

Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗВ'ЯЗКУ

Кафедра прикладної фізики та наноматеріалів

КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

Методичні вказівки та завдання до курсової роботи з фізики
для студентів усіх технічних спеціальностей

Одеса 2022

Рецензент – д.т.н., проф. Лісовий І.П.

Коливання та хвилі: методичні вказівки для виконання курсової роботи з фізики для студентів усіх технічних спеціальностей / Укладачі: Марколенко П.Ю., Ірха В.І., Марколенко Т.Д. Одеса: ДУІТЗ. 2022. 64 с.

Методичні вказівки спрямовані на поглиблення і засвоєння фізичних процесів, що відбуваються при бездротовому передаванні інформації та електронних пристроях зв'язку.

Запропоновано тридцять варіантів курсової роботи з фізики коливань та хвиль.

Посібник містить необхідний теоретичний і довідковий матеріал. Розраховано на студентів першого курсу навчання усіх технічних спеціальностей.

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри
прикладної фізики та наноматеріалів
і рекомендовано до друку.
Протокол № 1 від 31.08.2021 р.

ЗАТВЕРДЖЕНО
Методичною радою
факультету ФЕАМ.
Протокол № 1 від 31.08.2021 р.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Для виконання курсової роботи студенти повинні вивчити розділи «Електрика», «Магнетизм», «Коливання» та «Хвилі» з курсу фізики.

Курсова робота складається з шести завдань.

Умови завдань по кожному варіанту та початкові дані зазначено в розділах завдання та в табл. 1 – 6.

Номер варіанта визначається порядковим номером прізвища студента в журналі групи.

- Курсова робота виконується на аркушах формату А4. Записи потрібно робити на одній стороні аркуша. Аркуші зшиваються в папку.

- На обкладинці слід зазначити назву роботи, **номер варіанта**, прізвище та ініціали студента, шифр групи.

- Розрахункову частину слід розташовувати за порядком нумерації завдань.

- Розрахункова частина по кожному завданню повинна містити одинадцять пунктів:

1. Назву завдання.

2. Теоретичні положення.

3. Повну умову завдання.

4. Короткий запис умови.

5. Приведення значення заданих величин до системи одиниць СІ.

6. Пояснювальну схему або рисунок.

7. Перелік законів чи формул, котрі відображають фізичні явища теми завдання. Всі позначення у формулах необхідно пояснити.

8. З пропонованих в п. 7 формул слід скласти систему рівнянь та отримати розв'язок завдання або його частини в літерному вигляді, де величина, яку потрібно знайти, має бути надана через задані величини в літерних (символьних) позначеннях.

9. Перевірку одиниць виміру отриманих величин за розмірністю. Для цього потрібно підставити у формулу розв'язку замість символу кожної величини її одиницю виміру і здійснити необхідні перетворення.

10. Лише після збігу одиниць виміру слід підставити у формулу числові значення величин і зробити обчислення (див. приклади розв'язування задач). Обчислення проводити з трьома значущими цифрами.

11. Результат виконання розрахункової частини завдання (відповідь).

- В роботи слід привести використану літературу.

КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ ЗНАНЬ

При оцінюванні практичної частини завдання курсової роботи студент отримує:

- за правильне виконання розрахунків й оформлення завдання та вірне пояснення ходу розрахунків і теоретичної частини – 100 балів;
- за правильне виконання розрахунків й оформлення завдання і неточностями в поясненнях – 90 балів;
- за правильне виконання розрахунків й оформлення завдання та помилками в поясненнях ходу розрахунків і теоретичної частини – 80 балів;
- за правильне виконання розрахунків з недоліками оформлення (немає пояснень величин, схеми, одиниць виміру і т.д.) завдання і вірне пояснення ходу розрахунків та теоретичної частини – 70 балів;
- за правильне виконання розрахунків з недоліками оформлення (немає пояснень величин, схеми, одиниць виміру і т.д.) завдання і неточностями в поясненнях ходу розрахунків та теоретичної частини – 65 балів;
- за правильний хід розрахунків й оформлення завдання, але з невірним числовим результатом і вірним поясненням ходу розрахунків та теоретичної частини – 60 балів.

Підсумкова оцінка виставляється як середнє значення від оцінок, отриманих студентом за кожне завдання окремо.

Оцінка виставляється виходячи з наступних критеріїв:

«Відмінно» – 90-100 балів;

«Добре» – 74-89 балів;

«Задовільно» – 60-73 балів;

«Незадовільно» – менше ніж 60 балів.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ФОРМУЛИ

КОЛИВАННЯ

Коливаннями називаються рухи або зміни стану, що мають повторюваність у часі. Коливання називаються періодичними, якщо значення фізичних величин, що змінюються в процесі коливань, повторюються через рівні проміжки часу.

Положення системи, в якому вона може знаходитися нескінченно довго, без дії на неї зовнішніх сил називають *станом рівноваги*.

Будь-яка фізична величина здійснює коливання біля положення рівноваги.

До завдання 1. Власні механічні гармонічні коливання

Рух механічної системи біля її положення рівноваги називають *механічними коливаннями*.

Вільні коливання (прості гармонічні і згасаючі коливання) це такі, які відбуваються за відсутності зовні прикладеної змінної дії до системи.

Вимушені коливання — встановлюються у системі в результаті дії на неї змінних зовнішніх сил (періодична зовнішня сила в механічних системах або змінна ЕРС генератора в електромагнітних системах).

Найпростішу модель коливальної системи називають *гармонічним осцилятором*.

Власними або **незгасаючими** називаються коливання, при яких коливальна система не віддає енергію в зовнішнє середовище. Такі коливання описуються диференціальним рівнянням другого порядку, яке називають рівнянням гармонічного осцилятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1)$$

Періодом коливання T називається найменший проміжок часу, після якого повторюються значення всіх величин, що характеризують коливальний рух. За цей час відбувається одне повне коливання.

Одиниця вимірювання періоду $T - [с]$.

Частотою періодичних коливань ν називається число повних коливань, що відбуваються за одиницю часу:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}. \quad (2)$$

Одиниця вимірювання частоти ν – герц $[Гц = с^{-1}]$.

Циклічною (круговою) частотою ω періодичних коливань називається число повних коливань, що здійснюються за 2π одиниць часу:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T, \text{ звідки } T = 2\pi/\omega. \quad (3)$$

Одиниця вимірювання циклічної частоти ω – $[рад/с]$.

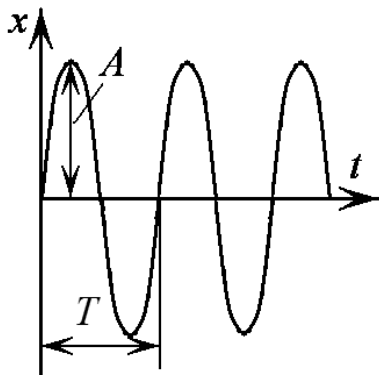


Рис. 1 – Зміщення тіла при власних механічних коливаннях

Гармонічними коливаннями називаються коливання, в яких коливальна величина x зміщується з часом за законом синуса або косинуса (рис. 1). Загальне рішення диференційного рівняння (1) буде рівнянням власних гармонічних коливань:

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0), \quad (4)$$

де A , ω_0 і φ_0 – постійні величини, причому $A > 0$ і $\omega_0 > 0$; x – зміщення точки, що коливається, від положення рівноваги.

Величина A дорівнює найбільшому абсолютному значенню зміщення тіла, що коливається, від положення рівноваги є **амплітудою коливання**.

Вираз

$$\omega_0 t + \varphi_0 = \Phi \quad (5)$$

визначає значення зміщення x в даний момент часу і називається **фазою** коливання. В момент початку відліку часу ($t = 0$) фаза дорівнює **початковій фазі коливань** φ_0 .

Одиниця вимірювання фази Φ – радіан $[рад]$.

Циклічна (колова) частота ω_0 – похідна фази за часом (швидкість зміни фази):

$$\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (6)$$

Швидкість та прискорення гармонічного коливання

Під модулем швидкості v гармонічного коливання точки слід розуміти зміну величини зміщення x за дуже малий проміжок часу (тобто першу похідну зміщення з часом):

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (7)$$

Швидкість гармонічного коливання, що описується рівнянням (4),

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -v_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v_0 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0\right), \quad (8)$$

де $v_0 = \omega_0 A$ – **амплітуда швидкості**. Фаза швидкості випереджає фазу зміщення на $\pi/2$.

Під модулем прискорення a гармонічного коливання точки слід розуміти зміну швидкості v коливання за одиницю часу (тобто першу похідну швидкості з часом):

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (9)$$

Прискорення гармонічного коливання, що описується рівнянням (4),

$$\begin{aligned} a = \frac{dv}{dt} &= -\omega_0^2 A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= a_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) = -\omega_0^2 x, \end{aligned} \quad (10)$$

де $a_0 = \omega_0^2 A$ – **амплітуда прискорення**. Фаза прискорення випереджає фазу зміщення на π .

Гармонічні коливання пружинного маятника

У стані рівноваги пружинного маятника сила тяжіння, що діє на нього, врівноважується силою пружності розтягнутої пружини (рис. 2). Якщо вивести тіло з положення рівноваги, то маятник почне коливатися.

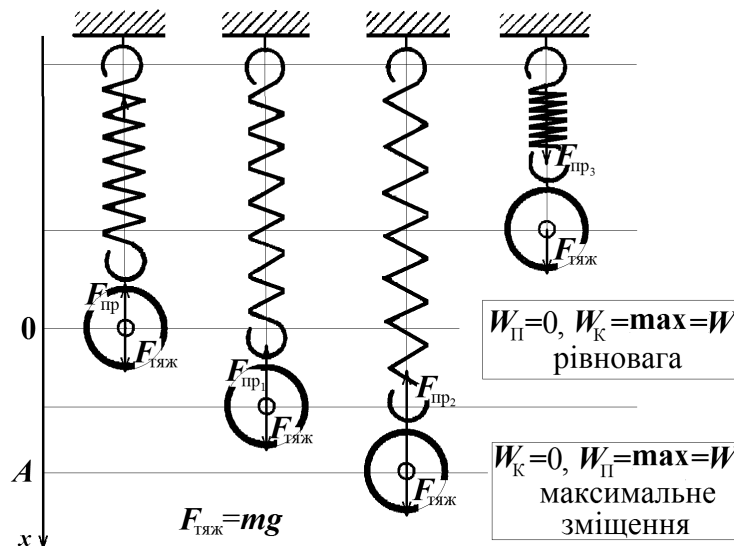


Рис. 2 – Пружинний маятник

За законом Гука: сила пружності є прямо пропорційною абсолютному значенню зміщення x маятника і завжди спрямована до положення рівноваги

$$F_{\text{пр}} = -k \cdot x, \quad (11)$$

де x – абсолютне значення зміщення маятника; k – коефіцієнт пружності.

За другим законом Ньютона

$$F = m \cdot a, \quad (12)$$

де m – маса тіла пружинного маятника, a – його прискорення.

Отже: $a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m} \cdot x = -\omega_0^2 \cdot x$, де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Власна циклічна частота вільних коливань пружинного маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (13)$$

Період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (14)$$

При гармонічних коливаннях пружинного маятника відбуваються перетворення потенційної енергії пружно деформованого тіла $W_{\Pi} = \frac{k \cdot x^2}{2}$ в його кінетичну енергію $W_{\text{К}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$.

Таким чином:

$$W_{\Pi} = \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{k \cdot A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (15)$$

$$W_{\text{К}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (16)$$

Повна енергія W пружинного маятника

$$W = W_{\text{К}} + W_{\Pi} \Rightarrow W = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2} \Rightarrow W = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2}. \quad (17)$$

До завдання 2. Власні електромагнітні гармонічні коливання

Такі коливання відбуваються в коливальному контурі, що складається з котушки індуктивності та конденсатора (рис. 3). Електричним опором провідників та приладів в такому колі нехтуємо.

Конденсатор заряджений заздалегідь. При розімкненому ключі система еквівалентна пружинному маятнику (рис. 4) зі стиснутою пружиною. Спочатку вся енергія зосереджена в електричному полі конденсатора.

Після замикання ключа, конденсатор розряджається і в колі протікає струм, а в котушці з'являється магнітне поле. При цьому енергія конденсатора переходить в енергію магнітного поля котушки індуктивності.

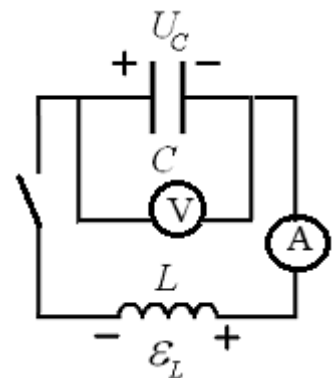


Рис. 3 – Власні електромагнітні коливання, контур

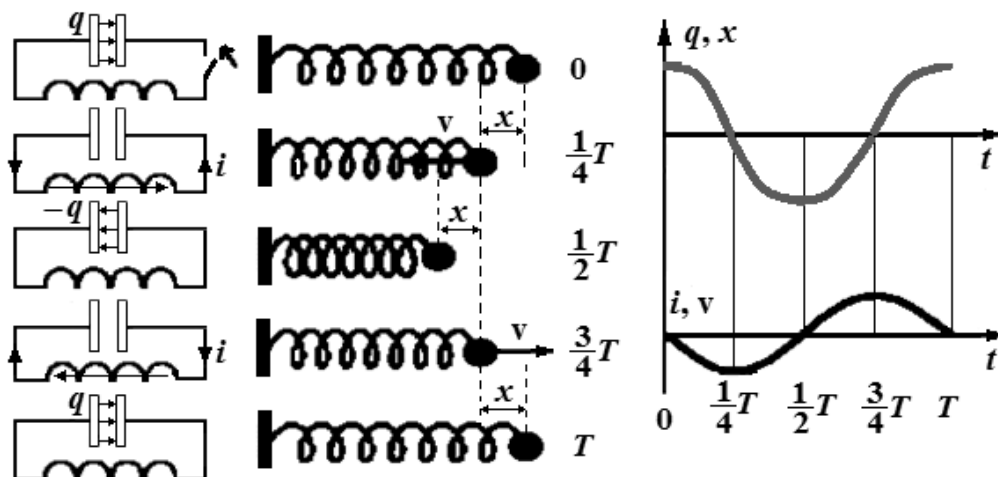


Рис. 4 – Порівняння механічних та електромагнітних коливань

Через час, що дорівнює чверті періоду коливань, конденсатор повністю розрядиться, і вся енергія електричного поля перейде в енергію магнітного поля котушки (еквівалентно маятнику в положенні рівноваги). Це аналогічно тому, що вся енергія пружинного маятника перейде з потенційної в кінетичну. У наступну чверть періоду енергія магнітного поля зменшуватиметься зі зменшенням струму. Це спричинить появу струму самоіндукції, який буде за правилом Ленца підтримувати струм у початковому напрямку, доки позитивні заряди з однієї пластини конденсатора не перетечуть в іншу й енергія магнітного поля не перетвориться на енергію електричного поля конденсатора. Далі конденсатор починає розряджатися, і процес повторюється другу половину періоду, поки конденсатор не опиниться у початковому стані.

Оскільки при власних електричних коливаннях опір провідників дорівнює нулю, то за другим правилом Кірхгофа

$$U_C = \mathcal{E}_L \text{ або } \frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}, \quad (18)$$

де $U_C = \frac{q}{C}$ – падіння напруги на конденсаторі; $\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$ – ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці індуктивності.

