фільтрів

Синтез СІХ-фільтрів полягає у визначенні імпульсної характеристики фільтра $\{h(n)\}$, яка забезпечує виконання вимог, які ставлять до фільтру. Звичайно ці вимоги ставлять у вигляді бажаних частотних характеристик. Синтез СІХ-фільтрів передбачає виконання наступних основних етапів:

- визначення числа коефіцієнтів фільтра N ;
- вибір методу синтезу, що мінімізує відхилення між бажаними і реальними характеристиками фільтрів;
- обчислення коефіцієнтів фільтра відповідно до обраного методу. Для СІХ-фільтрів коефіцієнти є відліками імпульсної характеристики.

3 Синтез СІХ-фільтрів методом віконних функцій

У цьому методі, якщо задана періодична (з періодом 2π) частотна характеристика $H(e^{j\omega})$, можна отримати цифровий СІХ-фільтр з передавальною функцією, яка відповідає $H(e^{j\omega})$, шляхом обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для $H(e^{j\omega})$ і використання цих коефіцієнтів як імпульсної характеристики фільтра $h(n)$.

При цьому основна складність полягає у тому, що отриманий ряд Фур'є має, як правило, нескінченне число коефіцієнтів, що приводить до фільтрів, які не можна реалізувати. Тому необхідно виконати деяке укорочення отриманого ряду Фур'є. Проте таке укорочення викликає явище Гіббса, що призводить до появи пульсацій апроксимуючої частотної характеристики поблизу точок розриву.

Для пояснення розглянемо будівництво фільтру нижніх частот з ідеальною частотною характеристикою (рис. 4.2). Амплітуда частотної характеристики вважається рівною одиниці на інтервалі $(0, \omega_c)$ і нулю на інтервалі (ω_c, π) . Імпульсну характеристику $h(n)$ можна отримати шляхом обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є функції $H(e^{j\omega})$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega n}{\pi n}. \quad (4.4)$$

Імпульсна характеристика при $N = 101$ показана на рис. 4.3. Тепер частотна характеристика фільтра, отримана після укорочення ряду Фур'є, матиме вигляд, показаний на рис. 4.4. Очевидно, що розрив ідеальної частотної характеристики на частоті зрізу замінюється кінцевою перехідною смугою (явище Гіббса). Помилка, що вводиться укороченням ряду Фур'є для ідеального ФНЧ фільтра, складає 9 % і не залежить від довжини імпульсної характеристики. Коли довжина

імпульсної характеристики збільшується, мінімальна помилка залишається такою ж, але пульсація локалізується в меншому діапазоні частот.

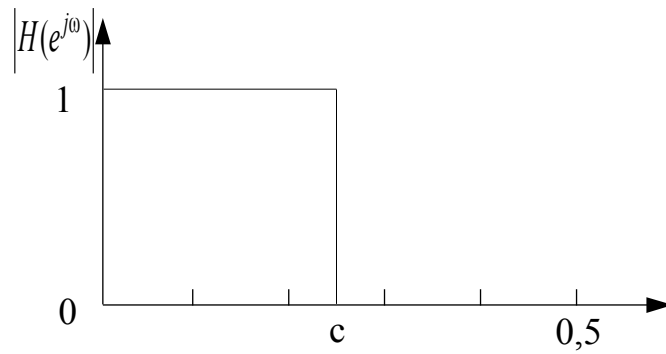


Рисунок 4.2 – АЧХ ідеального ФНЧ

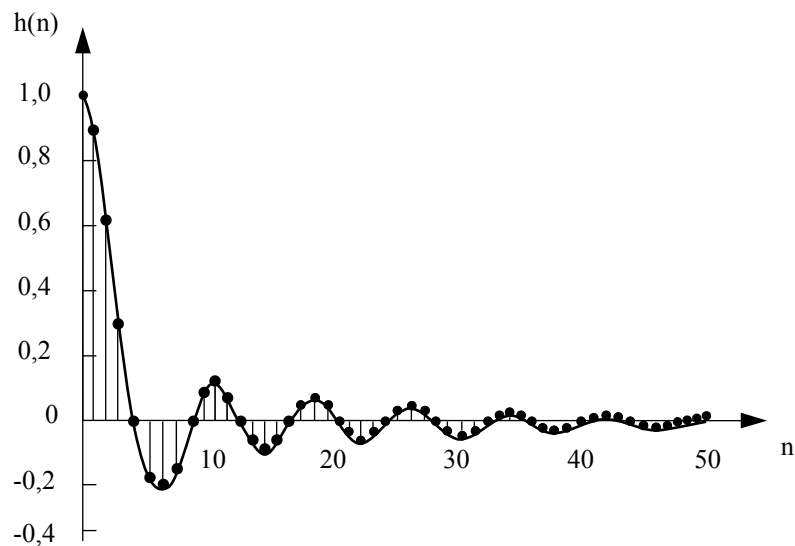


Рисунок 4.3 – Імпульсна характеристика ідеального ФНЧ

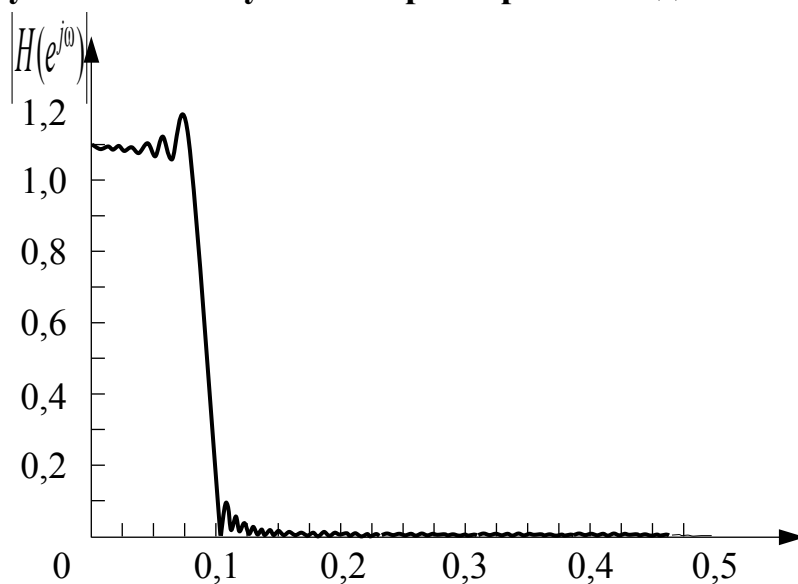


Рисунок 4.4 – АЧХ ФНЧ з прямокутним "вікном"

Укорочення ряду Фур'є відповідає добутку ідеальної імпульсної характеристики фільтру на прямокутну вагову функцію (або "вікно") вигляду

$$\omega_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.5)$$

У частотній області це еквівалентно згортанню частотної характеристики фільтра $H(e^{j\omega})$ і Фур'є-образу вагової функції $W(\omega)$ (рис. 4.5).

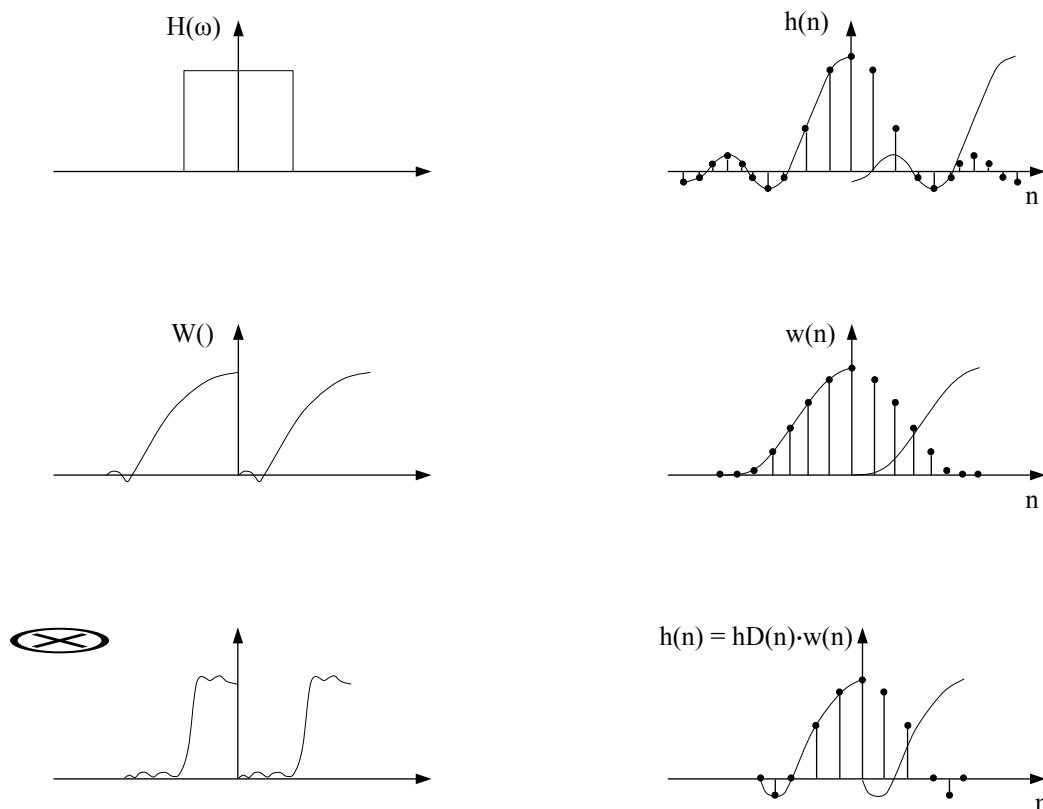


Рисунок 4.5 – Визначення коефіцієнтів фільтру методом “вікна”

Очевидно, що ширина перехідної смуги частотної характеристики, після укорочення ряду Фур'є, залежить від ширини головної пелюстки Фур'є-образу вагової функції, а пульсація – від амплітуди бічних пелюсток. Таким чином, помилка, в одержаній частотній характеристиці, не залежить від числа N , оскільки

вона є функцією площі під бічними пелюстками. З наведеного вище якісного аналізу виходить, що оптимальне “вікно” повинне мати мінімальну ширину головної пелюстки частотної характеристики і мінімальну площу під бічними пелюстками. Опис деяких функцій “вікна” представлено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Опис деяких функцій “вікна”

	Математичний вираз	Ширина смуги розфільтрування , Гц	Нерівномірність у смузі пропускання дБ	Затухання у смузі затримки, дБ
Функція Хеннінга	$\omega(n) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right],$ $n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$	3,1/N	0,0546	44
Функція Хеммінга	$\omega(n) = 0,54 + 0,46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right)$ $n = -\frac{N-1}{2} \dots \frac{N-1}{2}$	3,3/N	0,0194	53
Функція Блекмена	$\omega(n) = 0,42 + 0,5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0,08 \left(\frac{4\pi n}{N-1} \right),$ $n = -(N-1)/2 \dots (N-1)/2$	5,5/N	0,0017	75
Функція Кайзера	$\frac{I_0 \left\{ \omega_a \left[(N-1)/2 \right] T \sqrt{1 - \left[2n / (N-1)/2 \right]^2} \right\}}{I_0 \left(\omega_a \left[(N-1)/2 \right] T \right)},$ де I_0 – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку, ω_a – додатне число	2,93/N $\omega_a = 4,54$	0,0274	50
		4,32/N $\omega_a = 6,76$	0,00275	70
		5,71/N $\omega_a = 8,96$	0,000275	90

4 Синтез СІХ-фільтрів методом частотних вибірок

У попередньому пункті розглянуто задачу апроксимації неперервної періодичної частотної характеристики кінцевим числом коефіцієнтів. Була отримана апроксимація за допомогою рядів Фур'є і були наведені деякі методи укорочення рядів Фур'є.