Тому отримаємо, що такі коливання описуються диференціальним рівнянням другого порядку

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad (19)$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$ – циклічна частота власних коливань у контурі з індуктивністю L та електроємністю C .

Рішенням такого рівняння (19) є гармонічне коливання

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (20)$$

якщо підставити (20) в (19), отримаємо

$$L(-q_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)) + \frac{q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)}{C} = 0 \quad \text{або} \quad -Lq\omega_0^2 = -\frac{q}{C}.$$

Отже, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, та ми отримаємо формулу **Томсона**

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (21)$$

Для таких коливань рівняння зміни струму та напруги матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} i = \frac{dq}{dt} &= -\omega_0 q_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -I_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= I_0 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0\right); \end{aligned} \quad (22)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_{C0} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (23)$$

де $I_0 = \omega_0 q_0$ – **амплітуда струму**; $U_{C0} = \frac{q_0}{C}$ – **амплітуда напруги**. З порівняння (22) та (23) можна побачити, що струм випереджає за фазою напругу на $\pi/2$.

При таких коливаннях енергія постійно трансформується з енергії електричного в енергію магнітного поля і навпаки.

Енергія електричного поля зосереджена в конденсаторі:

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{CU_{C0}^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = W_{C\max} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (24)$$

а енергія магнітного – в котушці індуктивності

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = W_{L\max} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (25)$$

де $W_{C\max} = \frac{CU_{C0}^2}{2}$ та $W_{L\max} = \frac{LI_0^2}{2}$ – максимальні значення енергії електричного і магнітного полів відповідно.

Тому повна енергія в будь-який момент часу дорівнює сумі цих енергій, оскільки енергія з системи не виходить, повна енергія дорівнює максимальній енергії магнітного або електричного поля:

$$W = W_C + W_L = W_{C\max} = W_{L\max} = \frac{CU_{C0}^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (26)$$

До завдання 3. Згасаючі коливання

Реальні коливальні системи відчують різні види опорів і через деякий час такі системи припиняють коливальний рух, якщо не має зовнішньої підтримки коливань.

Згасаючими є коливання, енергія яких зменшується з часом, тобто при таких коливаннях енергія з системи розсіюється в оточуюче середовище.

Згасаючі механічні коливання пружинного маятника

Реальні механічні коливальні системи при русі відчують опір з боку оточуючого його середовища, і через деякий час такі системи припиняють коливальний рух.

При таких коливаннях механічна енергія системи, що коливається, поступово зменшується, переходячи в тепло (дисипація енергії).

При цьому в системі діють сили:

– пружності $F_{\text{пр}} = -k \cdot x$;

– опору $F_{\text{оп}} = -rv$,

де r – коефіцієнт опору; v – швидкість руху маятника.

За другим законом Ньютона

$$F_{\text{пр}} + F_{\text{оп}} = ma \quad \text{або} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (27)$$

Поділивши (27) на m можна отримати диференціальне рівняння таких коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (28)$$

де $\beta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт згасання; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – **власна циклічна частота коливань** пружинного маятника.

Рішенням рівняння (28) буде рівняння згасаючих механічних коливань в інтегральному вигляді

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (29)$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – **колова (циклічна) частота згасаючих коливань**;

$A_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасаючих коливань, яка зменшується за експонентою;

A_0 – амплітуда механічної системи в початковий момент часу $t = 0$.

Основною відмінністю згасаючих коливань від власних є зменшення їхньої амплітуди з часом, рис. 5.

Згасаючі коливання є неперіодичними коливаннями, оскільки в них ніколи не повторюються значення фізичних величин, що характеризують коливальний рух. Тому ми використовуємо умовні поняття періоду та частоти коливань.

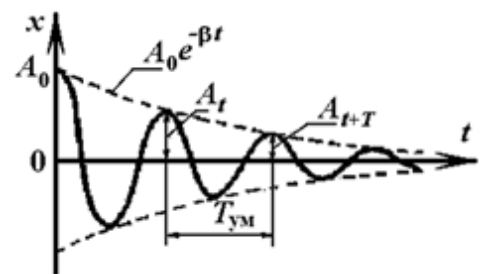


Рис. 5 – Зміна амплітуди згасаючих коливань

Умовним періодом згасаючих коливань називається проміжок часу між двома послідовними станами системи, що коливається, в яких фізичні величини, що характеризують коливання, змінюються в тому самому напрямку.

Умовний період згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (30)$$

він завжди більший за період власних коливань системи.

Основною характеристикою таких коливань є **декремент згасання** (це відношення двох наступних амплітуд одного й того ж знака, що віддаляються один від одного за часом на період)

$$\varepsilon = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (31)$$

У практичних розрахунках найчастіше використовується **логарифмічний декремент згасання**

$$\delta = \ln \varepsilon = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (32)$$

Позначимо τ як проміжок часу, протягом якого амплітуда коливань зменшилася в e разів і можемо записати

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = e^{\beta \tau} = e, \quad (33)$$

отже, $\beta \tau = 1$ або

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (34)$$

Таким чином, коефіцієнт згасання β – **величина, обернено пропорційна часу, за який амплітуда коливань зменшується в e разів**. За час τ система

встигає здійснити $N_e = \frac{\tau}{T}$ – коливань, тому

$$\delta = \beta T = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau}{N_e} = \frac{1}{N_e}. \quad (35)$$

Отже, **логарифмічний декремент згасання, величина обернена до кількості коливань, що здійснюються за час, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів**.

Також для характеристики згасаючих коливань використовується **добротність коливальної системи**.

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e. \quad (36)$$

Видно, що добротність пропорційна кількості коливань, що здійснюються системою за час, протягом якого амплітуда зменшується в e разів.

Чим більшою є добротність, тим менше згасання у системі.

Згасаючі електричні коливання

В електричному коливальному контурі елементи з'єднані за допомогою провідників, які мають опір і на яких також відбувається падіння напруги, рис. 6.

При таких коливаннях енергія з кола, за законом Джоуля-Ленця, поступово переходить в тепло (дисипація енергії).

Якщо позначити через R опір провідників, то на ньому падіння напруги за законом Ома дорівнює $U_R = iR$.

Тоді за другим правилом Кірхгофа

$$U_C + U_R = \mathcal{E}_L \quad \text{або} \quad \frac{q}{C} + IR = -L \frac{di}{dt}, \quad (37)$$

де $U_C = \frac{q}{C}$ – падіння напруги на конденсаторі; $\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$ – ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці індуктивності.

Поділивши (37) на L , можна отримати диференціальне рівняння таких коливань

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad (38)$$

де $\beta = \frac{R}{2L}$ – коефіцієнт згасання; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ – **власна циклічна частота коливань у колі**.

Рішенням рівняння (38) буде рівняння згасаючих електричних коливань в інтегральному вигляді

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (39)$$

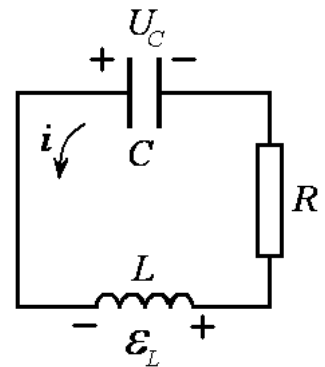


Рис. 6 – Коливальний контур (згасаючі коливання)

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – **колова (циклічна) частота згасаючих коливань**;
 $q_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда заряду, яка зменшується за експонентою; q_0 – величина заряду в початковий момент часу $t = 0$.

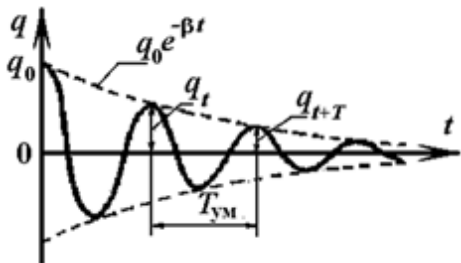


Рис. 7 – Зміна амплітуди згасаючих електромагнітних коливань

Основною відмінністю згасаючих коливань від власних є зменшення їхньої амплітуди з часом, рис. 7.

Згасаючі коливання є неперіодичними коливаннями, оскільки в них ніколи не повторюються значення фізичних величин, що характеризують коливальний рух. Тому ми використовуємо умовні поняття періоду та

частоти коливань. **Умовним періодом** згасаючих коливань називається проміжок часу між двома послідовними станами системи, що коливається, в яких фізичні величини, що характеризують коливання, змінюються в тому самому напрямку.

Умовний період згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (40)$$

він завжди більший за період власних коливань системи.

Основною характеристикою таких коливань є **декремент згасання** (це відношення двох наступних амплітуд зарядів, струмів або напруг через період

$$\varepsilon = \frac{q_t}{q_{t+T}} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (41)$$

У практичних розрахунках найчастіше використовується **логарифмічний декремент згасання**

$$\delta = \ln \varepsilon = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (42)$$

Позначимо τ як проміжок часу, протягом якого величина заряду зменшилася в e разів, і можемо записати

$$\frac{q_t}{q_{t+T}} = e^{\beta\tau} = e, \quad (43)$$

отже, $\beta\tau = 1$ або

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (44)$$

Таким чином, коефіцієнт згасання β – *величина, обернено пропорційна часу, за який величина заряду зменшується в e разів*. За час τ система встигає

здійснити $N_e = \frac{\tau}{T}$ – коливань, тому

$$\delta = \beta T = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau}{N_e} = \frac{1}{N_e}. \quad (45)$$

Отже, *логарифмічний декремент згасання, величина обернена до кількості коливань, що здійснюються за час, протягом якого величина заряду зменшується в e разів*.

Також для характеристики згасаючих коливань використовується *добротність коливальної системи*.

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (46)$$

Видно, що добротність пропорційна кількості коливань, що здійснюються системою за час, протягом якого величина заряду зменшується в e разів.

Чим більшою є добротність, тим менше згасання у системі.

До завдання 4. Вимушені електромагнітні коливання

Змушеними електричними коливаннями називають незгасаючі коливання системи, які виникають в коливальному контурі в коло якого ввімкнена ЕРС, що періодично змінюється з часом. Для того, щоб коливання здійснювалися в часі нескінченно довго, необхідно компенсувати енергію, що виділяється в зовнішнє середовище в результаті сил опору дією зовнішнього джерела.

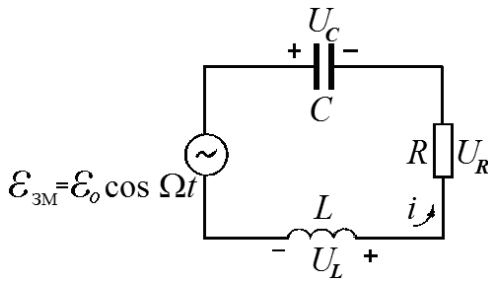


Рис. 8 – Послідовний
коливальний контур

Будь-який електричний коливальний контур має ємність, індуктивність і опір.

Якщо в контур з послідовно включеними (рис. 8) конденсатором ємністю C (вважаємо ємність усього контуру), котушкою індуктивності L (вважаємо індуктивність всього контуру) і резистором

опором R , ввімкнути зовнішню ЕРС, що періодично змінюється, то в контурі виникнуть **електричні змушені коливання**.

Розглянемо вимушені коливання в контурі під дією змушуючої ЕРС, що змінюється згідно з законом

$$\mathcal{E}_{\text{зм}} = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (47)$$

де $\mathcal{E}_0$ – амплітудне значення змушуючої ЕРС; Ω – циклічна частота зміни ЕРС; φ_0 – початкова фаза зміни ЕРС. На підставі II закону Кірхгофа (в будь-якому замкнутому контурі сума падінь напруги рівна сумі ЕРС в цьому контурі)

можна записати: $U_R + U_C = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_{\text{зм}}$. Підставивши значення $U_R = iR$, $U_C = \frac{q}{C}$,

$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = -U_L$, отримаємо диференціальне рівняння змушених електричних

коливань в контурі:

$$Ri + \frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} + \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad \text{або} \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_{\text{зм}}. \quad (48)$$

Поділивши (48) на L і позначивши через $\beta = \frac{R}{2L}$ та $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, отримаємо

диференціальне рівняння змушених електричних коливань у вигляді

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = (\mathcal{E}_0 / L) \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0). \quad (49)$$

При сталих змушених коливаннях у контурі рішенням цього рівняння є **рівняння змушених електричних коливань в інтегральному вигляді**

$$q = q_0 \sin(\Omega t - \Phi + \varphi_0). \quad (50)$$

Оскільки $i = dq/dt$, то сила струму в контурі змінюватиметься згідно з законом:

$$i = q_0 \Omega \cos(\Omega t - \Phi + \varphi_0) = I_0 \cos(\Omega t - \Phi + \varphi_0). \quad (51)$$

Як видно з (51), струм у контурі при змушених коливаннях змінюється за тим же законом і з тією ж циклічною частотою Ω , що й ЕРС у контурі, але фази різні.

Взявши початкові фази струму і ЕРС рівними нулю, а зсув фаз між ними Φ , отримаємо

$$i = I_0 \cos \Omega t, \quad (52)$$

$$\mathcal{E}_{\text{ЗМ}} = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \Phi), \quad (53)$$

де I_0 – амплітудне значення струму, яке необхідно визначити.

Для знаходження амплітуди струму і зсуву фаз Φ між ЕРС і струмом підставимо миттєві значення струму і заряду в рівняння (48), і розглянемо докладніше кожний доданок:

1. Напруга на індуктивності U_L дорівнює ЕРС самоіндукції, оскільки ми припустили, що індуктивності активного опору немає.

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -L\Omega I_0 \sin(\Omega t) = U_{L0} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (54)$$

де $U_{L0} = L\Omega I_0$ – **амплітудне значення напруги на індуктивності**.

2. Напруга на активному опорі

$$U_R = Ri = RI_0 \cos(\Omega t) = U_{R0} \cos(\Omega t), \quad (55)$$

де $U_{R0} = RI_0$ – **амплітудне значення напруги на активному опорі**.

3. Напруга на ємності $U_C = q/C$ і, оскільки $i = dq/dt$, тоді $dq = idt$, звідки

$$q = \int idt = \int I_0 \cos(\Omega t) dt = \frac{I_0}{\Omega} \sin \Omega t = \frac{I_0}{\Omega} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (56)$$

тому

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{\Omega C} \sin \Omega t = \frac{I_0}{\Omega C} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_{C0} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (57)$$

де $U_{C0} = I_0/\Omega C$ – амплітудне значення напруги на ємності.

Вирази для амплітудних значень напруг (54), (55), (57) нагадують закон Ома, де $X_L = \Omega L$ має назву **індуктивний опір** або **реактивний опір індуктивності** і вимірюється в омах, а $X_C = 1/\Omega C$ має назву **опір ємності** або **реактивний опір ємності** і також вимірюється в омах.

Підставивши в рівняння (48) знайдені значення напруг (54), (55), (57), отримаємо, з урахуванням амплітудних значень:

$$U_{L0} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) + U_{R0} \cos \Omega t + U_{C0} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \Phi). \quad (58)$$

З рівняння (58) видно, що змушуюча ЕРС дорівнює сумі трьох косинусоїдальних коливань однієї частоти, але вони мають різні початкові фази.

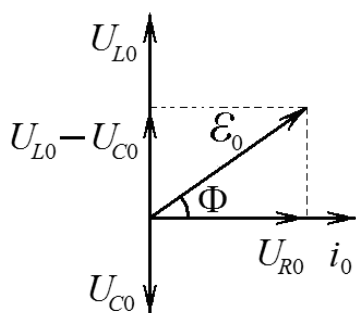


Рис. 9 – Векторна діаграма вимушених коливань в коливальному контурі

З векторної діаграми (рис. 9) видно, що напруга на індуктивності випереджає струм по фазі на $\pi/2$. Фізична причина цього полягає в тому, що при прикладенні до індуктивності зовнішньої напруги в ній виникають зустрічні індукційні струми, тому результуючий струм запізнюється щодо напруги.

Напруга на конденсаторі відстає по фазі від струму на $\pi/2$. Фізична причина цього відставання говорить про те, що заряд на конденсаторі (а також і напруга) змінюється унаслідок первинної зміни струму.

З рис. 9 можна отримати, що

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{U_{R0}^2 + (U_{L0} - U_{C0})^2}$$

або

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{(RI_0)^2 + \left(\Omega LI_0 - \frac{I_0}{\Omega C}\right)^2},$$

звідки

$$\mathcal{E}_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} = I_0 \cdot Z, \quad (59)$$

що є законом Ома для **повного контуру**, що містить ЕРС. Вираз для Z називається **повним опором контуру**

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} = \sqrt{X_{\text{акт}}^2 + X_{\text{реакт}}^2}, \quad (60)$$

де $\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) = X_{\text{реакт}}$ – *реактивний опір контуру*, а $R = X_{\text{акт}}$ – *активний опір контуру*.

Зсув фаз між струмом і ЕРС

$$\text{tg}\Phi = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} = \frac{X_{\text{реакт}}}{R}. \quad (61)$$

Залежно від співвідношення між індуктивним і ємкісним опорамі ЕРС може як випереджати струм, так і відставати від нього.

Якщо в розглянутому контурі змінювати частоту змушуючої ЕРС, не змінюючи її амплітудного значення $\mathcal{E}_0$, то амплітуда струму також змінюється. Графік залежності амплітуди струму від циклічної частоти Ω показаний на рис. 10.

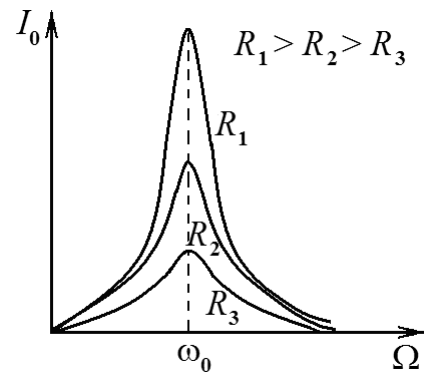


Рис. 10 – Залежність амплітуди струму в колі від частоти зовнішньої ЕРС

З формули (60) видно, що:

а) за низьких частот $\Omega \rightarrow 0$ $\frac{1}{\Omega C} \rightarrow \infty$;

б) зі зростанням частоти реактивний опір $X_{\text{реакт}}$ зменшується і на частоті

власних коливань ω_0 досягає нуля, тобто $X_{\text{реакт}} = \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) = 0$, отже

$\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Таким чином, *реактивний опір досягає нуля на частоті*

власних коливань контуру, при цьому повний опір кола мінімальний $Z = R$, а струм в колі максимальний $I_0^{\text{max}} = \mathcal{E}/R$;

в) подальше збільшення частоти призводить до зростання реактивного

$X_{\text{реакт}}$ і повного $Z = \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2} \rightarrow \infty$ опорів, тому струм зменшується.

Явище різкого зростання амплітуди струму змущених коливань і досягнення ними максимальної величини має назву резонанс струмів (пункт б).

При резонансі повний опір контуру рівний активному ($Z = R$) і з рівняння (61) видно, що зсув фаз між струмом і змущуючою ЕРС дорівнює нулю $\Phi = 0$, оскільки $\operatorname{tg}\Phi = \frac{X_{\text{реакт}}}{R} = \frac{0}{R} = 0$. Це означає, що на векторній діаграмі протилежно спрямовані вектори дорівнюють один одному ($U_{C0} = U_{L0}$), а вектор $\mathcal{E}_0$ спрямований по осі струму, тобто контур діє як чисто активний опір. При відхиленні Ω від ω_0 різниця фаз Φ зростає, причому

$$\begin{aligned} \Omega \rightarrow 0, \quad X_{\text{реакт}} \rightarrow \left(-\frac{1}{\Omega C}\right) \rightarrow -\infty, \quad \operatorname{tg}\Phi \rightarrow -\infty, \quad \Phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \\ \Omega \rightarrow \infty, \quad X_{\text{реакт}} \rightarrow (\omega L) \rightarrow \infty, \quad \operatorname{tg}\Phi \rightarrow \infty, \quad \Phi \rightarrow \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (62)$$

При резонансі електричне поле, створене в контурі джерелом ЕРС, спрямовано так, що сили цього поля весь час прискорюють рух зарядів. Якби в контурі був відсутній активний опір, то амплітуда струму зростала б з кожним періодом до нескінченності. У реальному контурі зі зростанням струму зростають і втрати енергії, а коли вони будуть дорівнювати роботі сил поля джерела, амплітуда струму досягне свого сталого значення. Якщо частота ЕРС не дорівнює власній частоті контуру, то зсув фаз Φ між струмом і ЕРС також не дорівнює нулю. При цьому поле джерела частину періоду прискорює рух зарядів, а частину – уповільнює. Тому амплітуда струму менша, ніж при резонансі, також при збільшенні зсуву фаз Φ час уповільнення переважає час прискорення за період.

ХВИЛІ

Хвилями називаються різні збурення стану речовини або поля, що поширюються в просторі з часом (коливання, що поширюються в просторі).

Коливання речовини породжують **пружну хвилю**, а коливання електромагнітного поля – **електромагнітну хвилю**. **Джерелом хвиль (вібратором)** є тіло, що здійснює коливання, які викликають у середовищі збурення.

Середовище є **пружним**, якщо між його частинками існують сили взаємодії, що перешкоджають будь-якій деформації цього середовища. *Наприклад*, тиск газів на стінки посудини забезпечує здатність газів чинити опір зміні їх об'єму.

Пружними хвилями називаються механічні збурення (деформації), що поширюються в пружному середовищі. Поширення пружних хвиль полягає в збудженні коливань в усе більш і більш віддалених від джерела хвиль частинок середовища. Сукупність точок даного середовища, що коливаються, є **хвильовим полем**. Точки хвильового поля здійснюють змушені коливання.

Фронтом хвилі називається геометричне місце точок, до яких доходить коливання в певний момент часу t . *Фронт хвилі для моменту часу t тільки один.*

Хвильова поверхня – це геометричне місце точок середовища, що коливаються в однакових фазах. *Хвильових поверхонь нескінченна множина.* Форма хвильових поверхонь може бути різною.

Залежно від форми фронту розрізняють хвилі **плоскі** і **сферичні**. У плоских хвилях хвильовими поверхнями є площини, а в сферичних – сфери.

Променем називається лінія, дотична до якої в кожній точці збігається з напрямком поширення хвилі. *В однорідному ізотропному середовищі промінь є прямою перпендикулярною до фронту хвилі і збігається з напрямком перенесення енергії хвилі.*

Хвиля називається **поперечною**, якщо частинки середовища коливаються в напрямках, перпендикулярних до напрямку розповсюдження хвилі, рис. 11, а.

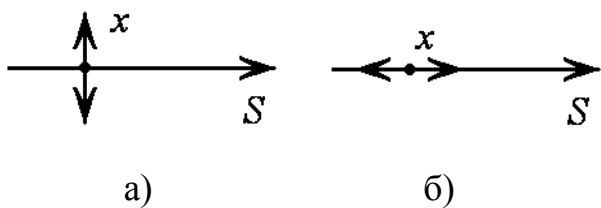


Рис. 11 – а) поперечна хвиля;
б) поздовжня хвиля

Наприклад, поперечна хвиля поширюється уздовж натягнутого гумового шнура, один кінець якого закріплений, а інший приведений в коливальний рух. Поперечні хвилі можуть виникати тільки в такому середовищі, яке має

пружність форми, тобто має здатність опору деформації зсуву. Цю властивість мають лише тверді тіла, тому поперечні хвилі поширюються тільки в твердих тілах. Хвиля називається **поздовжньою**, якщо частинки середовища коливаються у напрямі поширення хвилі, рис. 11, б. Поздовжні хвилі пов'язані з об'ємною деформацією середовища. Тому вони можуть поширюватися як в твердих, так і в рідких або газоподібних середовищах.

У газах і рідинах, які не мають пружності форми, поширення поперечних хвиль неможливе. Єдине виключення – це електромагнітна хвиля (ЕМХ). ЕМХ – коливання векторів напруженості електричного поля $\vec{E}$ і напруженості магнітного поля $\vec{H}$, що поширюються в просторі (ЕМХ **поперечна!**), рис. 12.

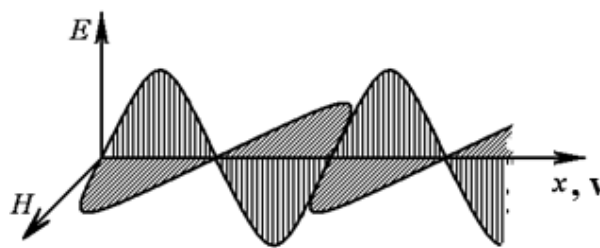


Рис. 12 – Електромагнітна хвиля (ЕМХ)

Швидкістю поширення хвилі (фазовою швидкістю) v називається фізична величина, яка чисельно дорівнює відстані, яку за одиницю часу проходить будь-яка точка хвильової поверхні. Вектор швидкості $\vec{v}$ спрямований по нормалі до хвильової поверхні у бік поширення хвилі.

Довжиною хвилі λ називається відстань між будь-якими двома найближчими точками хвильового поля, що коливаються з різницею фаз 2π (коливаються «у фазі»), рис. 13.

Іншими словами, **довжина хвилі** – це відстань, яку проходить будь-яка точка фронту хвилі за один період коливань у джерелі (вібраторі).

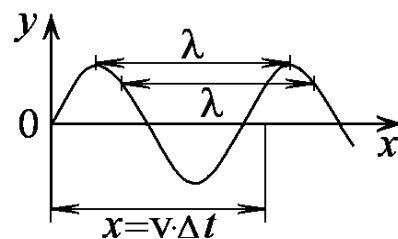


Рис. 13 – Визначення довжини поперечної хвилі

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{k}, \quad (63)$$

де $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ – період хвилі (найменший інтервал часу, через який коливання середовища повторюються); ν – частота хвилі (число коливань здійснених за одиницю часу); $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число (кількість довжин хвиль, що укладаються на 2π одиницях довжини); v – фазова швидкість хвилі.

До завдання 5. Механічні хвилі

Нехай:

- коливання в джерелі відбуваються згідно із законом $y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ з амплітудою A , циклічною частотою ω і початковою фазою φ ; хвиля поширюється уздовж осі x , рис. 13;

- початкова фаза дорівнює нулю ($\varphi = 0$), тобто у точці $x = 0$ при $t = 0$, $y = 0$;

- усі хвильові поверхні перпендикулярні до осі x і хвиля є плоскою.

Тоді в точці, розташованій на відстані x від джерела хвилі, коливання частинок відстають за часом на величину Δt від коливань частинок у джерелі $x = 0$, оскільки для проходження цієї відстані хвилі потрібен час $\Delta t = x/v$ (v – швидкість поширення хвилі). Отже, коливання частинок фронту плоскої хвилі в точці, віддаленій на відстані x від джерела, запізнюються за часом на Δt

$$y(x, t) = A \cdot \cos[\omega(t \pm \Delta t)] = y_0 \cdot \cos[\omega(t \pm x/v)].$$

При цьому передбачається, що в процесі поширення хвилі не відбувається її згасання.

Рівняння плоскої рухомої хвилі, що поширюється уздовж осі Ox :

$$y(x, t) = A \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (64)$$

Враховуючи, що $k = \omega/v$, отримаємо **рівняння плоскої незгасаючої хвилі в інтегральному вигляді**

$$y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t \pm kx), \quad (65)$$

або якби коливання в джерелі відбувалися згідно із законом $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$:

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t \pm kx). \quad (66)$$

Фаза рухомої хвилі $(\omega t \pm kx)$ – є функцією двох змінних часу і відстані (t та x). Для фіксованої відстані x зсув y є гармонічною функцією часу, а для фіксованого часу t зсув $y(x, t)$ є синусоїдою або косинусоїдою в просторі.

Якщо, за деякий час t_1 хвильовий фронт хвилі, що поширюється, зміститься на відстань Δx , то ця відстань в одиницях довжини хвилі:

$$\Delta x = v \cdot t_1 = \frac{\omega}{k} t_1 = \frac{\omega \cdot t_1}{2\pi} \cdot \lambda. \quad (67)$$

Знак «мінус» в рівняннях (65), (66) використовується при поширенні хвилі в позитивному напрямку x , а знак «плюс» – в негативному (тобто описує поширення хвилі до включення приладу для відліку часу).

Знайдемо другі похідні за координатою і часом від (65):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} &= -A \cdot k^2 \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi) = -\frac{\omega^2}{v^2} y(x, t); \\ \frac{d^2 y(x, t)}{dt^2} &= -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi) = -\omega^2 y(x, t), \end{aligned}$$

звідки отримаємо **хвильове рівняння в диференційному вигляді**

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 y(x, t)}{dt^2}. \quad (68)$$

Якщо зсув частинок середовища відбувається в трьох координатах з часом $\xi(x, y, z, t)$, то рівняння (68) має вигляд

$$\nabla^2 \xi(x, y, z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \xi(x, y, z, t)}{dt^2}, \quad (69)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Миттєва швидкість поширення хвилі в будь-який момент часу це є перша похідна від зсуву за часом:

$$v = \frac{dy(x,t)}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - kx) = v_0 \cdot \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right), \quad (70)$$

де $v_0 = A \cdot \omega$ – амплітуда швидкості поширення хвилі.

Прискорення дорівнює першій похідній швидкості за часом:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx) = a_0 \cos(\omega t - kx + \pi), \quad (71)$$

де $a_0 = A\omega^2$ – амплітуда прискорення.

При поширенні пружних хвиль відбувається деформація речовини. У твердих тілах відбувається деформація стиснення або розтягування. Вона характеризується відносною деформацією середовища та визначається як перша похідна зсуву за координатою:

$$\varepsilon = \frac{dy(x,t)}{dx} = A \cdot k \cdot \sin(\omega t - kx) = \varepsilon_0 \cdot \sin(\omega t - kx), \quad (72)$$

де $\varepsilon_0 = A \cdot k$ – максимальна відносна деформація.

До завдання 6. Електромагнітні хвилі

Електромагнітними хвилями називаються коливання векторів напруженості електричного $\vec{E}$ і магнітного поля $\vec{H}$, що поширюються в просторі з часом, (див. рис. 12).

Рівняння для векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx); \\ H &= H_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx), \end{aligned} \quad (73)$$

де ω – циклічна частота електромагнітної хвилі, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число; x – відстань від джерела хвиль до даної точки хвильового поля.

Швидкість (фазова швидкість) v електромагнітної хвилі у середовищі визначається з рівняння Максвелла і дорівнює

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (74)$$

де ε і μ – відносні діелектрична і магнітна проникності середовища відповідно;

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = $1,256 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнітна стала; $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі. Швидкість

поширення електромагнітних хвиль у даному середовищі збігається зі швидкістю світла в цьому середовищі.