Проте якщо вибрати N вибірок частотної характеристики фільтра $\{H(k)\}$, то одержимо прямий спосіб отримання імпульсної характеристики, використовуючи зворотне дискретне перетворення Фур'є

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \exp\left(j \frac{2\pi kn}{N}\right). \quad (4.6)$$

Наведений вище метод називається методом частотних вибірок і зводиться до наступних кроків: вибір N рівновіддалених значень вибірок частотної характеристики й обчислення зворотного ДПФ для цих вибірок.

Щоб отримати фільтри з лінійною фазою, частотні вибірки повинні бути симетричними за амплітудою і мати лінійну антисиметричну фазу на інтервалі $(0, 2\pi)$. Взагалі, частотні вибірки можна здійснювати двома способами:

- $f_k = k/N, \quad k = 0, \dots, N-1$;
- $f_k = (k + 1/2)/N, \quad k = 0, \dots, N-1$.

При використанні даного методу неможливо передбачити поведінку частотної характеристики між частотними вибірками, більш того, поведінка між ними у більшості застосувань не зовсім задовільна. Характер частотної характеристики СІХ-фільтра, отриманого таким методом, буде подібний характеру частотної характеристики, побудованої методом “вікна”. Тут також виникає явище Гіббса через розрив частотної характеристики на частоті зрізу. Тому, як і в методі “вікна”, можна отримати деяке зменшення помилки за рахунок збільшення перехідної смуги (тобто шляхом згладжування розриву). Цього можна досягти вважаючи, що деякі частотні вибірки в межах протяжної перехідної смуги частот мають значення, відмінні від 0 або 1, що означає згладжування переходу між смугою пропускання і смугою затримки.

5 Синтез оптимальних СІХ-фільтрів

Під терміном оптимальний фільтр розуміють: оптимальними є ті фільтри, для яких максимальна помилка у смузі пропускання або у смузі затримки мінімальна порівняно з будь-якими іншими фільтрами, які можна отримати, змінюючи значення n вибірок у перехідній смузі.

При синтезі таких фільтрів необхідно чітко встановити критерій оптимальності. Як правило, у якості критерію оптимальності використовують критерій мінімізації максимальної помилки (критерій оптимальності Чебишева). Передавальна функція надається у вигляді

$$H(e^{j\omega}) = P(e^{j\omega})Q(e^{j\omega}), \quad (4.7)$$

де $Q(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos n\omega$ – лінійна комбінація косинусів;
 $P(e^{j\omega})$ – відповідна вагова функція.

Задача полягає у виборі вагової функції $P(e^{j\omega})$, що мінімізує вираз

$$\max \left\{ E(e^{j\omega}) = \left\| \left(W(e^{j\omega}) \times P(e^{j\omega}) \right) \times \left(\frac{D(e^{j\omega})}{P(e^{j\omega})} - Q(e^{j\omega}) \right) \right\| \right\} \rightarrow \min, \quad (4.8)$$

де $W(e^{j\omega})$ – вагова функція, використовувана для виділення окремих діапазонів частот у ході процесу оптимізації. Для завдання вагової функції весь інтервал частот розбивають на піддіапазони і в кожному з них задають допустиму помилку апроксимації ε_i ;

$D(e^{j\omega})$ – бажана частотна характеристика.

Частотні характеристики і відповідні вагові функції $P(e^{j\omega})$ надані в табл. 4.2.

Нехай множина $\{\omega_k\}$, $k = 0, \dots, N$ таких екстремумів в області апроксимації є такою, що можна записати наступні $N+1$ співвідношень:

$$\left(W(e^{j\omega}) \times P(e^{j\omega}) \right) \times \left(\frac{D(e^{j\omega})}{P(e^{j\omega})} - Q(e^{j\omega}) \right) = (-1)^k \delta. \quad (4.9)$$

Крок 1. Вибирають $N+1$ значень $\{\omega_k\}$ і обчислюють систему рівнянь для отримання коефіцієнтів $a(n)$ і δ . Таким чином, отримують поліном за косинусами, який відрізняється в точках $\{\omega_k\}$ від цільової функції на величину δ .

Крок 2. Аналізують помилку $E(e^{j\omega})$, і якщо $|E(e^{j\omega})| \leq \delta$ в усій області апроксимації, отримане вище рішення є оптимальним. Якщо в деяких точках $|E(e^{j\omega})| > \delta$, то вибирають нову множину екстремальних частот шляхом розгляду $N+1$ точок, де помилка максимальна і має знак, що чергується.

Таблиця 4.2 – Частотні характеристики і вагові функції при синтезі оптимального СІХ-фільтра

Тип симетрії	Частотна характеристика
N непарно, $h(n)$ парна, $h(n) = h(N-1-n)$, $n = 0, \dots, \frac{N-1}{2}$	$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos n\omega$, $P(e^{j\omega}) = 1$
N непарно, $h(n)$ парна, $h(n) = -h(N-1-n)$, $n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$, $h[(N-1)/2] = 0$	$H(e^{j\omega}) = \sin\omega \times \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{b}(n) \cos n\omega$, $P(e^{j\omega}) = \sin\omega$, $b(1) = \tilde{b}(0) - \tilde{b}(2)/2$, $b(k) = [\tilde{b}(k-1) - \tilde{b}(k+1)]/2 \quad k = 2, \dots, N-2$, $b(N-1) = \tilde{b}(N-2)/2; \quad b(N) = \tilde{b}(N-1)/2$
N парно, $h(n)$ парна, $h(n) = h(N-1-n)$, $n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$	$H(e^{j\omega}) = \cos(\omega/2) \times \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}(n) \cos(n\omega)$, $P(e^{j\omega}) = \cos(\omega/2)$, $c(1) = \tilde{c}(0) + \tilde{c}(1)/2$, $c(k) = [\tilde{c}(k-1) + \tilde{c}(k)]/2 \quad k = 2, \dots, N-1$, $c(N) = \tilde{c}(N-1)/2$
N парно, $h(n)$ непарна, $h(n) = -h(N-1-n)$, $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$	$H(e^{j\omega}) = \sin(\omega/2) \times \sum_{n=0}^{N-1} d(n) \cos n\omega$, $P(e^{j\omega}) = \sin(\omega/2)$, $d(1) = \tilde{d}(0) - \tilde{d}(1)/2$, $d(k) = [\tilde{d}(k-1) - \tilde{d}(k)]/2 \quad k = 2, \dots, N-1$, $d(N) = \tilde{d}(N-1)/2$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Вивчити ключові положення до лабораторної роботи; надати структурну схему СІХ-фільтра 12 порядку; занести до протоколу очікувану ідеальну АЧХ СІХ-фільтра згідно з № завдання в табл. 4.3.

КЛЮЧОВІ ПИТАННЯ

1. Які фільтри називають цифровими?
2. Сформулюйте поняття передавальна характеристика фільтра. Яка передавальна характеристика СІХ-фільтра?
3. Сформулюйте загальні принципи синтезу СІХ-фільтрів.
4. Які вимоги пред'являють до передавальної функції СІХ-фільтрів?
5. В чому полягає синтез СІХ-фільтрів методом віконних функцій?
6. В чому полягає синтез СІХ-фільтрів методом частотних вибірок?
7. Який фільтр називають оптимальним? Сформулюйте критерій оптимальності.

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАВДАННЯ

Індивідуальні варіанти лабораторного завдання надані в табл. 4.3

1. Синтезувати СІХ-фільтр 6, 12, 30, 300 порядків із заданою частотною характеристикою (табл. 4.3), використовуючи функції середовища MatLab – `fir2` і `freqz`. Одержані частотні характеристики ідеального і реального фільтра необхідно занести в протокол на одному графіку. Функція `fir2` дозволяє синтезувати СІХ-фільтр заданого порядку з бажаною частотною характеристикою, методом частотної вибірки. Функція `freqz` дозволяє знайти передавальну характеристику, отриманого СІХ-фільтра.

Приклад програмного коду в середовищі MatLab при синтезі СІХ-фільтра 30-го порядку:

Номер рядка	Програмний код	Описання програмного коду
1	<code>f = [0 0.6 0.6 1]; m = [1 1 0 0]</code>	задаємо нормовані частоти f і значення частотної характеристики m для відповідних частот (нормування частоти виконують по відношенню до частоти Найквіста)
2	<code>b = fir2(30,f,m);</code>	синтезуємо СІХ-фільтр 30-го порядку із заданою частотною характеристикою
3	<code>[h,w] = freqz(b,1,128);</code>	знаходимо передавальну характеристику фільтра
4	<code>plot(f,m,w/pi,abs(h))</code>	побудова ідеальної та синтезованої АЧХ фільтра на одному графіку
5	<code>legend('Ideal','fir2 Designed')</code>	назва графіків
6	<code>title('Comparison of Frequency Response')</code>	

	Magnitudes')	
--	--------------	--

2. У Simulink скласти структурну схему отриманого СІХ-фільтру 12-го порядку. Подаючи на вхід фільтру дискретну синусоїду різної частоти, перевірити відповідність фільтра вимогам (відповідно до завдання). Навести структурну схему в звіті і коефіцієнти фільтру.