Електромагнітні хвилі є поперечними, і коливання векторів напруженості $\vec{E}$ змінного електричного поля й індукції $\vec{H}$ змінного магнітного поля взаємно перпендикулярні і лежать у площині, перпендикулярній вектору швидкості $\vec{v}$ поширення хвилі. Вектори $\vec{v}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ складають правогвинтову систему: з кінця вектора $\vec{v}$ поворот від $\vec{E}$ до $\vec{H}$ по найкоротшому шляху має відбуватися проти часової стрілки.

Модулі векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ у плоскій електромагнітній хвилі зв'язані співвідношенням

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H. \quad (75)$$

Для немагнітного середовища $\mu = 1$.

Взаємно перпендикулярні вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ у електромагнітній хвилі, що поширюються у вільному просторі, коливаються в однаковій фазі – вони одночасно звертаються в нуль і одночасно досягають максимальних значень, відповідно рівнянь (75).

Променем є лінія, дотична в кожній точці до якої збігається з напрямом поширення хвилі, тобто напрямком перенесення енергії хвилі.

Густина потоку енергії електромагнітної хвилі визначається векторним добутком $\vec{E}$ і $\vec{H}$ (вектор Умова-Пойнтінга)

$$P = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (76)$$

Інтенсивністю електромагнітної хвилі I (середнє значення вектора Умова-Пойнтінга) є величина енергії, яку в середньому переносить хвиля за одиницю часу через одиничну площину, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі:

$$I = \langle P \rangle = \frac{E_0 \cdot H_0}{2}. \quad (77)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Вантаж, підвішений до пружини, здійснює коливання, рівняння яких має вигляд $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, рис. 14. Маса вантажу $m = 81,06$ г, жорсткість пружини $k = 20$ Н/м.

1) Запишіть рівняння коливань вантажу з числовими коефіцієнтами, якщо максимальна сила, що діє на вантаж, $F_{\max} = 0,4$ Н, а початкова фаза коливань

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}.$$

2) Побудуйте графіки зміщення, швидкості, прискорення вантажу, сили, що діє на вантаж, зміни кінетичної та потенціальної енергій у системі.

3) Визначте повну енергію коливання вантажу.

Дано:

$$m = 81,06 \text{ г} = 0,08106 \text{ кг};$$

$$k = 20 \text{ Н/м};$$

$$F_{\max} = 0,4 \text{ Н};$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

$$x(t), v(t), a(t), F(t),$$

$$W_k(t), W_{\Pi}(t), W - ?$$

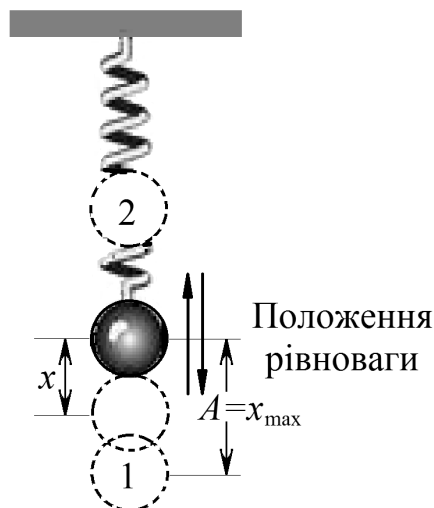


Рис. 14 – Пружинний маятник

Розв'язання:

Вантаж здійснює гармонічні коливання, рівняння яких задане у вигляді

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (78)$$

Циклічна частота коливань ω_0 залежить від маси вантажу m і від жорсткості пружини k як:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (79)$$

Амплітуду коливань A можна визначити, використовуючи задане значення максимальної сили. Оскільки, при зміщенні від положення рівноваги на вантаж діє пружна сила $F_{\text{пр}} = -k \cdot x$, (див. (11)), тоді вона має максимальне значення при максимальному значенні зміщення, що дорівнює амплітуді коливань $x_{\text{max}} = A$,

$$F_{\text{max}} = kA,$$

звідки амплітуда

$$A = \frac{F_{\text{max}}}{k}. \quad (80)$$

Перевіримо розмірність формул (79) та (80):

$$[\omega_0] = \sqrt{\frac{[k]}{[m]}} = \sqrt{\frac{\text{Н/м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}}; \quad [A] = \frac{[F_{\text{max}}]}{[k]} = \frac{\text{Н}}{\text{Н/м}} = \text{м}.$$

Виконаємо обчислення і запишемо рівняння коливань вантажу з числовими коефіцієнтами. Циклічну частоту виразимо в частках π .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{20}{0,08106}} = 15,7 \approx 5\pi \text{ с}^{-1}; \quad A = \frac{0,4}{20} = 0,02 \text{ м}.$$

Тому рівняння коливань вантажу з числовими коефіцієнтами (78) має вигляд:

$$x = 0,02 \cos(5\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ м}. \quad (81)$$

Швидкість вантажу визначається похідною зміщення за часом. Диференціюємо рівняння (81) за часом, отримаємо:

$$v = \frac{dx}{dt} = -5\pi \cdot 0,02 \sin(5\pi t - \frac{\pi}{4}) = 0,314 \cos(5\pi t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = 0,314 \cos(5\pi t + \frac{\pi}{4}) \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (82)$$

Прискорення дорівнює похідній швидкості за часом. Диференціюємо рівняння (82) за часом та отримаємо:

$$a = \frac{dv}{dt} = -5\pi \cdot 0,314 \sin(5\pi t + \frac{\pi}{4}) = 4,93 \cos(5\pi t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = 4,93 \cos(5\pi t + \frac{3\pi}{4}) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (83)$$

Сила, що діє на вантаж:

$$F = ma = -kx = 0,08106 \cdot 4,93 \cos(5\pi t + \frac{3\pi}{4}) = 0,4 \cdot \cos(5\pi t + \frac{3\pi}{4}) \text{ Н.} \quad (84)$$

Потенційна та кінетична енергії відповідно (15) та (16):

$$W_{\Pi} = \frac{20 \cdot 0,02^2}{2} \cos^2(5\pi t - \frac{\pi}{4}) = 0,004 \cos^2(5\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ Дж}, \quad (85)$$

$$W_{\text{к}} = \frac{0,08106 \cdot 15,7^2 \cdot 0,02^2}{2} \sin^2(5\pi t - \frac{\pi}{4}) = 0,004 \sin^2(5\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ Дж}. \quad (86)$$

Для побудови графіка функції необхідно вибрати масштаб шкали. При побудові графіків коливань фізичних величин, що описуються гармонічними функціями, масштабом по осі ординат є амплітуда, в нашому випадку $A = 0,02$ м, а по осі абсцис є безрозмірна величина – частки періоду $\frac{t}{T}$.

Оскільки період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega}$. У нашому випадку $T = \frac{2\pi}{5\pi} = 0,4$ с.

Для побудови графіка коливань $x = 0,02 \cos(5\pi t - \frac{\pi}{4})$, накреслимо осі координат і відкладемо по осі абсцис відрізки, що відповідають проміжкам часу в частках періоду ($\frac{t}{T}$: 8 клітинок на період), а по осі ординат – у позитивному і негативному напрямках відрізки, що відповідають амплітуді коливань (4 клітинки). Якби початкова фаза коливань дорівнювала нулю, то графік являв би собою просту косинусоїду, рис. 15.

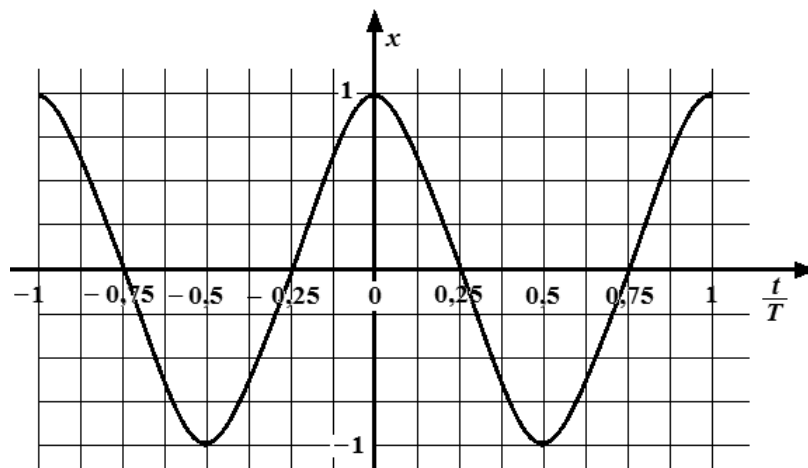


Рис. 15 – Графік косинусоїди

У нашому випадку початкова фаза $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$, що складає $\frac{1}{8}$ частину від 2π (періоду гармонічної функції).

Це означає що значення фази і зміщення досягається з різницею у часі

$$t_x = \frac{\varphi_0}{2\pi} \cdot T = \frac{-\frac{\pi}{4}}{2\pi} \cdot T = -\frac{T}{8}.$$

Таким чином, різниці фаз $-\frac{\pi}{4}$ відповідає різниця за часом на $t = -\frac{T}{8}$ (одній клітинці *ліворуч*). Таким чином, щоб отримати з графіка косинусоїди (рис. 15) графік функції $x = 0,02 \cos(5\pi t - \frac{\pi}{4})$, потрібно початок координат перемістити уздовж осі абсцис *вліво* на $T/8$ (одну клітинку), рис. 16.

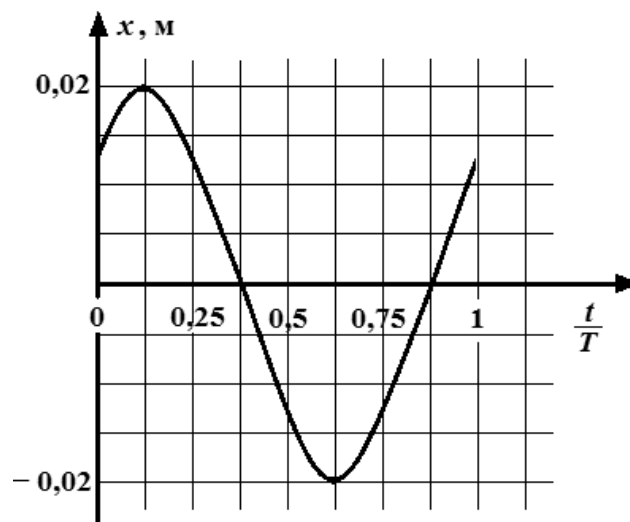


Рис. 16 – Графік зміщення

Аналогічним чином отримаємо графіки швидкості, прискорення вантажу, сили, що діє на вантаж, зміни кінетичної та потенціальної енергій у системі за рівняннями (5 – 9).

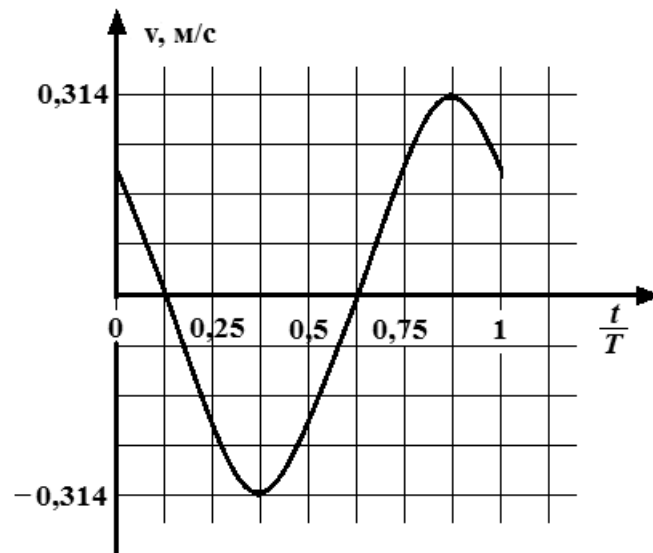


Рис. 17 – Графік швидкості

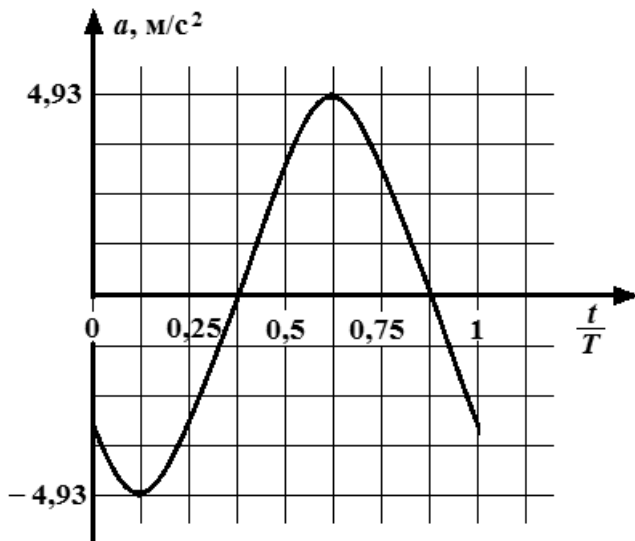


Рис. 18 – Графік прискорення

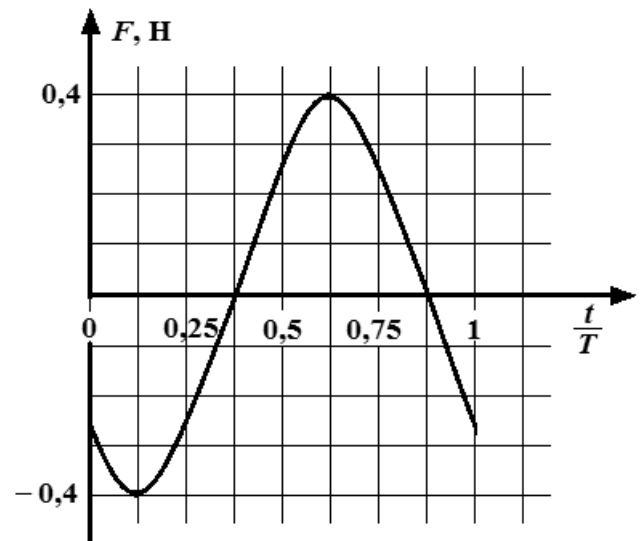


Рис. 19 – Графік сили

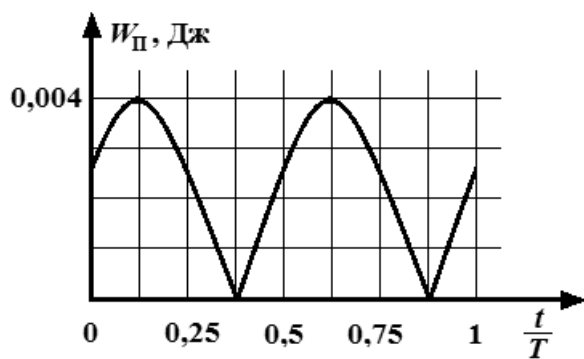


Рис. 20 – Графік потенціальної енергії

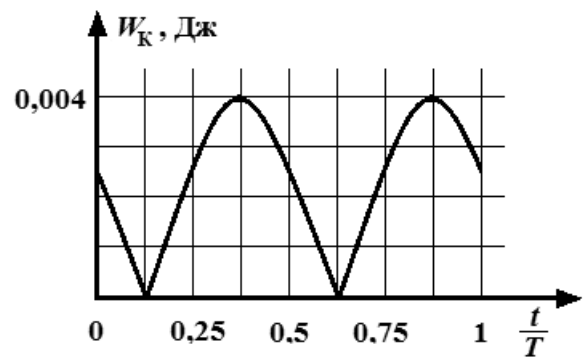


Рис. 21 – Графік кінетичної енергії

Повна енергія коливань вантажу дорівнює сумі його кінетичної і

потенційної енергії пружної деформації:

$$W = W_K + W_{\Pi} \Rightarrow W = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2} \Rightarrow W = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2}. \quad (87)$$

Виконаємо обчислення:

$$W = \frac{20 \cdot 0,02^2}{2} = 0,004 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $x = 0,02 \cos(5\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ м}, v = 0,314 \cos(5\pi t + \frac{\pi}{4}) \frac{\text{м}}{\text{с}};$

$$a = 4,93 \cos(5\pi t + \frac{3\pi}{4}) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; F = 0,4 \cdot \cos(5\pi t + \frac{3\pi}{4}) \text{ Н};$$

$$W_{\Pi} = 0,004 \cos^2(5\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ Дж}; W_K = 0,004 \sin^2(5\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ Дж}; W = 0,004 \text{ Дж}.$$

Приклад 2. Коливальний контур (рис. 22) складається з котушки індуктивності $L = 25 \text{ мГн}$ і конденсатора. Сила струму в контурі змінюється за законом $i = I_0 \cdot \cos \omega_0 t$, де $I_0 = 20 \text{ мА}$ і $\omega_0 = 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

1) Отримайте рівняння зміни з часом заряду на пластинах конденсатора і напруги між його обкладками.

2) Знайдіть повну енергію коливань у контурі.

Дано:

$$I_0 = 20 \text{ мА} = 0,02 \text{ А};$$

$$\omega_0 = 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$L = 25 \text{ мГн} = 0,025 \text{ Гн}.$$

Знайти: $q(t), U_C(t), W - ?$

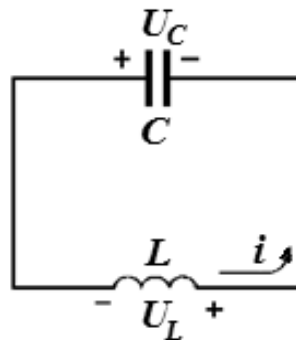


Рис. 22 – Коливальний контур

Розв'язання:

1. Рівняння зміни заряду з часом можна отримати, скориставшись визначенням миттєвого значення сили струму

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (88)$$

звідки $dq = idt$, або $q = \int dq = \int idt$. Підставимо у (88) задане рівняння сили струму та взявши інтеграл, отримаємо залежність заряду від часу:

$$q = \int I_0 \cos(\omega_0 t) dt = \frac{I_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (89)$$

Величина напруги пов'язана із зарядом на пластинах конденсатора співвідношенням

$$U_C = \frac{q}{C}, \quad (90)$$

де C – ємність конденсатора. Ємність можна знайти з рівняння для циклічної частоти контуру

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}},$$

$$\text{звідки} \quad C = \frac{1}{\omega_0^2 L}, \quad (91)$$

де L – індуктивність контуру. Підставивши (89) та (91) у формулу (90), отримаємо рівняння зміни напруги на конденсаторі

$$U_C = \omega_0 L I_0 \sin(\omega_0 t). \quad (92)$$

2. Повна енергія коливань у контурі дорівнює сумі енергій електричного поля в конденсаторі та магнітного поля в котушці індуктивності:

$$W = W_C + W_L = \frac{CU_C^2}{2} + \frac{Li^2}{2}.$$

Підставляючи значення ємності C з (91), рівняння зміни напруги на конденсаторі з (92) та задане рівняння сили струму, отримаємо

$$W = \frac{1}{\omega_0^2 L} \frac{\omega_0^2 L I_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{L I_0^2}{2} \cos^2 \omega_0 t = \frac{L I_0^2}{2} (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{L I_0^2}{2}. \quad (93)$$

Перевіримо розмірність формул (89), (92) та (93):

$$[q] = \frac{[I_0]}{[\omega_0]} = \frac{\text{А}}{\text{с}^{-1}} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл};$$

$$[U_{C0}] = [\omega_0] \cdot [L] \cdot [I_0] = \text{с}^{-1} \cdot \text{Гн} \cdot \text{А} = \frac{\text{Вб} \cdot \text{А}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В};$$

$$[W] = [L] \cdot [I_0^2] = \Gamma_H \cdot A^2 = \frac{B\delta \cdot A^2}{A} = T_L \cdot m^2 \cdot A = \frac{H \cdot m^2 \cdot A}{A \cdot m} = H \cdot m = \text{Дж}.$$

Підставивши числові значення, запишемо рівняння зміни заряду $q(t)$ і напруги $U(t)$ з числовими коефіцієнтами, обчислимо повну енергію коливань у контурі

$$q = \frac{0,02}{10^4} \sin 10^4 t = 2 \cdot 10^{-6} \sin 10^4 t, \text{ Кл};$$

$$U_C = 10^4 \cdot 0,025 \cdot 0,02 \sin 10^4 t = 5 \sin 10^4 t, \text{ В};$$

$$W = \frac{0,025 \cdot 0,02^2}{2} = 5 \cdot 10^{-6}, \text{ Дж}.$$

Відповідь: $q = 2 \cdot 10^{-6} \sin(10^4 t)$ Кл; $U_C = 5 \sin(10^4 t)$ В; $W = 5 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Приклад 3а. Вантаж, підвішений до пружини, здійснює коливання у в'язкому середовищі, рівняння яких має вигляд $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$ (рис. 23) з коефіцієнтом згасання $\beta = 2 \text{ с}^{-1}$; масою вантажу $m = 150 \text{ г}$; максимальною амплітудою коливань $A_0 = 3 \text{ см}$; логарифмічним декрементом загасання коливань $\delta = 1$.

1) Знайдіть необхідні параметри і запишіть рівняння коливань з числовими коефіцієнтами.

2) Знайдіть добротність системи та коефіцієнт опору руху.

Дано:

$$m = 150 \text{ г} = 0,15 \text{ кг};$$

$$\beta = 2 \text{ с}^{-1};$$

$$A_0 = 3 \text{ см} = 0,03 \text{ м};$$

$$\delta = 1.$$

Знайти:

$$x(t), Q, r - ?$$

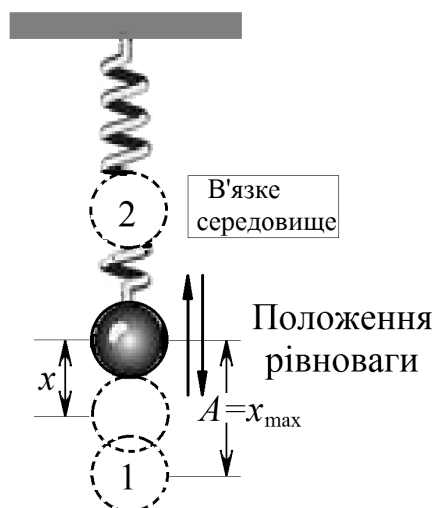


Рис. 23 – Пружинний маятник

Розв'язання:

1. Вантаж, підвішений до пружини, здійснює коливання у в'язкому середовищі, рівняння яких має вигляд:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t), \quad (94)$$

де $A_0 = 0,03$ м – максимальна амплітуда коливань; $\beta = 2 \text{ с}^{-1}$ – коефіцієнт згасання; ω – циклічна частота згасаючих коливань пружинного маятника.

Оскільки у відповідності з рівняннями (35) та (30)

$$\delta = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega}, \quad (95)$$

тоді

$$\omega = \beta \frac{2\pi}{\delta}. \quad (96)$$

Підставимо в (96) числові значення

$$\omega = \beta \frac{2\pi}{\delta} = 2 \cdot \frac{2\pi}{1} = 4\pi \text{ с}^{-1}. \quad (97)$$

Рівняння згасаючих коливань пружинного маятника з числовими коефіцієнтами буде мати вигляд:

$$x = 0,03e^{-2t} \cos(4\pi t) \text{ м}. \quad (98)$$

2. Оскільки добротність коливальної системи у відповідності з (36)

$$Q = \frac{\pi}{\delta}, \quad (99)$$

тоді, підставляючи числові значення, отримаємо:

$$Q = \frac{3,14}{1} = 3,14. \quad (100)$$

Оскільки коефіцієнт згасання $\beta = \frac{r}{2m}$, можна отримати вираз для розрахунку коефіцієнта опора руху

$$r = 2m\beta, \quad (101)$$

підставляючи числові значення m та β , отримаємо

$$r = 2 \cdot 0,15 \cdot 2 = 0,6 \text{ кг/с}. \quad (102)$$

Відповідь: $x = 0,03e^{-2t} \cos(4\pi t)$ м; $Q = 3,14$; $r = 0,6 \text{ кг/с}$.

Приклад 3б. Коливальний контур (рис. 24) складається з конденсатора, котушки індуктивністю $L = 2 \text{ мГн}$ і резистора. У початковий момент часу заряд на обкладках конденсатора є максимальним і дорівнює $q(0) = 2 \text{ мкКл}$. Умовний період коливань $T = 1 \text{ мс}$, логарифмічний декремент згасання $\delta = 0,8$.

1) Запишіть рівняння коливань заряду з числовими коефіцієнтами.

2) Визначте ємність конденсатора й опір резистора.

Дано:

$$L = 2 \text{ мГн} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

$$q(0) = 2 \text{ мкКл} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл};$$

$$T = 1 \text{ мс} = 10^{-3} \text{ с};$$

$$\delta = 0,8.$$

Знайти: $q(t)$, C , R – ?

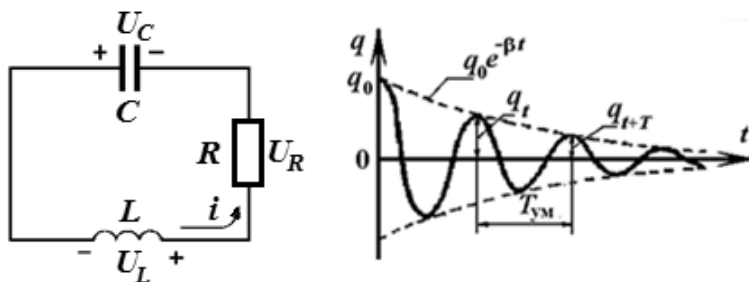


Рис. 24 – Коливальний контур та зміна струму в ньому

Розв'язання:

1. Коливання в контурі є згасаючими. Запишемо рівняння згасаючих коливань заряду в загальному вигляді

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t), \quad (103)$$

де q_0 – початкова амплітуда заряду; β – коефіцієнт згасання; ω – циклічна частота згасаючих коливань.

Циклічна частота згасаючих коливань:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (104)$$

де T – умовний період коливань.

В початковий момент часу $t = 0$ рівняння (103) має вигляд $q(0) = q_0 \cos \varphi_0$, звідки початкова фаза коливань

$$\varphi_0 = \arccos \frac{q(0)}{q_0} = \arccos 1 = 0. \quad (105)$$

Логарифмічний декремент згасання у відповідності з (42) $\delta = \beta T$, звідки коефіцієнт згасання

$$\beta = \frac{\delta}{T}. \quad (106)$$

Підставимо числові значення у вирази (104) та (106) і виконаємо обчислення

$$\omega = \frac{2\pi}{10^{-3}} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}, \quad \beta = \frac{0,8}{10^{-3}} = 800 \text{ с}^{-1}. \quad (107)$$

Запишемо рівняння коливань заряду з числовими коефіцієнтами

$$q = 2 \cdot 10^{-6} e^{-800 \cdot t} \cos(2\pi \cdot 10^3 t) \text{ Кл}. \quad (108)$$

Для визначення ємності конденсатора C та опору резистора R запишемо формули, що пов'язують коефіцієнт згасання β і циклічну частоту згасаючих коливань ω з параметрами контуру:

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad (109)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \beta^2}, \quad (110)$$

де ω_0 – власна циклічна частота коливань; L – індуктивність контуру.

З формули (109) отримаємо опір резистора у вигляді

$$R = 2\beta L. \quad (111)$$

З формули (110), оскільки $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \beta^2$, знаходимо ємність конденсатора:

$$C = \frac{1}{L(\omega^2 + \beta^2)}. \quad (112)$$

Перевіримо розмірність:

$$[R] = [\beta] \cdot [L] = \text{с}^{-1} \cdot \text{Гн} = \frac{\text{Вб}}{\text{с} \cdot \text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{А}} = \text{Ом};$$

$$[C] = \frac{1}{[L] \cdot [\omega^2 + \beta^2]} = \frac{1}{\text{Гн} \cdot \text{с}^{-2}} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{А}}{\text{Вб}} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф}.$$

Виконаємо обчислення

$$R = 2 \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 3,2 \text{ Ом};$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} (4 \cdot (3,14)^2 \cdot 10^6 + 800^2)} = 3,156 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

Відповідь: $q = 2 \cdot 10^{-6} e^{-800 \cdot t} \cos(2\pi \cdot 10^3 t) \text{ Кл}; C = 3,156 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; R = 3,2 \text{ Ом}.$

Приклад 4. У коло коливального контуру (рис. 25), що складається з послідовно з'єднаних котушки індуктивністю $L = 0,2$ Гн, резистора опором $R = 100$ Ом та конденсатора ємністю $C = 10$ мкФ, ввімкнута зовнішня змінна ЕРС. Напруга на конденсаторі змінюється з часом за законом $U_C = U_{C0} \cos(\Omega t)$, де $U_{C0} = 20$ В, $\Omega = 10^3$ с⁻¹.

1) Запишіть рівняння зміни з часом: сили струму в контурі, напруги на активному опорі (резисторі), напруги на індуктивності, напруги на ємності і ЕРС, що ввімкнена в контур з числовими коефіцієнтами.

2) Побудуйте векторну діаграму напруг.

Дано:

$$L = 0,2 \text{ Гн};$$

$$R = 100 \text{ Ом};$$

$$C = 10 \text{ мкФ} = 10^{-5} \text{ Ф};$$

$$U_{C0} = 20 \text{ В};$$

$$\Omega = 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

Знайти: $i(t)$, $U_R(t)$, $U_L(t)$, $U_C(t)$, $\mathcal{E}(t)$ – ?

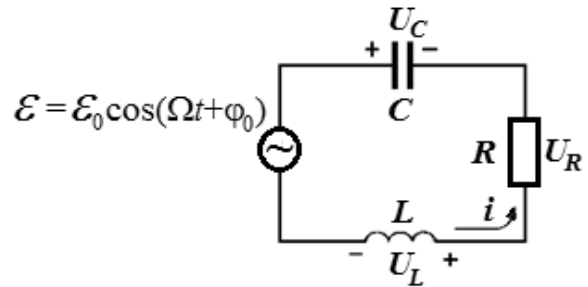


Рис. 25 – Коливальний контур

Розв'язання:

1. За умовою напруга на конденсаторі змінюється з часом за законом $U_C = U_{C0} \cos(\Omega t)$, підставивши числові значення, отримаємо

$$U_C = 20 \cos(10^3 t) \text{ В}. \quad (113)$$

Оскільки напруга на конденсаторі дорівнює $U_C = \frac{q}{C}$, тому рівняння зміни заряду з часом відповідно має вигляд

$$q = C \cdot U_C = C \cdot U_{C0} \cos(\Omega t) = q_0 \cos(\Omega t), \quad (114)$$

де $q_0 = C \cdot U_{C0}$ – амплітуда заряду.