3. У висновках до лабораторної роботи має бути проведено порівняння отриманих АЧХ СІХ-фільтрів та аналіз відповідності синтезованого фільтра до завдання.

Таблиця 4.3 – Варіанти індивідуальних завдань за номером бригади

№ варіант а	Нормована смуга пропускання фільтра	№ варіант а	Нормована смуга пропускання фільтра
1	$f_H = 0,1; f_B = 0,2$	9	$f_H = 0,9; f_B = 1$
2	$f_H = 0,6; f_B = 0,8$	10	$f_H = 0,5; f_B = 0,8$
3	$f_H = 0,4; f_B = 0,9$	11	$f_H = 0,4; f_B = 0,5$
4	$f_H = 0,1; f_B = 0,4$	12	$f_H = 0,35; f_B = 0,48$
5	$f_H = 0; f_B = 0,4$	13	$f_H = 0,4; f_B = 0,45$
6	$f_H = 0,4; f_B = 1$	14	$f_H = 0; f_B = 0,1$
7	$f_H = 0; f_B = 0,61$	15	$f_H = 0,1; f_B = 0,3$
8	$f_H = 0; f_B = 0,39$	16	$f_H = 0,2; f_B = 0,6$

Лабораторна робота № 5

ДОСЛІДЖЕННЯ І СИНТЕЗ ЦИФРОВИХ НІХ-ФІЛЬТРІВ

Мета роботи: синтез НІХ-фільтрів непрямими методами за допомогою графічного середовища FdaTool, дослідження синтезованих НІХ-фільтрів на стійкість, моделювання оптимального синтезованого НІХ-фільтра у середовищі Simulink.

1 Класи цифрових фільтрів

Цифрові фільтри поділені на два обширні класи: фільтри з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ-фільтри) і фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою (СІХ-фільтри). Вхідний і вихідний сигнали НІХ-фільтра пов'язані операцією згортки:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k). \quad (5.1)$$

На практиці обчислити вихід НІХ-фільтра з використанням рівняння (5.1) неможливо, оскільки тривалість імпульсного відгуку нескінченна. Тому НІХ-систему можна описати скінченнорізнцевими рівняннями вигляду:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M b_k y(n-k), \quad (5.2)$$

де a_k і b_k – коефіцієнти фільтра. У рівнянні (5.2) поточна вихідна вибірка $y(n)$ є функцією попередніх виходів, а також поточної і попередньої вхідних вибірок. Таким чином, НІХ-фільтр є системою зі зворотним зв'язком.

Рівняння (5.2) можна подати через передавальну функцію НІХ-фільтра:

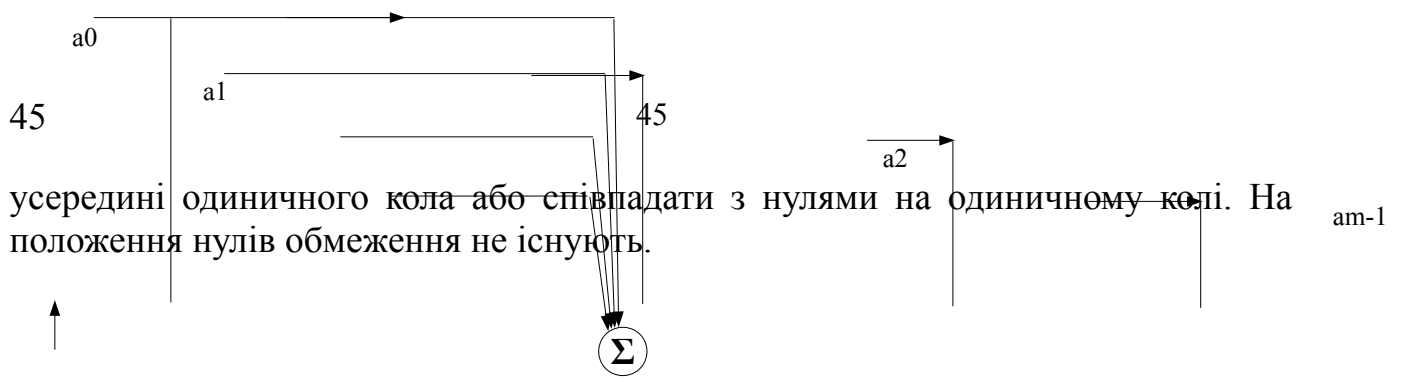
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k z^{-k}}. \quad (5.3)$$

Передавальну функцію НІХ-фільтра (5.3) можна розкласти на множники:

$$H(z) = \frac{K(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_N)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_M)}, \quad (5.4)$$

де z_1 і z_2 – нулі $H(z)$, тобто ті значення z , за яких $H(z)$ дорівнює нулю; p_1 і p_2 – полюси $H(z)$, тобто значення z , за яких $H(z)$ нескінченна.

Графік полюсів і нулів передавальної функції називається *діаграмою нулів і полюсів* і є зручним засобом подання й аналізу фільтра на комплексній площині. Для забезпечення стійкості фільтра, всі його полюси повинні лежати



2 Структури одновимірних НІХ-фільтрів

На рис. 5.1 показана структура безпосереднього набору скінченнорізницевого рівняння (5.2). З рисунку, видно, що для синтезу фільтру при $N=M$ необхідні $2N$ елементів пам'яті і $2N$ добутків і сум. Для забезпечення мінімального числа елементів затримок використовують пряму канонічну

Рисунок 5.2 Структурна схема НІХ-фільтра, що реалізує прямий канонічний метод синтезу

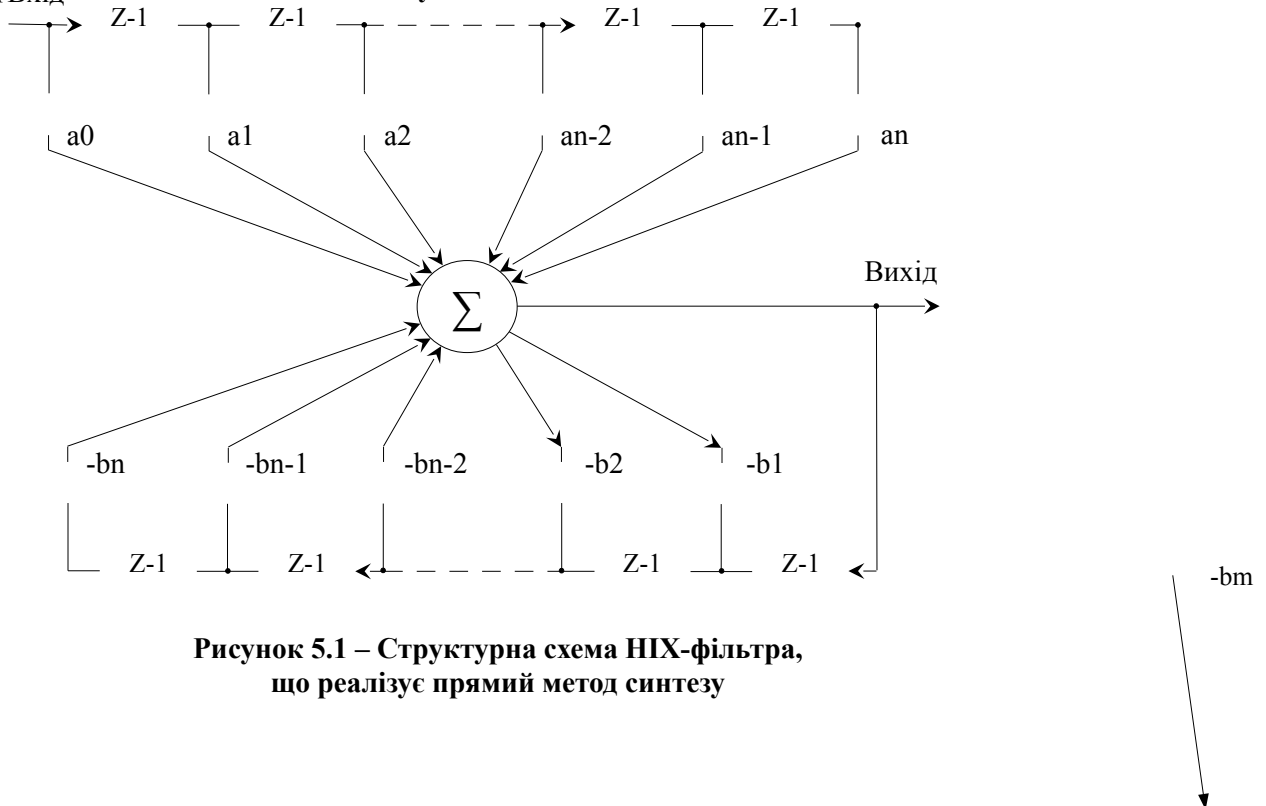


Рисунок 5.1 – Структурна схема НІХ-фільтра, що реалізує прямий метод синтезу

3 Методи синтезу НІХ-фільтрів

Відомі прямі і непрямі методи синтезу рекурсивних фільтрів. Прямі методи засновані на безпосередньому визначенні параметрів цифрових НІХ-фільтрів за заданими часовими та частотними характеристиками. Непрямі методи синтезу НІХ-фільтрів засновані на дискретизації аналогового фільтра, який задовольняє заданим вимогам.

4 Непрямі методи синтезу НІХ-фільтрів

При непрямих методах синтезу НІХ-фільтрів передбачається виконання двох етапів:

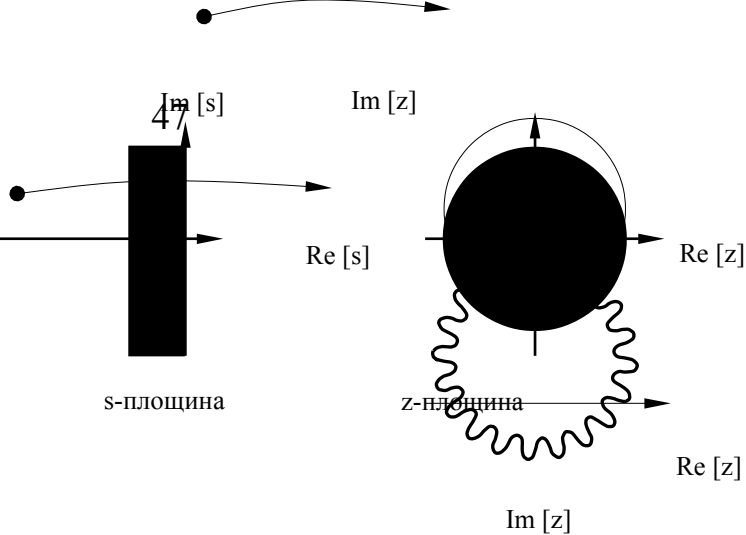
- отримання відповідної передавальної функції $H(s)$ аналогового фільтра, яка задовольняє вимогам оброблення сигналу;
- створення процедури переходу, яка перетворить функцію $H(s)$ у відповідну передавальну функцію цифрового фільтра $G(z)$ для отримання методу розрахунку цифрового НІХ-фільтра, що задовольняє заданим технічним вимогам.