Рівняння зміни сили струму в контурі можна визначити взявши похідну від заряду за часом, тому використовуючи (114), отримаємо

$$i = \frac{dq}{dt} = -\Omega \cdot C \cdot U_{C0} \sin(\Omega t) = \Omega \cdot C \cdot U_{C0} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (115)$$

де $I_0 = \Omega \cdot C \cdot U_{C0}$ – амплітуда сили струму в контурі. Підставимо числові значення й обчислимо I_0 :

$$I_0 = 10^3 \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 0,2 \text{ А}.$$

Тому рівняння коливань сили струму в контурі (115) з числовими коефіцієнтами має вигляд

$$i = 0,2 \cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ А}. \quad (116)$$

Таким чином, сила струму в контурі випереджає за фазою напругу на конденсаторі на $\pi/2$.

Напруга на активному опорі (резисторі) відповідно до закону Ома

$$U_R = iR = RI_0 \cos(\Omega t + \frac{\pi}{2}) = U_{R0} \cos(\Omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (117)$$

де $U_{R0} = RI_0$ – амплітуда напруги на активному опорі. Підставимо числові значення величин

$$U_{R0} = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ В}.$$

Тому рівняння зміни напруги на резисторі з часом (117) з числовими коефіцієнтами має вигляд

$$U_R = 20 \cos(10^3 t + \frac{\pi}{2}) \text{ В}. \quad (118)$$

Коливання $U_R(t)$ відбуваються в одній фазі з коливаннями струму в контурі.

Напруга на індуктивності у відповідності з законом електромагнітної індукції

$$U_L = L \frac{di}{dt}.$$

Підставимо вираз для i з рівняння (106) і продиференціюємо за часом

$$U_L = -\Omega LI_0 \sin(\Omega t + \frac{\pi}{2}) = \Omega LI_0 \cos(\Omega t + \pi) = U_{L0} \cos(\Omega t + \pi) = -U_{L0} \cos \Omega t, \quad (119)$$

де $U_{L0} = \Omega LI_0$ – амплітуда напруги на індуктивності. Підставимо числові значення і виконаємо обчислення.

$$U_{L0} = 10^3 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 40 \text{ В.}$$

Тому рівняння зміни напруги на індуктивності з часом (110) з числовими коефіцієнтами має вигляд

$$U_L = 40 \cos(10^3 t + \pi) \text{ В.} \quad (120)$$

Коливання U_L випереджають за фазою коливання сили струму та U_R на $\pi/2$, а коливання U_C на π .

Для того, щоб записати рівняння зміни зовнішньої ЕРС

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi_{\mathcal{E}0}), \quad (121)$$

потрібно визначити амплітуду ЕРС $\mathcal{E}_0$ і її початкову фазу $\varphi_{\mathcal{E}0}$.

У відповідності з (59), (60) та (61) амплітуда ЕРС $\mathcal{E}_0$ і різниця фаз між струмом і ЕРС в колі Φ дорівнюють

$$\mathcal{E}_0 = I_0 \cdot Z = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}, \quad (122)$$

де Z є повний опір кола змінному струму

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}. \quad (123)$$

Коливання ЕРС і сили струму в контурі відбуваються з різницею фаз

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}, \quad (124)$$

де $\Phi = \varphi_{\mathcal{E}0} - \varphi_{i0}$ – різниця фаз ЕРС і струму.

Тоді початкова фаза ЕРС $\varphi_{\mathcal{E}0}$

$$\varphi_{\mathcal{E}0} = \varphi_{i0} + \operatorname{arctg} \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}, \quad (125)$$

де φ_{i0} – початкова фаза струму, в нашому випадку вона дорівнює $\pi/2$, дивись рівняння (116).

Підставимо числові значення в рівняння (122) та (125) і знайдемо $\mathcal{E}_0$ та $\varphi_{\mathcal{E}0}$:

$$\varepsilon_0 = 0,2 \sqrt{100^2 + \left(10^3 \cdot 0,2 - \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-5}}\right)^2} = 28,2 \text{ В} ,$$

$$\varphi_{0\varepsilon} = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{10^3 \cdot 0,2 - \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-5}}}{100} = \frac{\pi}{2} + \arctg(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} .$$

Тому рівняння зміни зовнішньої ЕРС з часом (112), з числовими коефіцієнтами має вигляд

$$\varepsilon = 28,2 \cdot \cos\left(10^3 t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ В} . \quad (126)$$

2. Для побудови векторної діаграми в момент часу $t = 0$ запишемо вирази для напруг у цей момент часу:

$$U_C = 20 \cos(10^3 t) = 20 \cos(0) \text{ В} . \quad (127)$$

$$U_R = 20 \cos(10^3 t + \frac{\pi}{2}) = 20 \cos(\frac{\pi}{2}) \text{ В} . \quad (128)$$

$$U_L = 40 \cos(10^3 t + \pi) = 40 \cos(\pi) \text{ В} . \quad (129)$$

$$\varepsilon = 28,2 \cdot \cos\left(10^3 t + \frac{3\pi}{4}\right) = 28,2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ В} . \quad (130)$$

Далі проведемо опорну вісь (штрихова лінія на рис. 26). Потім уздовж опорної осі проведемо вектор напруги, початкова фаза якої дорівнює нулю, в нашому випадку вектор U_C , (див. (127)). Довжина вектора в обраному масштабі дорівнює амплітуді.

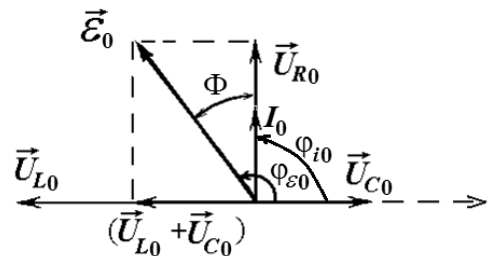


Рис. 26 – Векторна діаграма напруг

Якщо вибрати масштаб, рівний 10В/см, то довжина вектора U_C буде дорівнювати 2 см (амплітуда $U_{C0} = 20 \text{ В}$). Аналогічно будуюмо вектори, що є коливаннями напруги на активному опорі і на індуктивності. При цьому, якщо початкова фаза позитивна, то кут відхилення відповідного вектора від опорної осі відкладаємо проти годинної стрілки. Склавши ці три вектори, отримаємо вектор, що зображує ЕРС. Початкова фаза ЕРС на векторній діаграмі дорівнює $3\pi/4$, що відповідає рівнянню (130).

Відповідь: $i = 0,2 \cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ А}; U_C = 20 \cos(10^3 t) \text{ В}; U_R = 20 \cos(10^3 t + \frac{\pi}{2}) \text{ В};$
 $U_L = 40 \cos(10^3 t + \pi) \text{ В}; \varepsilon = 28,2 \cdot \cos\left(10^3 t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ В}.$

Приклад 5. У пружному середовищі уздовж позитивного напрямку осі x поширюється плоска поперечна хвиля з амплітудою $A = 4 \text{ мкм}$ від джерела з частотою $\nu = 100 \text{ Гц}$ (рис. 27). Фазова швидкість хвилі $v = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$. Коливання в точці з координатою $x = 0$ відбуваються за рівнянням $y(0, t) = A \cos \omega t$.

- 1) Запишіть рівняння хвилі з числовими коефіцієнтами.
- 2) Запишіть рівняння і побудуйте графік залежності зсуву від координати у момент часу $t_1 = 12,5 \text{ мс}$.
- 3) Визначте у момент часу $t_1 = 12,5 \text{ мс}$ зсув, швидкість, прискорення і відносну деформацію середовища в точці з координатою $x_1 = 20 \text{ м}$.

Дано:

$$A = 4 \text{ мкм} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\nu = 100 \text{ Гц};$$

$$v = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с};$$

$$y(0, t) = A \cos \omega t;$$

$$t_1 = 12,5 \text{ мс} = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$x_1 = 20 \text{ м}.$$

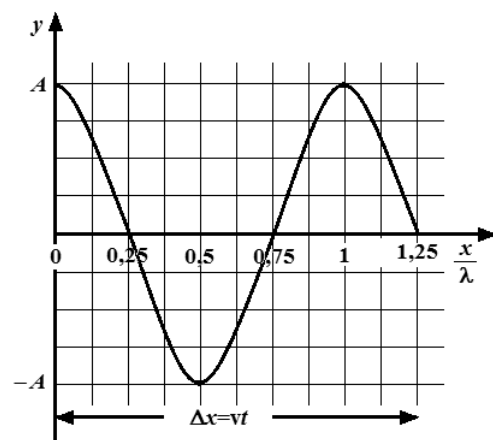


Рис. 27 – Поперечна хвиля

Знайти: $y(x, t)$, $y(x, t_1)$,
 $y(x_1, t_1)$, $v_y(x_1, t_1)$, $a(x_1, t_1)$, $\varepsilon(x_1, t_1)$. – ?

Розв'язання:

1. Хвиля, що поширюється уздовж позитивного напрямку осі x , викликає коливання в точці з координатою x із таким запізненням, на скільки великою є відстань до неї від початку координат. Відповідно, фаза коливань частинок

середовища з координатою x буде відрізнятися від фази коливань джерела хвилі на величину kx , де k – хвильове число. Тому, оскільки початкова фаза $\varphi_0 = 0$, рівняння хвилі відповідно (65), має вигляд

$$y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx), \quad (131)$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

Згідно з визначенням, довжина хвилі λ , відповідно з (63):

$$\lambda = \nu T = \frac{\nu}{\nu} = \frac{2\pi\nu}{\omega} = \frac{2\pi}{k}, \quad (132)$$

тому

$$k = \frac{2\pi\nu}{\nu} = \frac{\omega}{\nu}. \quad (133)$$

Обчислимо ω та k і запишемо рівняння хвилі з числовими коефіцієнтами:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 100 = 200\pi \text{ с}^{-1} = 628 \text{ с}^{-1}; \quad k = \frac{200\pi}{2 \cdot 10^3} = 0,1\pi \text{ м}^{-1} = 0,314 \text{ м}^{-1}.$$

Тому рівняння хвилі з числовими коефіцієнтами має вигляд

$$y(x, t) = 4 \cdot 10^{-6} \cos(200\pi t - 0,1\pi x) \text{ м}. \quad (134)$$

2. Рівняння залежності зсуву від координати в заданий момент часу можна отримати, якщо підставити $t_1 = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ в рівняння хвилі (134):

$$y(x, t_1) = 4 \cdot 10^{-6} \cos(2,5\pi - 0,1\pi x) \text{ м}. \quad (135)$$

Для побудови графіка хвилі $y(x, t_1) = 4 \cdot 10^{-6} \cos(2,5\pi - 0,1\pi x) \text{ м}$, накреслимо осі координат і відкладемо по осі абсцис відрізки, що відповідають відстані в частках довжини хвилі ($\frac{x}{\lambda}$: 8 клітинок на довжину хвилі), а по осі ординат – у позитивну і негативну напівплощини відрізки, що відповідають амплітуді хвилі (4 клітинки).

Якби рівняння хвилі в момент часу t_1 мало вигляд

$$y(x, t_1) = 4 \cdot 10^{-6} \cos(-0,1\pi x) \text{ м} = 4 \cdot 10^{-6} \cos(0,1\pi x) \text{ м}, \quad (136)$$

враховуючи, що $\cos$ є парною функцією, то графік мав би вигляд простої косинусоїди, рис. 28.

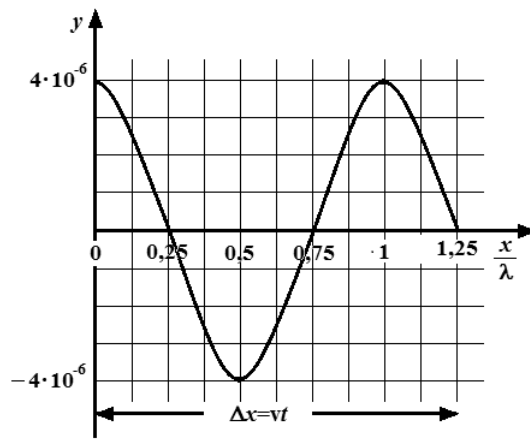


Рис. 28 – Графік хвилі (135)

У нашому випадку рівняння хвилі в момент часу t_1 має вигляд $y(x, t_1) = 4 \cdot 10^{-6} \cos(0,1\pi x - 2,5\pi)$ м, тобто є зсув фаз $\varphi_0 = -2,5\pi$. З урахуванням періодичності косинуса цей зсув аналогічний зсуву $\varphi_0 = -0,5\pi$. Це означає, що визначене значення фази, а також і зсуву, досягається на відстані $x_X = \frac{\varphi_0}{2\pi} \cdot \lambda = \frac{-0,5\pi}{2\pi} \cdot \lambda = -\frac{\lambda}{4}$ від джерела. Таким чином, зсуву фаз $\varphi_0 = -0,5\pi$, відповідає зміщення початку координат на відстань $x_X = -\frac{\lambda}{4}$ (дві клітинки вліво), вздовж осі x . Тобто графік функції $y(x, t_1) = 4 \cdot 10^{-6} \cos(0,1\pi x - 2,5\pi)$ м має вигляд, рис. 29.

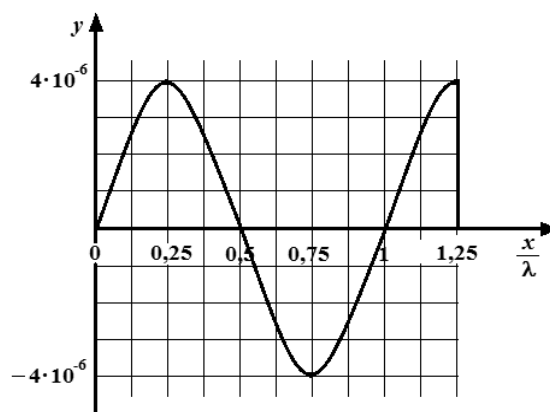


Рис. 29 – Графік хвилі (134)

Для визначення положення хвильового фронту необхідно дізнатись, на яку відстань від джерела він перемістився в напрямку поширення хвилі за час t_1 , в одиницях хвилі:

$$\Delta x = v \cdot t_1 = \frac{\omega \cdot t_1}{k} = \frac{\omega \cdot t_1}{2\pi} \lambda. \quad (137)$$

Знаходимо відстань на яку переміститься «гребінь» фронту хвилі в нашому випадку за час $t_1 = 12,5 \cdot 10^{-3}$ с:

$$\Delta x = \frac{200\pi \cdot 12,5 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \lambda = 1,25 \cdot \lambda.$$

До частинок, які знаходяться далі цієї відстані від джерела, хвиля ще не дійшла (див. рис. 29).

3. Щоб визначити зсув частинок середовища, які мають координату x_1 у момент часу t_1 , потрібно підставити значення $x_1 = 20$ м і $t_1 = 12,5 \cdot 10^{-3}$ с у рівняння (134).

$$y(x_1, t_1) = 4 \cdot 10^{-6} \cos(0,5\pi) = 0 \text{ м}. \quad (138)$$

Для знаходження рівнянню швидкості руху частинки середовища, потрібно взяти першу похідну від зсуву (131) за часом:

$$v_y = \frac{dy(x, t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - kx). \quad (139)$$

Тому, для моменту часу $t_1 = 12,5$ мс, в точці з координатою $x_1 = 20$ м:

$$v_y(x_1, t_1) = -4 \cdot 10^{-6} \cdot 200\pi \cdot \sin(200\pi \cdot 12,5 \cdot 10^{-3} - 0,1\pi \cdot 20) = -2,512 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (140)$$

Прискорення дорівнює першій похідній від швидкості за часом:

$$a = \frac{dv_y(x, t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx). \quad (141)$$

Підставляючи значення $t_1 = 12,5$ мс та $x_1 = 20$ м, маємо:

$$a(x_1, t_1) = -4 \cdot 10^{-6} \cdot (200\pi)^2 \cdot \cos(200\pi \cdot 12,5 \cdot 10^{-3} - 0,1\pi \cdot 20) = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (142)$$

Відносна деформація середовища визначається першою похідною зсуву за координатою:

$$\varepsilon = \frac{dy(x, t)}{dx} = Ak \sin(\omega t - kx). \quad (143)$$

Підставляючи значення $t_1 = 12,5$ мс та $x_1 = 20$ м, маємо:

$$\varepsilon = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1\pi \sin(200\pi \cdot 12,5 \cdot 10^{-3} - 0,1\pi \cdot 20) = 1,256 \cdot 10^{-6}. \quad (144)$$

Відповідь:

1) $y(x, t) = 4 \cdot 10^{-6} \cos(200\pi t - 0,1\pi x)$ м;

2) $y(x, t_1) = 4 \cdot 10^{-6} \cos(2,5\pi - 0,1\pi x)$ м;

3) $y(x_1, t_1) = 0$ м; $v_y(x_1, t_1) = -2,512 \cdot 10^{-3} \frac{\text{М}}{\text{с}}$; $a(x_1, t_1) = 0 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$; $\varepsilon = 1,256 \cdot 10^{-6}$.

Приклад 6. В однорідному ізотропному немагнітному середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 9$ уздовж осі x поширюється плоска електромагнітна хвиля (рис. 30). Зміна напруженості магнітного поля описується рівнянням $H = H_0 \cos(\omega t - kx)$, де $H_0 = 0,02$ А/м. Період коливань $T = 1$ мкс.

- 1) Запишіть рівняння зміни напруженості електричного поля і напруженості магнітного поля з числовими коефіцієнтами.
- 2) Побудуйте графік хвилі в момент часу $t_1 = 2$ мкс.
- 3) Визначте інтенсивність хвилі.

Дано:

$$\mu = 1;$$

$$\varepsilon = 9;$$

$$H_0 = 0,02 \text{ А/м};$$

$$T = 1 \text{ мкс} = 10^{-6} \text{ с};$$

$$t_1 = 2 \text{ мкс} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Знайти:

$$H(x, t), E(x, t), I. - ?$$

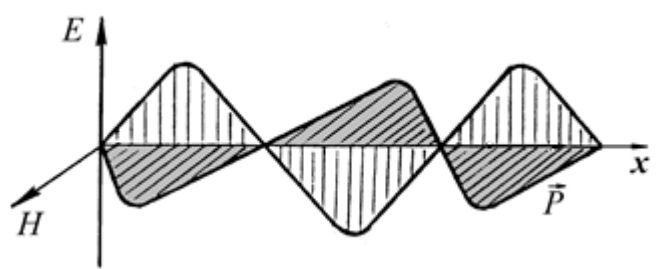


Рис. 30 – Електромагнітна хвиля

Розв'язання:

1. Коливання векторів напруженості електричного $\vec{E}$ і магнітного поля $\vec{H}$, що розповсюджуються в просторі з часом, відбуваються в однаковій фазі,

тому за умовою вони мають вигляд

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cdot \cos(\omega t - kx), \\ H &= H_0 \cdot \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (145)$$

Щоб записати рівняння напруженості магнітного H та електричного E полів, з числовими коефіцієнтами, потрібно визначити циклічну частоту ω , хвильове число k та амплітуду напруженості електричного поля E_0 .

Оскільки,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (146)$$

Підставивши чисельні значення, отримаємо

$$\omega = \frac{2\pi}{10^{-6}} = 2\pi \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}. \quad (147)$$

Хвильове число:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (148)$$

де $\lambda = v \cdot T$ – довжина хвилі; v – фазова швидкість електромагнітної хвилі.

У середовищі з діелектричною проникністю ε і магнітною проникністю μ швидкість v визначається за формулою

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}, \quad (149)$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі.

Підставимо у формулу (148) рівняння для λ з урахуванням (149), звідки:

$$k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}{cT}. \quad (150)$$

Підставимо числові значення:

$$k = \frac{2\pi\sqrt{9 \cdot 1}}{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6}} = 0,02\pi \text{ м}^{-1}. \quad (151)$$

В електромагнітній хвилі, що поширюється, миттєві значення векторів E та H у будь-якій точці пов'язані співвідношенням

$$\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot E_0 = \sqrt{\mu_0 \cdot \mu} \cdot H_0, \quad (152)$$

де $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична постійна, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна постійна.

Отже, для амплітуди напруженості електричного поля можна записати:

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \cdot H_0. \quad (153)$$

Підставимо числові значення:

$$E_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9}} \cdot 0,02 = 2,51 \frac{\text{В}}{\text{м}}. \quad (154)$$

Перевіримо розмірність отриманих значень:

$$[k] = \frac{1}{[c] \cdot [T]} = \frac{1}{\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{с}} = \text{м}^{-1};$$

$$[E_0] = \sqrt{\frac{[\mu_0]}{[\epsilon_0]}} [H_0] = \sqrt{\frac{\text{Гн/м}}{\text{Ф/м}}} \text{А/м} = \sqrt{\frac{\text{Вб} \cdot \text{В}}{\text{А} \cdot \text{Кл}}} \text{А/м} = \sqrt{\frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{В}}{\text{А} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}} \text{А/м} = \frac{\text{В}}{\text{А}} \frac{\text{А}}{\text{м}} = \text{В/м}.$$

Тому рівняння (145) напруженості магнітного H та електричного E полів, з числовими коефіцієнтами, мають вид:

$$\begin{aligned} E &= 2,51 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,02\pi x) \text{ В/м}, \\ H &= 0,02 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,02\pi x) \text{ А/м}. \end{aligned} \quad (155)$$

2. Для побудови графіка хвилі в момент часу $t_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ с підставимо цей час в рівняння (155), звідки отримаємо:

$$\begin{aligned} E &= 2,51 \cdot \cos(0,02\pi x - 4\pi) \text{ В/м}, \\ H &= 0,02 \cdot \cos(0,02\pi x - 4\pi) \text{ А/м}. \end{aligned} \quad (156)$$

Оскільки $\cos$ функція циклічна, то зсув фаз $\varphi_0 = -4\pi$ та $\varphi_0 = 0$, це одне й те саме, тому графіки будуть мати вигляд звичайної функції $\cos$, з амплітудою напруженості, рис. 31.

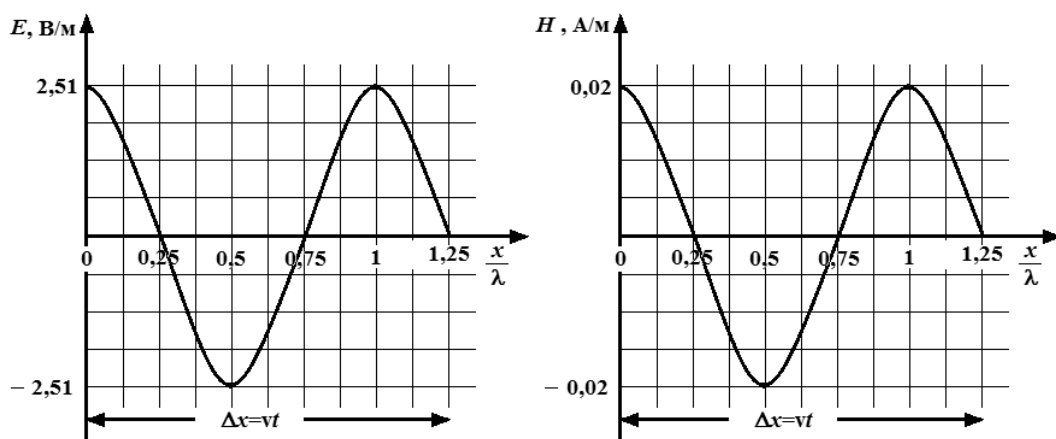


Рис. 31 – Графік електромагнітної хвилі в момент часу t_1

3. Інтенсивність електромагнітної хвилі – це середня енергія яку переносить хвиля через одиничну площадку, перпендикулярну напрямку поширення хвилі за одиницю часу:

$$I = \langle P \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0, \quad (157)$$

де P – модуль вектора густини потоку енергії електромагнітної хвилі (модуль вектора Умова-Пойнтінга).

Перевіримо, чи дає отримана формула одиницю інтенсивності (Вт/м²)

$$[I] = [E_0] \cdot [H_0] = \frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{А}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Виконаємо обчислення:

$$I = \frac{2,51 \cdot 0,02}{2} = 2,51 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}^2 = 25,1 \text{ мВт/м}^2. \quad (158)$$

Відповідь: $E = 2,51 \cdot \cos(0,02\pi x - 4\pi) \text{ В/м}; \quad H = 0,02 \cdot \cos(0,02\pi x - 4\pi) \text{ А/м};$
 $I = 25,1 \text{ мВт/м}^2.$

ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Власні механічні гармонічні коливання

До пружини, що має жорсткість k , підвішений вантаж масою m . Система здійснює гармонічні коливання по вертикалі з амплітудою A та циклічною частотою ω_0 (частота ν_0 , період T_0). Початкова фаза коливань дорівнює φ_0 . Повна енергія коливання тягара W :

а) за заданими величинами в табл. 1 знайдіть необхідні параметри і запишіть рівняння коливання системи з числовими коефіцієнтами;

б) запишіть рівняння з числовими коефіцієнтами, та побудуйте графіки зміщення, швидкості, прискорення вантажу, сили, що діє на вантаж, зміни кінетичної та потенціальної енергій у системі.

Завдання 2. Власні електромагнітні гармонічні коливання

Розв'яжіть одну з наведених нижче задач. Номер задачі та необхідні дані див. в табл. 2.

1. В коливальному контурі, що складається з конденсатора ємністю C та котушки індуктивністю L , напруга на конденсаторі змінюється за законом $U_C = U_{C0} \cos \omega_0 t$. Запишіть рівняння зміни з часом $U_C(t)$ з числовими коефіцієнтами й отримайте рівняння зміни з часом заряду на обкладках конденсатора, сили струму в контурі та енергії магнітного поля.

2. В коливальному контурі з індуктивністю L та ємністю C сила струму змінюється за законом $i = I_0 \cos \omega_0 t$. Запишіть рівняння зміни з часом струму $i(t)$ з числовими коефіцієнтами та отримайте рівняння зміни з часом напруги на конденсаторі, енергії електричного поля та енергії магнітного поля.

3. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю L та конденсатора ємністю C . Заряд на обкладках конденсатора змінюється за законом $q = q_0 \cos \omega_0 t$. Запишіть рівняння зміни заряду з числовими коефіцієнтами $q(t)$ й отримайте рівняння зміни з часом напруги на конденсаторі, сили струму в контурі та енергії магнітного поля.

Завдання 3. Згасаючі коливання

Розв'яжіть одну з наведених нижче задач. Номер задачі зазначено в табл. 3.

1. Вантаж масою m , підвішений на пружині з жорсткістю k , здійснює коливання у в'язкому середовищі з коефіцієнтом опору r . Рівняння коливання вантажу має вигляд $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$. Логарифмічний декремент згасання коливань в контурі δ :

а) за значеннями величин, заданих в табл. 3.3, знайдіть необхідні параметри і запишіть рівняння коливань з числовими коефіцієнтами;

б) знайдіть добротність системи;

в) знайдіть величину, зазначену в останній колонці таблиці.

2. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю C , котушки індуктивністю L та резистора опором R . Сила струму в контурі змінюється за законом $I = I_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t)$. Логарифмічний декремент згасання коливань в контурі δ :

а) за значеннями величин, заданих в табл. 3, знайдіть необхідні параметри й запишіть рівняння коливань струму з числовими коефіцієнтами;

б) знайдіть добротність системи;

в) знайдіть величину, зазначену в останній колонці таблиці.

Завдання 4. Вимушені електромагнітні коливання

Розв'яжіть одну з наведених нижче задач. Номер задачі зазначено в табл. 4.

1. В коло коливального контура, який складається з послідовно з'єднаних резистора опором R , котушки індуктивністю L та конденсатора ємністю C , ввімкнено зовнішню змінну ЕРС. В табл. 4 задано параметри контуру і рівняння зміни однієї з таких п'яти величин:

$\mathcal{E}$ – зовнішня ЕРС; i – сила струму в контурі; U_R – напруга на активному опорі; U_C – напруга на конденсаторі; U_L – напруга на індуктивності:

а) запишіть рівняння коливань цих величин з числовими коефіцієнтами;

б) побудуйте векторну діаграму напруг в момент часу $t = 0$.

2. В коло коливального контуру, який складається з послідовно з'єднаних резистора опором R , котушки індуктивністю L та конденсатора ємністю C ,

ввімкнено зовнішню змінну ЕРС. В контурі відбуваються вимушені коливання на резонансній частоті. В табл. 4 задано параметри контуру і рівняння зміни однієї з таких п'яти величин:

$\mathcal{E}$ – зовнішня ЕРС; i – сила струму в контурі; U_R – напруга на активному опорі; U_C – напруга на конденсаторі; U_L – напруга на індуктивності.

а) знайдіть резонансну частоту і запишіть рівняння коливань цих величин з числовими коефіцієнтами;

б) побудуйте векторну діаграму напруг в момент часу $t = 0$.

Завдання 5. Механічні хвилі

У пружному середовищі уздовж позитивного напрямку осі x поширюється плоска поперечна хвиля з амплітудою $A = 1$ см. Коливання в точці з координатою $x = 0$ відбуваються за рівнянням $y(0, t) = A \cos \omega t$:

а) за даними, наведеними в табл. 5, знайдіть необхідні параметри і запишіть рівняння хвилі з числовими коефіцієнтами (T – період; ν – частота коливань; λ – довжина хвилі; v – фазова швидкість хвилі; k – хвильове число);

б) запишіть рівняння й побудуйте графік залежності зсуву частинок середовища від координати (в частках довжини хвилі) в момент часу t_1 ;

в) знайдіть зсув, швидкість та відносну деформацію в точці з координатою x_1 в момент часу t_1 .

Завдання 6. Електромагнітні хвилі

Плоска електромагнітна хвиля поширюється в однорідному ізотропному немагнітному середовищі з діелектричною проникністю ϵ . Напруженість електричного поля хвилі змінюється за законом $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$:

а) за даними, наведеними в табл. 6, знайдіть необхідні параметри й запишіть рівняння напруженості E електричного поля та напруженості H магнітного поля з числовими коефіцієнтами;

б) побудуйте графік хвилі в момент часу t_1 ;

в) визначте інтенсивність хвилі.