Найпоширенішими процедурами перетворення є методи інваріантності імпульсної характеристики; *узгодженого z -перетворення*; *білінійного z -перетворення*.

Оскільки розраховані на 1-му етапі аналогові фільтри задовольняють вимогам оброблення сигналу, необхідно мати упевненість, що одержані цифрові фільтри також мають всі необхідні властивості, включаючи частотні характеристики. Внаслідок цього процедура переходу на 2-му етапі повинна задовольняти наступним двом умовам:

- уявна вісь s -площини ($s = j\omega$, $-\infty < \omega < \infty$) відображається в одиничне коло z -площини ($z = e^{j\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$);
- ліва половина s -площини ($\operatorname{Re}[s] < 0$) відображається в частину z -площини усередині одиничного кола ($|z| < 1$).

Ці умови необхідні для збереження властивостей стійкості аналогових фільтрів. Таким чином, процедура переходу переводить стійкі аналогові фільтри у стійкі цифрові фільтри (рис. 5.3).



47

Re [s]

Рисунок 5.3 – Вимоги для забезпечення переходу стійкого аналогового фільтра у стійкий цифровий фільтр

4.1 Метод прямого z -перетворення

Суть методу полягає в перетворенні полюсів і нулів передавальної функції $H(s)$ аналогового фільтра у відповідний набір полюсів і нулів передавальної функції $G(z)$ цифрового фільтра, використовуючи наступну процедуру.

Нехай співмножники чисельника і знаменника $H(s)$ мають вигляд $s + \alpha_i$, тоді відповідними співмножниками $G(z)$ будуть $1 - z^{-1}e^{-\alpha_i T}$. Таким чином, маємо відображення, за допомогою якого всі полюси і нулі перетворюються з неперервної області в дискретну область

$$(s + \alpha_i) \rightarrow (1 - z^{-1}e^{-\alpha_i T}), \quad (5.5)$$

де T – період дискретизації.

Перетворення (5.5) відображає полюс (або нуль), що знаходиться в точці $s = \alpha$ s -площини в полюс (або нуль), що знаходиться в точці $z = e^{\alpha_i T}$ комплексної площини.

Хоча цей метод є безпосереднім, він не дає задовільних результатів, зокрема для широкосмугових фільтрів. Було розроблено інший метод, заснований на білінійному перетворенні.

4.2 Метод білінійного z -перетворення

Відповідно до методу білінійного z -перетворення неперервна комплексна змінна s передавальної функції аналогового фільтра $H(s)$ замінюється комплексною змінною $z = e^{j\omega T}$, яка є аргументом передавальної функції цифрового фільтра $G(z)$.

Формули перетворення, за допомогою яких здійснюється перехід від аналогового фільтра-прототипу до цифрового фільтра, представлені в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Формули перетворень

Тип НЧ-фільтра	Перетворення	Зв'язок між аналоговими та цифровими частотами
ФНЧ	$s \rightarrow k(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}),$ де k – дійсна додатна постійна; $k = \operatorname{ctg}\left(\omega_c \frac{T}{2}\right),$ де T – період дискретизації	$\Omega_c = k \times \operatorname{tg}\left(\omega_c \frac{T}{2}\right),$ де Ω_c – частота зрізу АЧХ аналогового фільтра; ω_c – частота зрізу АЧХ цифрового фільтра
ФВЧ	$s \rightarrow k(1 + z^{-1})(1 - z^{-1}),$ де k – дійсна додатна постійна $k = \operatorname{tg}\left(\omega_c \frac{T}{2}\right)$ де T – період дискретизації	$\Omega_c = k \times \operatorname{ctg}\left(\omega_c \frac{T}{2}\right),$ де Ω_c – частота зрізу АЧХ аналогового фільтра; ω_c – частота зрізу АЧХ цифрового фільтра
Смуговий фільтр	$s \rightarrow k \frac{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}},$ де $k = \operatorname{ctg}\left(\omega_c \frac{T}{2}\right) \times \operatorname{tg}\left(\beta \left(\frac{T}{2}\right)\right)$ $\alpha = \frac{\cos\left[\left(\omega_c \frac{T}{2} - \beta\right)\right] \times T}{\cos\left[\left(\omega_c \frac{T}{2} + \beta\right)\right] \times T},$ $\beta = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{T} \right),$ де T – період дискретизації	$\Omega_c = k \times \frac{\alpha - \cos\left(\omega_c \frac{T}{2}\right)}{\sin\left(\omega_c \frac{T}{2}\right)},$ де Ω_c – частота зрізу АЧХ аналогового фільтра; ω_c – частота зрізу АЧХ цифрового фільтра

Режекторний фільтр	$s \rightarrow k \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}},$ $k = \frac{\cos\left[\left(\omega_c - \omega_0\right) \frac{T}{2}\right]}{\cos\left[\left(\omega_c + \omega_0\right) \frac{T}{2}\right]},$ $\alpha = \frac{\cos\left[\left(\omega_c - \omega_0\right) \frac{T}{2}\right]}{\cos\left[\left(\omega_c + \omega_0\right) \frac{T}{2}\right]},$ $\beta = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{T} \right),$ де T – період дискретизації	$\Omega_c = k \times \frac{\sin\left(\omega_c \frac{T}{2}\right)}{\alpha - \cos\left(\omega_c \frac{T}{2}\right)},$ де Ω_c – частота зрізу АЧХ аналогового фільтра; ω_c – частота зрізу АЧХ цифрового фільтра
--------------------	---	---

5 Прямі методи синтезу НІХ-фільтрів

Прямі методи синтезу НІХ-фільтрів можна поділити на дві категорії:

- оптимальні методи, в яких чисельними ітераційними методами знаходять мінімум заданої функції якості;
- субоптимальні методи, що не дають в точності оптимального рішення, але дозволяють значно спростити обчислення порівняно з оптимальними методами. Як правило, ці методи використовують специфіку розв'язуваної задачі, наприклад, дробово-раціональний вид функції передачі рекурсивного фільтра або експоненціальний вид окремих доданків його імпульсної характеристики.

5.1 Оптимальні методи

Відправною точкою при розрахунку НІХ-фільтра оптимальним методом служить його бажана частотна характеристика (коли фазові характеристики не важливі), або комплексний коефіцієнт передачі. Як міра відхилення характеристики фільтра, що мінімізується, від заданої в загальному випадку, використовується p -норма помилки. Найчастіше використовуються два значення p : $p = 2$ (квадратична помилка), і $p = \infty$ (максимальне абсолютне значення помилки). Оскільки коріння p -го ступеня, за будь-якого p є монотонно зростаючою функцією, при розрахунку величини, яка мінімізується, його можна не обчислювати.

Якщо при синтезі НІХ-фільтра нас цікавить тільки його АЧХ, функція, яка мінімізується, при використанні p -норми помилки розраховується таким чином:

$$L_p = \int_0^{\omega_A} w(\omega) \left| D(\omega) - |K(\omega)| \right|^p d\omega, \quad (5.6)$$

де $D(\omega)$ – бажана частотна характеристика фільтра; $|K(\omega)|$ – частотна характеристика фільтра; $w(\omega)$ – додатна вагова функція.

Використання вагової функції дозволяє надати різного значення різним ділянкам частотної осі. Зокрема, це надає можливість задати перехідні зони,

поведінка АЧХ в яких не має значення. У цих зонах значення вагової функції повинно бути нульовим.

Якщо необхідно апроксимувати задану частотну залежність комплексного коефіцієнта передачі, норма помилки апроксимації розраховується таким чином

$$L_p = \int_0^{\omega_A} w(\omega) \left| \dot{D}(\omega) - \dot{K}(\omega) \right|^p d\omega \quad (5.7)$$

де $\dot{D}(\omega)$ – бажана комплексна частотна характеристика; $|\dot{K}(\omega)|$ – частотна характеристика реального фільтру.

В більшості випадків задача мінімізації функції (5.6) або (5.7) не має критичного рішення. Виключення складає синтез НІХ-фільтра при $p = 2$, коли оптимізаційна задача приводить до системи лінійних рівнянь щодо коефіцієнтів фільтра. При цьому, якщо вагова функція не використовується (тобто $w(\omega) \equiv 1$), то коефіцієнти фільтра є коефіцієнтами розкладання бажаної частотної характеристики в ряд Фур'є. Проте мінімізація середньоквадратичної помилки приводить до появи значних викидів АЧХ при спробі апроксимувати її стрибкоподібну зміну. У загальному випадку задача не має аналітичного рішення і тому повинна розв'язуватися ітераційними чисельними методами. Для зменшення впливу явища Гіббса при цьому можна використовувати накладання обмежень на граничне відхилення частотної характеристики від заданої.

При $p = \infty$ дана норма помилки дорівнює максимальному абсолютному відхиленню характеристики від заданої. Мінімізація цієї норми відповідає мінімакській апроксимації і дає фільтри з рівномірними пульсаціями АЧХ.

5.2 Субоптимальні методи

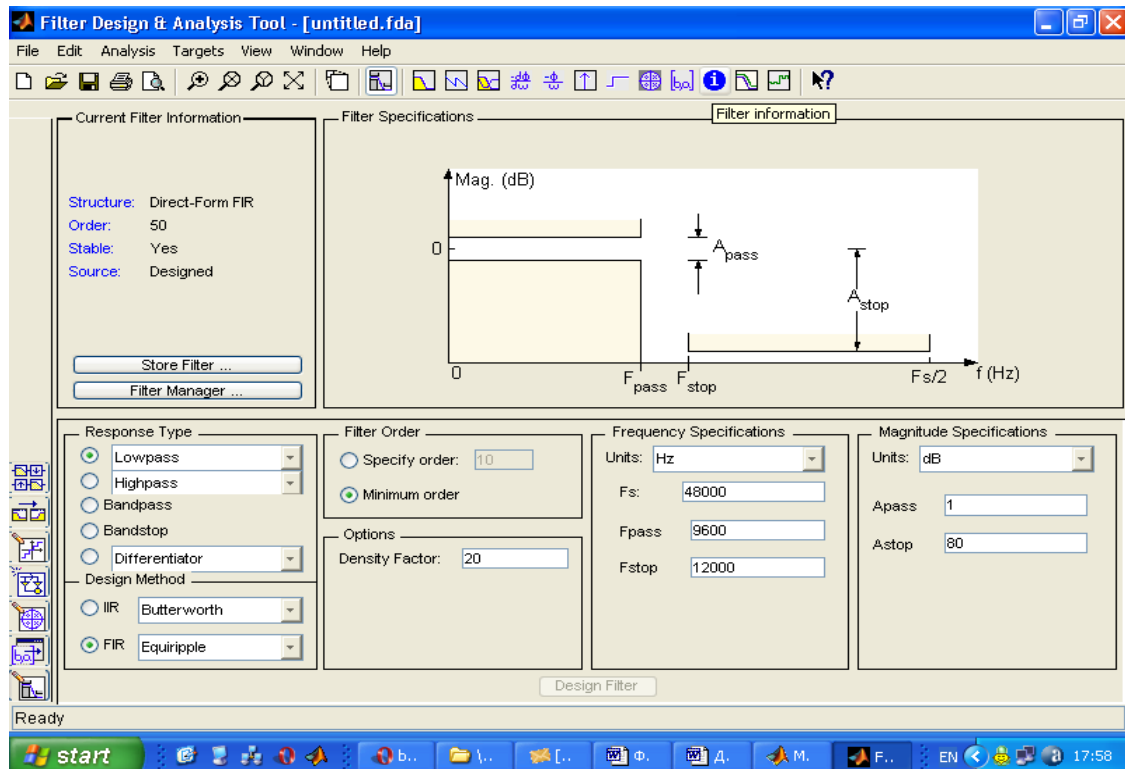
Субоптимальні методи дозволяють спростити обчислення за рахунок урахування специфіки розв'язуваної задачі. При цьому, зокрема, може використовуватися той факт, що коефіцієнти чисельника функції передачі фільтра лінійно пов'язані з його комплексною частотною характеристикою і тому впливають на її форму значно слабше, ніж коефіцієнти знаменника.

Перелік субоптимальних методів синтезу, реалізованих у MatLab (пакет Signal Processing) наведено в таблиці 5.2:

6 Розрахунок цифрових фільтрів за допомогою MatLab

6.1 Розробка НІХ-фільтрів у графічному середовищі “Filter Design and Analysis Tool”

Графічне середовище Filter Design and Analysis Tool дозволяє розраховувати і аналізувати цифрові фільтри. Для запуску графічного середовища необхідно задати в командному рядку MatLab ім'я **fdatool**.



Розрахунок фільтра починається із завдання необхідних параметрів на вкладці Design Filter. Тип АЧХ обирається за допомогою перемикача Response Type: Lowpass (ФНЧ), Highpass (ФВЧ), Bandpass (смуговий фільтр), Bandstop (режекторний фільтр), а також складніші види АЧХ (Differentiator – диференціатор, Hilbert Transformer – перетворювач Гільберта, Multiband Arbitrary Magnitude – довільна АЧХ, Arbitrary Group Delay – довільна групова затримка).

Після вибору категорії АЧХ, необхідно вибрати тип фільтра за допомогою перемикача Design Method: положення IIR (НІХ-фільтр), FIR (СІХ-фільтр). Кожному положенню перемикача відповідає список можливих методів синтезу. Склад цього списку змінюється залежно від обраного типу АЧХ.

Далі необхідно обрати порядок фільтра в розділі Filter Order (можливий автоматичний вибір шляхом установки перемикача в положення Minimum order).

Нарешті, необхідно задати числові параметри АЧХ в розділі Frequency Specifications і Magnitude Specifications. Вміст цих розділів змінюється залежно від обраного типу АЧХ. Числові параметри, які необхідно задати, ілюструється графіком, що виводиться в розділі Frequency Specifications.

Вибравши метод синтезу і задавши характеристики фільтра, необхідно натиснути на кнопку Design Filter в нижній частині вікна.

Після виконання розрахунку фільтра в розділі Current Filter Information з'явиться інформація щодо завершення обчислень, щодо порядку фільтра і щодо його стійкості. Тепер можна проглядати характеристики фільтра і переконатися чи відповідає він заданим вимогам.

Вибір характеристик виконується за допомогою наступної панелі інструментів:



де Magnitude Response – АЧХ синтезованого фільтра;
 Phase Response – ФЧХ синтезованого фільтра;
 Magnitude Response and Phase Response – одночасний графік АЧХ і ФЧХ;
 Group Delay – групова затримка;
 Phase Delay – фазова затримка;
 Impulse Response – імпульсна характеристика фільтра;
 Step Response – перехідна характеристика фільтра;
 Pole/Zero plot – розташування нулів і полюсів на z -площині;
 Filter Coefficients – перегляд коефіцієнтів фільтра;
 Filter Information – перегляд загальної інформації щодо фільтра;
 Magnitude Response Estimate – оцінка АЧХ квантованого фільтра з урахуванням ефектів квантування, вироблювана шляхом пропускання через фільтр шумоподобного сигналу;
 Round-off Noise Power Spectrum – оцінка спектральної густини потужності шуму округлення, що виникає в квантованому фільтрі.
 Turn Quantization on – здійснюється перемикання між аналізом квантованого і неквантованого фільтрів.

6.2 Розробка НІХ-фільтра за допомогою вбудованих функцій в середовищі MatLab

Деякі вбудовані функції MatLab, які дозволяють синтезувати НІХ-фільтр, представлені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Функції синтезу НІХ-фільтрів

Функція MatLab	Частотна характеристика	Метод синтезу
butter	Баттерворта	Білінійне z -перетворення
cheby1	Чебишева I роду	Білінійне z -перетворення
cheby2	Чебишева II роду	Білінійне z -перетворення
ellip	Золотарева-Кауера	Білінійне z -перетворення
bilinear	Довільний аналоговий прототип	Білінійне z -перетворення
maxflat	Узагальнений ФНЧ Баттерворта	Розрахунок положення нулів і полюсів
impinvar	Довільний аналоговий прототип	Метод інваріантності імпульсної характеристики
invfreqz	Довільна	Мінімізація різниці між чисельником функції передачі і добутком її знаменника та бажаної частотної характеристики
stmcb	Синтез за заданою імпульсною характеристикою	Мінімізація середньоквадратичної помилки

rcosiir	ФНЧ	Розкладання по сингулярних числах матриці Ганкеля, заповненої відліками імпульсної характеристики
hilbiir	Фільтр Гілберта	Розкладання по сингулярних числах матриці Ганкеля, заповненої відліками імпульсної характеристики
iirgrpdelay	Синтез за заданою груповою затримкою	Мінімізація p -норми помилки
iirlpnorm	Кусково-лінійна з перехідними смугами	Мінімізація p -норми помилки
iirlpnormc	Кусково-лінійна з перехідними смугами	Мінімізація p -норми помилки з обмеженням модулів полюсів фільтру

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Вивчити ключові положення до лабораторної роботи; занести до протоколу очікувану ідеальну АЧХ НІХ-фільтра згідно з № завдання в табл. 5.3.

КЛЮЧОВІ ПИТАННЯ

1. Які фільтри називають цифровими?
2. Сформулюйте поняття передавальної характеристики фільтра. Якою є передавальна характеристика НІХ-фільтру?
3. Що називають нулями та полюсами передавальної функції НІХ-фільтрів. За яких умов НІХ-фільтр є стійким?
4. Сформулюйте загальні принципи непрямих методів синтезу НІХ-фільтрів.
5. В чому полягає синтез методом прямого z -перетворення?
6. В чому синтез методом білінійного z -перетворення?
7. Сформулюйте принципи прямих методів синтезу НІХ-фільтрів.

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАВДАННЯ

Варіант завдання обирається згідно з № завдання в таблиці 5.3.

1. Синтезувати НІХ-фільтр із заданою частотною характеристикою, використовуючи графічне середовище fdatool (Filter Design and Analysis Tool). Для запуску графічного середовища fdatool необхідно ввести її ім'я в командному рядку MatLab.

При синтезі НІХ-фільтрів необхідно використовувати наступні апроксимуючі функції: Баттерворта, Чебишева I роду, Чебишева II роду і Золотарева-Кауера.

2. Занести до протоколу АЧХ і ФЧХ НІХ-фільтрів при використанні наступних апроксимуючих функцій: Баттерворта, Чебишева I роду, Чебишева II роду і Золотарева-Кауера.

3. З отриманих АЧХ і ФЧХ обрати фільтр, який задовольняє вимогам: лінійність АЧХ у смузі пропускання, стійкість, мінімальний порядок. Занести в протокол нулі і полюси такого фільтра і зробити висновки щодо його стійкості.
4. За допомогою інструменту моделювання систем Simulink скласти структурну схему НІХ-фільтра, який найкращим чином задовольняє обраній частотній характеристиці. Подаючи на вхід фільтра дискретну синусоїду різної частоти, перевірити відповідність фільтра вимогам фільтрації.
5. У висновках надати аналіз відповідності синтезованого фільтра до завдання.

Таблиця 5.2 – Варіанти індивідуальних завдань за номером бригади

№ варіант а	Нормована смуга пропускання фільтра	№ варіант а	Нормована смуга пропускання фільтра
1	$f_H=0; f_B=0,5$	9	$f_H=0,1; f_B=0,53$
2	$f_H=0,1; f_B=0,3$	10	$f_H=0; f_B=0,61$
3	$f_H=0; f_B=0,1$	11	$f_H=0,4; f_B=1$
4	$f_H=0,4; f_B=0,6$	12	$f_H=0; f_B=0,4$
5	$f_H=0,35; f_B=0,48$	13	$f_H=0,1; f_B=0,4$
6	$f_H=0,4; f_B=0,5$	14	$f_H=0,4; f_B=0,9$
7	$f_H=0,5; f_B=0,8$	15	$f_H=0,6; f_B=0,8$
8	$f_H=0,7; f_B=1$	16	$f_H=0,2; f_B=0,6$

Лабораторна робота № 6 **ОБРОБЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ В СЕРЕДОВИЩІ MatLab**

Мета роботи. ознайомлення з технічною базою для реалізації новітніх методів оброблення та подання зображень, зокрема, перетворення кольорових координат, геометричні перетворення зображень та ознайомлення з розрахунками статистики зображень.