ТАБЛИЦІ ВАРІАНТІВ ЗАВДАНЬ

Таблиця 1

Варіант	A , см	ω_0 , рад/с	ν_0 , Гц	T_0 , с	m , г	k , Н/м	W , мДж	φ_0 , рад
1	1	6π	—	—	—	30	—	$3\pi/4$
2	2	—	3	—	100	—	—	$\pi/2$
3	1	—	—	—	10	8	—	$-\pi/4$
4	—	10π	—	—	—	20	1	π
5	3	—	—	0,25	—	9	—	$\pi/4$
6	4	4π	—	—	50	—	—	$\pi/2$
7	4	—	—	—	16	10,1	—	$-\pi/2$
8	2	—	—	—	50	—	1,58	$\pi/4$
9	1	—	5	—	—	20	—	π
10	2	—	—	1	200	—	—	$-\pi/4$
11	4	—	—	—	135	12	—	$3\pi/4$
12	—	—	5	—	—	10	8	$\pi/2$
13	2	5π	—	—	—	8	—	$\pi/4$
14	1	—	2,5	—	50	—	—	π
15	2	—	—	—	200	71	—	$-\pi/4$
16	4	—	—	—	200	—	14,2	$3\pi/4$
17	1	—	—	0,4	—	5	—	$\pi/2$
18	3	10π	—	—	20	—	—	$-\pi/2$
19	1	—	—	—	90	8	—	π
20	—	3π	—	—	90	—	1,6	$\pi/4$
21	2	—	1,5	—	—	6	—	$3\pi/4$
22	2	—	—	—	80	—	1,42	$\pi/2$
23	3	—	—	0,5	50	—	—	$-\pi/4$
24	3	—	—	—	15	14,8	—	π
25	—	5π	—	—	40,5	—	4,5	$\pi/4$
26	2	—	—	0,25	—	5	—	$3\pi/4$
27	4	—	3	—	30	—	—	$\pi/2$
28	3	—	—	—	25	—	1	$\pi/4$
29	1	—	—	—	28	6,91	—	π
30	—	4π	—	—	—	10	2	$-\pi/2$

Таблица 2

Варіант	Задача	C , мкФ	L , мГн	ω_0 , рад/с	q_0 , мкКл	I_0 , мА	U_{C0} , мВ
1	1	1	10	—	—	—	200
2	3	—	10	10^3	20	—	—
3	1	50	—	$2 \cdot 10^3$	—	—	120
4	2	0,2	0,5	—	—	2	—
5	3	—	2	10^4	1	—	—
6	1	0,1	1	—	—	—	300
7	3	2	—	10^5	0,4	—	—
8	2	—	0,01	10^5	—	50	—
9	3	4	—	$5 \cdot 10^4$	0,6	—	—
10	1	—	0,2	10^5	—	—	100
11	3	10	25	—	2	—	—
12	1	4	—	$5 \cdot 10^3$	—	—	250
13	2	—	10	$2 \cdot 10^3$	—	6	—
14	3	100	0,1	—	8	—	—
15	1	5	0,5	—	—	—	300
16	2	—	0,05	$2 \cdot 10^5$	—	7	—
17	3	10	—	$5 \cdot 10^3$	3	—	—
18	1	—	2	$5 \cdot 10^4$	—	—	200
19	2	20	2	—	—	9	—
20	1	2	—	$5 \cdot 10^3$	—	—	500
21	2	1	0,1	—	—	10	—
22	3	—	50	$2 \cdot 10^3$	0,5	—	—
23	1	—	5	$2 \cdot 10^4$	—	—	400
24	3	10	1	—	6	—	—
25	2	0,1	—	10^6	—	8	—
26	1	—	1	$5 \cdot 10^3$	—	—	150
27	2	1	2,5	—	—	4	—
28	3	2,5	—	$4 \cdot 10^4$	1	—	—
29	1	4	0,4	—	—	—	80
30	2	—	8	$5 \cdot 10^3$	—	5	—

Таблиця 3

Варі ант	Зада ча	k , Н/м	r , кг/с	m , г	A , см	C , мкФ	L , мГн	R , Ом	I_0 , мА	β , с ⁻¹	ω , рад/с	δ	Знайти
1	2	—	—	—	—	5	2	12	1	—	—	—	δ
2	2	—	—	—	—	10	—	—	5	300	—	0,9	L
3	2	—	—	—	—	—	10	6	5	—	—	1,2	C
4	2	—	—	—	—	—	—	20	3	—	10^4	2	L
5	1	—	0,5	100	4	—	—	—	—	—	—	2	k
6	2	—	—	—	—	—	—	40	6	600	—	1,7	C
7	1	—	—	250	3	—	—	—	—	2	—	1,1	r
8	2	—	—	—	—	—	—	50	1	800	—	1,8	L
9	2	—	—	—	—	—	8	—	8	400	—	1,5	C
10	1	—	—	150	2	—	—	—	—	5	—	1,6	k
11	2	—	—	—	—	0,5	5	80	2	—	—	—	δ
12	2	—	—	—	—	—	15	—	5	700	—	2	R
13	1	70	1,6	200	1	—	—	—	—	—	—	—	δ
14	2	—	—	—	—	—	5	—	7	4000	—	1,9	C
15	1	40	—	—	2	—	—	—	—	8	—	1,8	r
16	2	—	—	—	—	—	5	16	4	—	$5 \cdot 10^3$	—	δ
17	1	—	1,2	80	1	—	—	—	—	—	—	1,5	k
18	2	—	—	—	—	2	—	—	2	900	—	1,6	R
19	1	—	—	40	1	—	—	—	—	6	—	1,2	k
20	2	—	—	—	—	—	—	10	4	—	$2 \cdot 10^4$	1,5	L
21	2	—	—	—	—	—	1	8	6	—	—	1,4	C
22	1	50	—	—	3	—	—	—	—	4	—	1,4	r
23	2	—	—	—	—	4	—	—	3	2000	—	1,3	R
24	1	50	0,8	50	2	—	—	—	—	—	—	—	δ
25	2	—	—	—	—	0,2	—	—	4	5000	—	1,1	L
26	1	—	—	20	1	—	—	—	—	—	30	1,3	k
27	2	—	—	—	—	—	—	74	9	800	—	1,1	C
28	1	—	1,1	—	5	—	—	—	—	—	25	1,4	k
29	2	—	—	—	—	4	4	16	2	—	—	—	δ
30	1	—	—	120	2	—	—	—	—	3	—	1,2	r

Таблиця 4

Варіант	Задача	C, мкФ	L, мГн	R, Ом	Рівняння коливань
1	1	1	5	50	$i=0,6\cos 2 \cdot 10^4 t$, А
2	1	100	10	15	$U_R=6\cos 500 t$, В
3	2	20	12,5	5	$\varepsilon =20\cos \Omega_p t$, В
4	1	0,4	0,5	25	$U_L=5\cos 5 \cdot 10^4 t$, В
5	1	5	1,5	20	$\varepsilon =39,5\cos 2 \cdot 10^4 t$, В
6	2	0,1	1	20	$i=1,5\cos \Omega_p t$, А
7	1	2	0,05	7,5	$U_C=5\cos 2 \cdot 10^5 t$, В
8	2	0,5	0,2	5	$U_R=15\cos \Omega_p t$, В
9	1	4	0,2	5	$i =1,6\cos 2,5 \cdot 10^4 t$, А
10	1	0,5	0,15	20	$U_L=12\cos 2 \cdot 10^5 t$, В
11	1	10	25	75	$U_R=30\cos 10^3 t$, В
12	1	4	7,5	50	$U_C=20\cos 10^4 t$, В
13	1	25	20	20	$\varepsilon =19,3\cos 10^3 t$, В
14	2	4	2,5	4	$U_L=50\cos \Omega_p t$, В
15	1	0,5	0,2	30	$i =0,6\cos 2 \cdot 10^5 t$, А
16	2	0,5	0,05	2	$U_C=30\cos \Omega_p t$, В
17	1	10	4	30	$U_R=6\cos 2,5 \cdot 10^3 t$, В
18	1	0,2	1,5	100	$U_C=25\cos 10^5 t$, В
19	2	20	2	3	$\varepsilon =4,5\cos \Omega_p t$, В
20	1	2	10	50	$U_L=20\cos 10^4 t$, В
21	1	1	0,1	15	$\varepsilon =21,2\cos 5 \cdot 10^4 t$, В
22	2	5	50	10	$i=2\cos \Omega_p t$, А
23	1	0,25	1,5	40	$U_R=24\cos 4 \cdot 10^4 t$, В
24	1	10	1	15	$U_L=3\cos 5 \cdot 10^3 t$, В
25	2	0,1	0,01	4	$U_R=6\cos \Omega_p t$, В
26	1	5	20	30	$U_C=20\cos 4 \cdot 10^3 t$, В
27	1	2,5	2,5	30	$\varepsilon =29,7\cos 8 \cdot 10^3 t$, В
28	2	0,5	0,8	5	$U_L=40\cos \Omega_p t$, В
29	1	2	2	15	$i=0,8\cos 2 \cdot 10^4 t$, А
30	2	0,02	0,05	6	$U_C=25\cos \Omega_p t$, В

Таблиця 5

Варіант	$T, \text{с}$	$\omega, \text{рад/с}$	$\nu, \text{Гц}$	$\lambda, \text{м}$	$v, \text{м/с}$	$k, \text{рад/м}$	$t_1, \text{с}$	$x_1, \text{м}$
1	—	—	20	—	160	—	0,05	2
2	—	25π	—	12	—	—	0,09	12
3	00,2	—	—	—	200	—	0,03	2,5
4	0,08	—	—	24	—	—	0,11	9
5	—	—	25	—	—	$\pi/2$	0,05	3,5
6	—	—	—	90	180	—	1	90
7	—	50π	—	2	—	—	0,045	2
8	—	20π	—	—	160	—	0,15	14
9	—	—	—	—	60	$\pi/12$	0,55	21
10	—	—	—	6	300	—	0,025	6
11	—	—	—	—	240	$\pi/6$	0,05	7,5
12	0,8	—	—	40	—	—	0,9	25
13	—	—	2	—	120	—	0,75	45
14	0,04	—	—	—	—	$\pi/4$	0,055	7
15	—	5π	—	—	40	—	0,5	10
16	0,05	—	—	—	120	—	0,05	4,5
17	0,08	—	—	—	—	$\pi/8$	0,09	12
18	—	—	—	10	50	—	0,3	10
19	—	—	1,25	—	—	$\pi/24$	1,1	30
20	—	—	50	2	—	—	0,025	1,25
21	—	—	—	—	120	$\pi/6$	0,1	1,5
22	0,4	—	—	—	80	—	0,45	28
23	—	—	—	18	180	—	0,15	9
24	0,8	—	—	80	—	—	1,1	10
25	—	—	5	—	—	$\pi/20$	0,25	15
26	—	—	20	—	80	—	0,1	4
27	—	50π	—	10	—	—	0,045	10
28	—	—	2	40	—	—	0,75	30
29	0,4	—	—	—	—	$\pi/18$	0,55	36
30	—	—	5	24	—	—	0,25	15

Таблица 6

Вариант	ν , МГц	T , мкс	ω , рад/с	λ , м	ν , Мм/с	k , рад/м	ε	E_0 , В/м	H_0 , А/м	t_1 , мкс
1	—	—	—	100	—	—	1,44	40	—	0,7
2	—	—	—	—	40	$\pi/10$	—	—	0,5	0,75
3	—	—	$2,5 \cdot 10^6 \pi$	240	—	—	—	50	—	1
4	1	—	—	—	70	—	—	—	0,3	2
5	—	0,5	—	—	—	—	2,25	20	—	0,75
6	1,25	—	—	—	—	$\pi/20$	—	—	0,4	1,4
7	—	2	—	—	200	—	—	30	—	3
8	—	—	—	—	—	$\pi/50$	5,76	—	0,2	1
9	2	—	—	60	—	—	—	10	—	0,5
10	—	—	$10^6 \pi$	—	—	—	9	—	0,3	3,5
11	—	4	—	560	—	—	—	20	—	5
12	—	—	$2 \cdot 10^6 \pi$	—	80	—	—	—	0,4	1,5
13	—	—	—	—	—	$\pi/15$	16	10	—	0,5
14	—	—	—	60	240	—	—	—	0,1	0,25
15	0,5	—	—	—	—	—	4	40	—	3
16	—	—	$5 \cdot 10^6 \pi$	40	—	—	—	—	0,2	0,5
17	1	—	—	—	180	—	—	50	—	1,5
18	—	0,8	—	—	—	$\pi/30$	—	—	0,4	1
19	—	—	—	30	—	—	25	20	—	0,5
20	—	—	—	—	90	$\pi/36$	—	—	0,3	1,4
21	—	8	—	320	—	—	—	10	—	10
22	2,5	—	—	120	—	—	—	—	0,1	0,6
23	5	—	—	—	—	$\pi/8$	—	30	—	0,35
24	—	—	$2 \cdot 10^6 \pi$	—	—	—	36	—	0,5	1
25	—	—	—	260	130	—	—	20	—	3
26	—	2	—	—	—	$\pi/34$	—	—	0,3	3,5
27	—	0,8	—	—	—	—	6,25	40	—	1
28	—	0,4	—	—	60	—	—	—	0,4	0,7
29	0,5	—	—	—	—	—	21,3	10	—	2
30	—	—	$5 \cdot 10^5 \pi$	—	160	—	—	—	0,2	7

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Сусь Б.А., Заболотний В.Ф., Мисліцька Н.А. Коливання і хвилі: навч. посіб. для самостійної роботи студентів з електронним представленням. 2010. 192 с. (Гриф МОНМС України N1/11-10347 від 08.11.11).
2. Вікулін І.М. Фізика. Електрофізика-II: конспект лекцій для самостійної роботи студентів з курсу фізики. Одеса: ОНАЗ, 2011. 119 с.
3. Марколенко П.Ю., Криськів С.К. Коливання та хвилі: метод. посіб. до лабораторних робіт з фізики № 4-1,..., 4-6, 5-1,...5-3 з курсу фізики. Одеса: ОНАЗ, 2011. 156 с.
4. Бригінець В.П., Подласов С.О. Коливання і хвилі: навч. посіб. Київ: НТУУ КПІ, 2021. 81 с. [електронний ресурс]. Режим доступу: <http://physics.zfftt.kpi.ua/mod/book/tool/print/index.php?id=299>

ЗМІСТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ	3
КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ ЗНАНЬ	5
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ФОРМУЛИ	6
КОЛИВАННЯ	6
До завдання 1. Власні механічні гармонічні коливання	6
Швидкість та прискорення гармонічного коливання	8
Гармонічні коливання пружинного маятника	9
До завдання 2. Власні електромагнітні гармонічні коливання	10
До завдання 3. Згасаючі коливання	13
Згасаючі механічні коливання пружинного маятника	13
Згасаючі електричні коливання	16
До завдання 4. Вимушені електромагнітні коливання	18
ХВИЛІ	24
До завдання 5. Механічні хвилі	26
До завдання 6. Електромагнітні хвилі	28
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ	30
ЗАВДАННЯ	53
Завдання 1. Власні механічні гармонічні коливання	53
Завдання 2. Власні електромагнітні гармонічні коливання	53
Завдання 3. Згасаючі коливання	54
Завдання 4. Вимушені електромагнітні коливання	54
Завдання 5. Механічні хвилі	55
Завдання 6. Електромагнітні хвилі	55
ТАБЛИЦІ ВАРІАНТІВ ЗАВДАНЬ	56
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	62

Навчально-методичне видання

КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

Методичні вказівки та завдання для курсової роботи з фізики
для студентів усіх технічних спеціальностей

Укладачі: *Марколенко П.Ю., Ірха В.І., Марколенко Т.Д.*

Редактор Кодрул Л.А.

Комп'ютерне верстання Кірдогло Т.В.

ДУІТЗ

65023, Одеса, Кузнечна, 1

Обсяг 4,0 д. ар., електронна версія