КЛЮЧОВІ ПОЛОЖЕННЯ

1 Зорова система людини

Отримання зорової інформації про зовнішній світ – форма об'єктів, їх просторове розташування, колір, рух та інше – здійснюється за допомогою зорової системи людини. Зорова система людини складається з безпосередньо ока, зорового нерва і зорового центру кори головного мозку. Око є оптичною системою з кутом зору близько 120° , який за допомогою кришталіка формує зображення об'єктів на сітківці. Сітківка є мозаїкою зі світлочутливих нервових закінчень. Існує два типи світлочутливих рецепторів: палички (є апаратом присмеркового зору) та колби (є апаратом денного зору). Світлочутливі рецептори через складну нервову систему пов'язані із зоровим центром головного мозку. Світлове роздратування сітківки викликає появу нервових імпульсів, які по зоровому нерву надходять до головного мозку, де відбувається остаточне формування зорового образу.

Гранична здатність зорової системи розрізняти дрібні деталі об'єктів визначається *роздільною здатністю*. Роздільна здатність зорової системи характеризуються найменшою кутовою відстанню δ між двома точками, що світяться, за якої спостерігач розрізняє їх як окремі. Для стандартної зорової системи роздільна здатність визначається кутовою відстанню $\delta=1'$.

В основі вивчення сприйняття кольору лежить трикомпонентна теорія колірного сприйняття Гельмгольца. Теорія допускає існування трьох видів колб, що селективно реагують на червоний R , синій B і зелений G кольора. Сума електричних імпульсів від колб типу R і G формуватиме інформацію про яскравість об'єкта (канал яскравості). Канал яскравості зорової системи має найбільшу просторову роздільну здатність. Різниця електричних імпульсів від колб типу R і G формуватиме червоно-зелений канал з роздільною здатністю дещо нижче, ніж у каналі яскравості. Синьо-зелений канал визначається таким чином $(R + G)-B$. Цей канал має найменшу роздільну здатність.

При реалізації різних систем відтворення зображень необхідно забезпечити раціональне наближення зображення до образу, що безпосередньо сприймається

зором. Тому у системах відтворення зображення виконується просторова дискретизація зображення (розбиття зображення на кінцеве число елементів зображення в межах якого система не розрізняє зміни за яскравістю та колірністю). Для передавання інформації про колір зображення використовуються три сигнали основних кольорів E_R , E_G , E_B . Надалі система відтворення зображення формує сигнал яскравості E_Y і два кольорорізницьові сигнали E_{R-Y} , E_{B-Y} (на основі специфіки сприйняття кольору зоровою системою людини).

2 Типи зображень

При цифровому обробленні зображень звичайно використовують растрові зображення. Вони поділяються на типи – бінарні, півтонові, палітрові та повнокольорові.

Елементи бінарного зображення можуть набувати тільки два значення – 0 або 1. В більшості випадків бінарні зображення отримують в результаті обробки півтонових, палітрових або повнокольорових зображень методами бінаризації. Бінарні зображення мають ту перевагу, що вони дуже зручні при передаванні даних.

У палітрових зображеннях значення елементів зображення є посиланням на область карти кольорів (палітру). Палітра є двовимірним масивом, у стовпцях якого розташовані інтенсивності кольірних складових одного кольору.

На відміну від палітрових, елементи повнокольорових зображень безпосередньо зберігають інформацію щодо яскравості кольірних складових.

Тип зображення	double	uint8
Бінарне	0 0 і 1	0 0 і 1
Півтонове	[0, 1]	[0, 255]
Палітрове	[1, розмір палітри], де 1 – перший рядок палітри	[0, 255], де 0 – перший рядок палітри
Повнокольорове	[0, 1]	[0, 255]

Надалі, при розгляді методів обробки зображень, вважатимемо, що зображення представляється матрицею чисел (розмір матриці $N \times M$), де значення кожного елементу відповідає певному рівню квантування його енергетичної характеристики (яскравості).

3 Операції над зображеннями в MatLab

3.1 Читання зображення з файла

Синтаксис:

```
D=imread(filename, fmt)

[X, map]=imread(filename, fmt)

[.]=imread(filename)

[.]=imread(.idx)

[.]=imread(.ref)
```

Опис:

Функція `D=imread(filename, fmt)` читає з файла з ім'ям `filename` бінарне, півтонове або повнокольорове зображення і поміщає його в масив `D`. Функція `[X, map]=imread(filename, fmt)` читає з файла з ім'ям `filename` палітрове зображення `X` з палітрою `map`.

Функція `[.]=imread(.idx)` читає одне зображення з TIFF-файла, що містить декілька зображень. Номер зображення по порядку в списку IFD вказується в параметрі `idx`. Якщо параметр `idx` при виклику функції не вказаний, то читається перше за порядком зображення у файлі.

Функція `[.]=imread(.ref)` читає одне зображення з HDF-файла, що містить декілька зображень. Кожне зображення у HDF-файлі має унікальний номер-описувач. Цей описувач надається в параметрі `ref`. Якщо параметр `ref` під час виклику функції не вказаний, то читається перше за порядком зображення у файлі.

Наприклад

```
rgb=imread('lily.tif');

[X1, map1]=imread('forest.tif');

Rgb= imread ('flowers.tif');
```

Прочитане з файлу зображення має формат представлення даних `uint8`.

3.2 Виведення зображення на екран

Синтаксис:

```
imshow (I, n)

imshow (I, [low high])

imshow (BW)

imshow (X, map)

imshow (RGB)

imshow filename

h=imshow (..)
```

Опис:

Функція `imshow(I, n)` виводить на екран півтонове зображення `I`, використовуючи при виведенні `n` рівнів сірого.

Функція `imshow(I, [low high])` виводить на екран півтонове зображення `I`, додатково контрастуючи зображення, що виводиться. Елементи зображення `I`, яскравість яких менше або дорівнює `low`, відображаються чорним кольором. Елементи зображення, яскравість яких більша або дорівнює `high`, відображаються білим кольором. Елементи зображення, яскравість яких має значення між `low` і `high`, відображаються сірим кольором. Усі рівні сірого рівномірно розподілені від `low` до `high`. Якщо викликати функцію `imshow(I, [ ])`, вказавши другим аргументом порожній масив, то `low` буде присвоєне мінімальне значення в `I(low = min(I(:)))`, а `high` буде присвоєне максимальне значення в `I(max = max(I(:)))`.

Функція `imshow(BW)` виводить на екран бінарне зображення `BW`. Елементи зображення, значення яких дорівнює 0, відображаються чорним кольором. Елементи зображення, значення яких дорівнює 1, відображаються білим кольором.

Функція `imshow(X, map)` виводить на екран палітрове зображення `X` з палітрою `map`.

Функція `imshow(RGB)` виводить на екран повнокольорове зображення `RGB`.

Функція `imshow filename` виводить на екран зображення з файлу з ім'ям `filename`. Для читання файлу `imshow` викликає функцію `imread`.

3.3 Запис зображення у файл

Синтаксис:

`imwrite(S, filename, fmt)`

`imwrite(X, map, filename, fmt)`

`imwrite(filename)`

`imwrite(Parameter, Value)`

Опис:

Функція `imwrite(S, filename, fmt)` записує у файл з ім'ям `filename` бінарне, півтонове або повнокольорове зображення `S`. Функція `imwrite(X, map, filename, fmt)` записує у файл з ім'ям `filename` палитрове зображення `X` з палітрою `map`. Формат файла визначається параметром `fmt`. Параметри `filename` і `fmt` є рядками. Можливі значення параметра `fmt` наведені в описі функції `iminfo`.

Функція `imwrite(filename)` аналогічна описаним функціям, але формат файла визначається за розширенням `filename`.

У табл. 6.1 наведені типи зображень, які можна прочитати функцією `imwrite`.

Таблиця 6.1 – Формати та типи зображень

Формат	Тип зображень
BMP	8 біт/елемент зображення – палітрові; 24 біт/елемент зображення – палітрові
TIFF	бінарні без стиснення; 8 біт/ елемент зображення - палітрові або півтонові без стиснення
JPEG	8 біт/елемент зображення – напівтонові; 24 біт/елемент зображення – повнокольорові
PCX	8 біт/ елемент зображення – півтонові
HDF	8 біт/елемент зображення – півтонові та палітрові; 24 біт/елемент зображення – повнокольорові
XWD	8 біт/елемент зображення – палітрові

4 Перетворення типів зображень

4.1 Перетворення елементів масиву у формат uint8

Синтаксис:

`B=uint8(A)`

Опис:

Функція `uint8` використовується для перетворення елементів масиву `A` в цілі ненегативні числа в діапазоні `[0, 255]` і поміщає їх у новий масив `B`. Якщо `A` є масивом чисел у форматі `uint8`, то здійснюється копіювання з масиву `A` у `B`. Ця функція використовується для перетворення даних матриці зображення з формату `double` у формат `uint8`.

При виконанні перетворення дробова частина відкидається. З цієї причини рекомендується заздалегідь округлювати значення елементів масиву до найближчого цілого за допомогою функції `round`, наприклад: `B=uint8(round(A))`. Для елементів масиву `A` поза діапазоном `[0, 255]` значення в масиві `B` не визначені і можуть бути різними для різних обчислювальних платформ.

Приклад.

Приклад демонструє використання функції `uint8`.

```
x=[- 10.3 -1.9 0.0 10.15 10.8 255.2 300.3 600.9];
```

```
y=uint8(x);
```

```
% % Буде виведено:
```

```
% % y=246 255 0 10 100 255 44 88
```

```
z=uint8(round(x))
```

```
% % Буде виведено:
```

```
% % z=246 254 0 10 101 255 44 89
```

4.2 Перетворення елементів масиву у формат double

Синтаксис:

`B=double(A)`

Опис:

Функція `double` використовується для перетворення елементів масиву `A` в дійсні числа подвоєної точності і поміщає їх в новий масив `B`. Якщо `A` є масивом чисел у форматі `double`, то здійснюється копіювання з масиву `A` у `B`. Ця функція використовується для перетворення даних матриці зображення з формату `uint8` у формат `double`.

4.3 Подання зображення масивом у форматі `double`

Синтаксис:

`B=im2double(A)`

`YB=im2double(XS, 'indexed')`

Опис:

Функція `im2double` дозволяє подати усі елементи зображення матриці у вигляді дійсних чисел подвійної точності. При реалізації цієї функції, на відміну від функції `double`, здійснюється приведення значень елементів зображення до необхідного діапазону. Для бінарних, півтонових і повнокольорових зображень це діапазон `[0,1]`, а для палітрових зображень – `[1, N]`, де `N` – кількість кольорів в палітрі.

Функція `B=im2double(A)` перетворить бінарне, півтонове або повнокольорове зображення `A` у формат `double` і поміщає результат у нову матрицю `B`. Перетворення здійснюються відповідно до наступних співвідношень:

Бінарне	<code>B=im2double(A)</code>
Півтонове	<code>B=im2double(A)/255</code>
Повнокольорове	<code>B=im2double(A)/255</code>

Функція `YB=im2double(XS, 'indexed')` перетворить у формат `double` палітрове зображення `XS` і розміщує результат в нову матрицю `YB`. Перетворення описується співвідношенням `YB=double(XS)+1`.

4.4 Подання зображення масивом у форматі uint8

Синтаксис:

`B=im2uint8(A)`

`YB=im2uint8(XS, 'indexed')`

Опис:

Функція `im2double` дозволяє подати усі елементи зображення матриці у вигляді цілих ненегативних чисел у діапазоні `[0, 255]`. При конвертації, на відміну від функції `uint8`, здійснюється приведення значень елементів зображення до необхідного діапазону.

Функція `B=im2uint8(A)` перетворить у формат `uint8` бінарне, півтонове або повнокольорове зображення `A` і поміщає результат у нову матрицю `B`. Перетворення здійснюються відповідно до наступних співвідношень:

Бінарне	<code>B=logical(uint8(A))</code>
Півтонове	<code>B=uint8(round(A*255))</code>
Повнокольорове	<code>B=uint8(round(A*255))</code>

Функція `YB=im2uint8(XS, 'indexed')` перетворить у формат `uint8` палітрове зображення `XS` і поміщає результат у нову матрицю `YB`. Перетворення описується співвідношенням `YB=double(XS)+1`.

4.5 Бінаризація відсіканням за порогом яскравості

Синтаксис:

`BW=im2bw(S, threshold)`

`BW=im2bw(X, map, threshold)`

Опис:

Група функцій `imbw` створює бінарне зображення, використовуючи відсікання за порогом яскравості. Для цієї мети повнокольорові та палітрові зображення конвертуються у півтонові. Елементи зображення результуючого бінарного зображення `BW` набувають значень 0 (чорний колір), якщо яскравість відповідних елементів зображення початкового зображення менше порога `threshold`, і значення 1 (білий колір), якщо яскравість відповідних елементів

зображення початкового зображення більше або дорівнює `threshold`. Порог `threshold` повинен задаватися в діапазоні `[0, 1]`. Часто цю операцію називають *бінаризацією за порогом*.

Функція `BW=im2bw(S, threshold)` використовується для перетворення напівтонового або повнокольорового зображення `S` у бінарне `BW`.

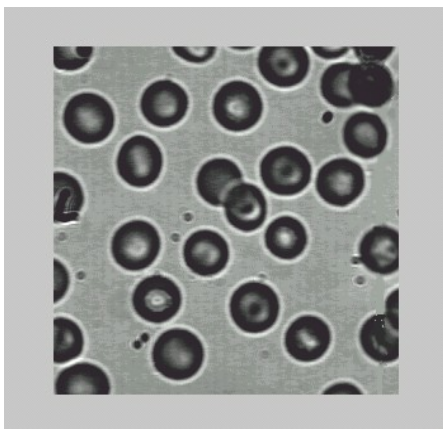
Функція `BW=im2bw(X, map, threshold)` використовується для перетворення палітрового зображення `X` з палітрою `map` у бінарне `BW`.

Початкове зображення може мати формат подання даних `double` або `uint8`. Результуюче зображення має формат `uint8`.

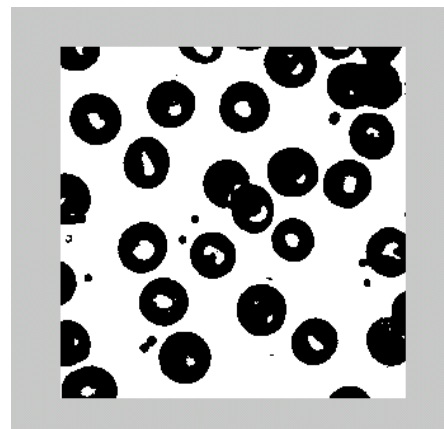
Приклад.

Розглянемо приклад виділення на зображенні чорних круглих об'єктів на півтоновому зображенні (рис.6.1,а). Якщо `threshold` установити рівним 0.5, то утворюється бінарне зображення `BW`, показане на рис. 6.1,б. Далі на цьому зображенні можна, наприклад, підрахувати кількість об'єктів інтересу за допомогою функції `bwlabel(~BW)`.

```
%%Читання зображення і виведення його на екран.
I=imread('blood.tif');
imshow(I);
%%Бінаризація за порогом 0.5
%%і виведення отриманого бінарного зображення на екран.
BW=im2bw(I, 0.5);
figure, imshow(BW);
```



а)



б)

Рисунок 6.1. Отримання бінарного зображення

4.6 Перетворення матриці чисел у півтонове зображення

Синтаксис:

`I=mat2gray(M, [amin amax])`

`I=mat2gray(M)`

Опис:

Функція `mat2gray` створює з матриці чисел півтонове зображення, здійснюючи необхідні операції масштабування для приведення до виду, прийнятого для півтонових зображень.

Функція `I=mat2gray(M, [amin amax])` створює з матриці `M` півтонове зображення `I`, масштабуючи значення елементів матриці `M`, що знаходяться в діапазоні `[amin, amax]`, до діапазону `[0, 1]` відповідно до наступного алгоритму:

якщо $M(r, c) \in [amin, amax]$, то $I(r, c) = (M(r, c) - amin) / (amax - amin)$;

якщо $M(r, c) < amin$, то $I(r, c) = 0$;

якщо $M(r, c) > amax$, то $I(r, c) = 1$.

Функція `I=mat2gray(M)` створює з матриці `M` напівтонове зображення `I`, діапазон масштабування задається мінімальним і максимальним значеннями в матриці `M`, тобто $amin = \min(M(:))$, $amax = \max(M(:))$.

Початкова матриця повинна мати формат `double`. Результуюче зображення також буде подано у форматі `double`.

4.7 Перетворення повнокольорового зображення у півтонове

Синтаксис:

`I=rgb2gray(RGB)`

`newmap=rgb2gray(map)`

Опис:

Функція `I=rgb2gray(RGB)` створює півтонове зображення `I`, перетворюючи R-, G-, B-складові елементів повнокольорового зображення у відповідні їм значення яскравості.

Функція `newmap=rgb2gray(map)` створює палітру `newmap`, що складається зі значень яскравості (градацій сірого), отриманих перетворенням R-, G-, B-складових кольорів початкової палітри `map`.

Формати даних початкового RGB і результуючого I зображень співпадають.

4.8 Перетворення палітрового зображення у півтонове

Синтаксис:

`I=ind2gray(X, map)`

Опис:

Функція `ind2gray` створює півтонове зображення `I`, перетворюючи R-, G-, B-складові з палітри `map`, які відповідають індексам палітрового зображення `X`, в значення яскравості.

Формати даних початкового `X` і результуючого I зображень співпадають.

4.9 Перетворення півтонового зображення у палітрове

Синтаксис:

`[X, map]=gray2ind(I, n)`

Опис:

Функція `gray2ind` створює палітрове зображення `X` з палітрою `map`, перетворюючи півтонове зображення `I`. Палітра `map` містить `n` градацій сірого кольору рівномірно розподілених у діапазоні `[0, 1]`. За замовченням значення `n` дорівнює 64.

Для створення палітри усередині функції `gray2ind` викликається функція `gray(n)`.

Якщо n менше або дорівнює 256, то результуюче палітрове зображення X має формат представлення даних `uint8`. Інакше X має формат `double`.

4.10 Перетворення палітрового зображення у повнокольорове

Синтаксис:

`RGB=ind2rgb(X, map)`

Опис:

Функція `ind2rgb` створює повнокольорове зображення `RGB` з палітрового зображення X з палітрою `map`.

Початкове зображення X може мати формат `uint8` або `double`, результуюче зображення `RGB` завжди має формат `double`.

4.11 Перетворення повнокольорового зображення у палітрове

Синтаксис:

`[X, map]=rgb2ind(RGB)`

Опис:

Функція `rgb2ind` створює палітрове зображення з повнокольорового, використовуючи один із чотирьох способів: запис у вигляді палітрового зображення без зменшення кількості кольорів, установка рівномірної палітри, оптимальний підбір палітри, використання деякої встановленої палітри.

Якщо розмір палітри `map` менше або дорівнює 256, результуюче зображення X має формат `uint8`, інакше воно має формат `double`.

5 Геометричні перетворення зображень

5.1 Кадрування зображень

Синтаксис:

`D=imcrop(S)`

`Xd=imcrop(Xs, map)`

`D=imcrop(S, rect)`

`Xd=imcrop(Xs, map, rect)`

`[.]=imcrop(XData, YData,.)`

`[A, rect]=imcrop(.)`

`[XData, YData, A, rect]=imcrop(.)`

Опис:

Функції `D=imcrop(S)` і `Xd=imcrop(Xs, map)` виводять на екран бінарне, півтонове, повнокольорове зображення `S` і палітрове зображення `Xs` й очікують завдання за допомогою миші прямокутника, який обмежує певний фрагмент. Для вказівки положення одного з кутів обмежуючого прямокутника слід натиснути на ліву кнопку миші. Положення протилежного кута обмежуючого прямокутника буде задано, якщо, не відпускаючи кнопку миші, перемістити курсор, а потім відпустити кнопку. Коли вимагається задати квадратний фрагмент, слід при переміщенні курсора миші тримати натиснутою клавішу `Shift`.

Функція `imcrop` повертає зображення, обмежене заданим прямокутником. Якщо вихідні параметри не задані, наприклад, `imcrop(I)`, то результат відображується в новому графічному вікні.

Якщо не визначені вхідні параметри, наприклад `D=imcrop`, то функція `imcrop` оперує із зображенням у поточному графічному вікні.

Використовуючи функції `D=imcrop(S, rect)` і `Xd=imcrop(Xs, map, rect)`, можна явно визначити обмежуючий прямокутник, де `rect` - вектор з чотирьох елементів: `[xmin ymin w h]`, які задають положення лівого верхнього кута (`xmin ymin`) прямокутника, а також його ширину (`w`) і висоту (`h`) у просторових координатах.

Для завдання довільного масштабу по осях просторової системи координат оброблюваного зображення необхідно додатково передати два двоелементні вектори `XData` і `Ydata`, що визначають діапазон зміни значень по осях координат, : `imcrop(XData, Ydata, .)`. Наприклад, `D=imcrop(XData, YData, S)`.

Якщо визначити додаткові вихідні параметри, то функція `[D, rect]=imcrop(.)` поверне координати обмежуючого прямокутника `rect`, а функція `[XData, YData, D, rect]=imcrop(.)` додатково поверне діапазони зміни значень по осях координат `XData` і `YData`.

Формат даних і тип результуючого зображення збігається з форматом і типом початкового зображення.

Приклад.

Зображення I читається з файлу. Потім з нього вирізується прямокутний фрагмент і поміщається в зображення I2. У використовуваний просторовій системі координат лівий верхній кут обмежуючого прямокутника має координати (20, 20), а правий нижній кут має координати (60,50). Таким чином, результуюче зображення має розміри 31 рядок x 41 стовпець.

Приклад демонструє кадрування зображення:

%%Читання початкового зображення і виведення його на екран.

```
I=imread('valley.tif');
```

```
imshow(I);
```

%%Кадрування і виведення фрагмента, що вийшов, на екран.

```
I2=imcrop(I, [20 20 40 30]);
```

```
figure, imshow(I2);
```

5.2 Зміна розмірів зображення

Синтаксис:

```
D=imresize(S, m, method)
```

```
D=imresize(S, [mrows ncols], method)
```

```
D=imresize(.method, n)
```

Функція `imresize` створює нове зображення, змінюючи розміри початкового зображення будь-якого типу. Для зміни розмірів використовується один із зумовлених методів інтерполяції, який задається у вхідному параметрі `method` у вигляді одного з наступних рядків:

'nearest' – використовувати значення найближчого елементу зображення (встановлений за замовченням, і цей параметр може бути опущений при виклику функції);

'bilinear' - використовувати інтерполяцію по білінійній поверхні;

'bicubic' - використовувати інтерполяцію по бікубічній поверхні.

Функція `D=imresize(S, m, method)` створює зображення `D`, розміри якого в `m` разів відрізняються від розмірів початкового зображення `S`. Якщо `m` належить діапазону від 0 до 1, то `D` менше `S`. Якщо `m` більше 1, то `D` більше `S`.

Функція `D=imresize(S, [mrows ncols], method)` створює зображення `D` з розмірами `mrows` x `ncols`.

Тип і формат даних результуючого зображення збігається з типом і форматом початкового зображення.

5.3 Обертання зображення

Синтаксис:

`D=imrotate(S, angle, method)`

`D=imrotate(S, angle, method, crop)`

Опис:

Функція `D=imrotate(S, angle, method)` створює зображення `D`, відповідне поверненому початковому зображенню `S`, використовуючи певний метод інтерполяції, який задається у входньому параметрі `method` у вигляді одного з наступних рядків :

'nearest' – використовувати значення найближчого елементу зображення (встановлено за умовчанням, і цей параметр може бути опущений під час виклику функції);

'bilinear' - використовувати інтерполяцію по білінійній поверхні;

'bicubic' - використовувати інтерполяцію по бікубічній поверхні;

Кут повороту `angle` задається в градусах. Позитивні значення цього параметра відповідають повороту проти годинникової стрілки, а негативні - за годинниковою стрілкою.

Тип і формат даних результуючого зображення збігається з типом і форматом початкового.

Приклад:

Півтонове зображення читається з файлу, обертається на 87° проти годинникової стрілки. При обертанні використовується інтерполяція по білінійній поверхні.

```
%%Читання зображення з файла і виведення його на екран.
```

```
I1=imread('ic.tif');
```

```
imshow(I1);
```

```
%%Обертання зображення на  $87^\circ$  і виведення результату на екран.
```

```
I2=imrotate(I1, 87, 'bilinear');
```

```
figure, imshow(I2);
```

6 Елементи статистики зображень

6.1 Побудова гістограм

Синтаксис:

```
imhist(I, n)
```

```
imhist(BW, n)
```

```
[h, cx]=imhist(I, n)
```

```
[h, cx]=imhist(BW, n)
```

```
[h, cx]=imhist(BW, map)
```

Опис:

Функції `imhist(I, n)` і `imhist(BW, n)` в поточному вікні будують гістограми яскравостей елементів зображення відповідно півтонового та бінарного зображень. Гістограма складається з n стовпців. Значення n при виклику функції можна не вказувати, в цьому випадку будуть використані значення за замовчуванням: $n=256$ для півтонового зображення і $n=2$ для бінарного зображення.

Функція `[h, cx]=imhist(BW, map)` в поточному вікні будує гістограму індексів елементів зображень палітрового зображення X .

Функція `[h, cx]=imhist(BW, map)` повертає вектор гістограми `h` і вектор положення центрів стовпців гістограми `cx` на осі яскравостей (для напівтонових і бінарних зображень) або на вісі індексів (для палітрових зображень), що дозволяє здійснювати подальшу обробку гістограми `h`.

Приклад.

Для півтонового зображення `I` (рис. 6.2,а) будують гістограму яскравості елементів зображення (рис. 6.2,б) та діаграму в логарифмічному масштабі (рис. 6.2,в).

```
%%Читання зображення з файла.
```

```
I=imread('lena.tif');
```

```
%%Побудова гістограми яскравості зображення і виведення її на екран.
```

```
imhist(I);
```

```
%%Отримання гістограми в логарифмічному масштабі
```

```
%%і виведення її на екран.
```

```
[h, cx]=imhist(I);
```

```
h=log10(h);
```

```
figure, plot(cx, h);
```

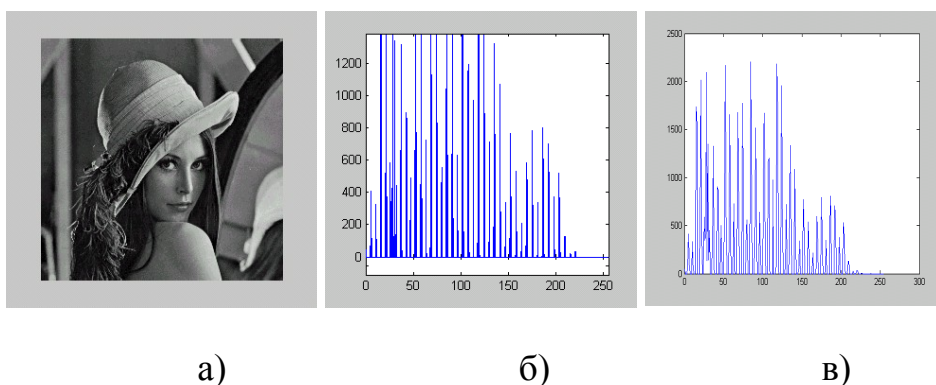


Рисунок 6.2 – Приклад гістограм яскравості зображення

6.2 Обчислення середнього значення елементів матриці

Синтаксис:

$m = \text{mean2}(S)$

Опис:

Функція $m = \text{mean2}(S)$ обчислює середнє значення елементів матриці S . Ця функція еквівалентна $\text{mean}(S(:))$.

6.3 Обчислення середньоквадратичного відхилення елементів матриці

Синтаксис:

$D = \text{std2}(S)$

Опис:

Функція $D = \text{std2}(S)$ обчислює середньоквадратичне відхилення елементів матриці S .

6.4 Обчислення коефіцієнта кореляції між двома матрицями

Синтаксис:

$k = \text{corr2}(A, B)$

Опис:

Функція $k = \text{corr2}(A, B)$ обчислює коефіцієнт кореляції між матрицями A і B однакового розміру.

6.5 Обчислення двовимірної взаємної кореляційної функції

Синтаксис:

$c = \text{xcorr2}(a, b)$

$c = \text{xcorr2}(a)$

Опис:

Функція $c = \text{xcorr2}(a, b)$ обчислює двовимірну взаємну кореляційну функцію з двох двовимірних сигналів за вибірками, заданих в матрицях a і b .

Функція $c = \text{xcorr2}(a)$ обчислює автокореляційну функцію й еквівалентна функції $c = \text{xcorr2}(a, a)$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Ознайомитись з ключовими положеннями, занести до протоколу функції (синтаксис та описання), які потрібні для виконання лабораторного завдання.

КЛЮЧОВІ ПИТАННЯ

1. В чому полягає трикомпонентна теорія колірного сприйняття Гельгольца?
2. Які типи зображень підтримує MatLab?
3. Яка різниця між форматами uint8 та double?
4. Що розуміють під бінарizaцією зображення за порогом?
5. Що розуміють під геометричними перетвореннями зображень?
6. Поміркуйте над поняттями “функція кореляції” та “функція автокореляції”.

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАВДАННЯ

1. Прочитати зображення з файла, вивести його на екран, записати за різними форматами. Виділити з кольорового зображення червону, зелену і синю складові і вивести їх на екран. Побудувати гістограму довільного рядка кольорового зображення і гістограму повного зображення.

2 Перетворити півтонове зображення в бінарне зображення, використовуючи різний поріг. Знайти оптимальний поріг, за якого об'єкти на зображенні будуть виділені чорним кольором, а фон стане білим.

3 Перетворити повнокольорове зображення у півтонове зображення. Розрахувати коефіцієнт кореляції між зеленою складовою та яскравісною складовою початкового зображення. Розрахувати коефіцієнт кореляції між червоним кольорорізницею сигналом і синьою складовою початкового зображення.

4 Виділити з напівтонового зображення деяку прямокутну область. Піддаючи цю прямокутну область геометричним перетворенням (масштабування і поворот), знайти область зображення найбільш корельовану з обраною.