

Міністерство освіти і науки України

Одеський державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку

Кафедра вищої математики

Вища математика та математична статистика

навчально-наочний посібник

для студентів очної та дистанційної форм навчання
(частина 3)

Одеса, 2022

Рецензент: к.т.н., доц. Зборовська І.А.

Вища математика та математична статистика: - Навчально-наочний посібник для студентів очної та дистанційної форм навчання (частина 3) / Укладачі Лінкова О.В., Гарбуз А.І., Одеса: ДУІТЗ, 2022, 32 с.

Навчально-наочний посібник містить теоретичні матеріали з дисципліни “Вища математика та математична статистика” відповідно до навчальної програми. Матеріали надано у вигляді таблиць, що допоможе тим, хто навчається, краще засвоїти теоретичний матеріал та наочно побачити методи розв’язання практичних задач та їх ілюстрації, краще зрозуміти алгоритми.

Навчально-наочний посібник призначений для студентів усіх спеціальностей та може використовуватися при проведенні лекційних, практичних занять з дисциплін математичного циклу, а також при виконанні студентами розрахунково-графічних робіт та при підготовці до заліків та екзаменів.

Видання містить ілюстративно-наочні матеріали, які сприяють вивченню і викладанню навчальної дисципліни математичного циклу, засвоєнню їх змісту.

Особливо корисним даний посібник може бути при підготовці студентів з всіх видів занять та застосовуватися ними під час самостійних занять.

СХВАЛЕНО

на засіданні кафедри
Вищої математики
і рекомендовано до друку.
Протокол № від 202 р.

ЗАТВЕРДЖЕНО

методичною радою
ФЕАМ

Протокол № від 202 р.

ЗМІСТ

1. Функція двох змінних.....	4
1.1. Означення функції двох змінних	4
1.2. Частинні похідні та диференціал функції двох змінних.....	4
1.3. Повний диференціал функції декількох змінних	6
1.4. Дотична площина та нормаль до поверхні	6
2. Подвійний інтеграл.....	7
2.1. Означення та властивості подвійного інтеграла.....	7
2.2. Подвійний інтеграл в полярних координатах.....	8
2.3. Застосування подвійних інтегралів.....	9
3. Потрійний інтеграл.....	11
4. Криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги).....	12
4.1. Формули обчислення криволінійного інтеграла першого роду.....	12
4.2. Застосування криволінійного інтеграла першого роду.....	13
5. Криволінійний інтеграл другого роду (по координатах точки).....	13
5.1. Формули обчислення криволінійного інтеграла першого роду.....	13
5.2. Застосування криволінійного інтеграла другого роду.....	14
6. Похідна функції комплексної змінної.....	15
7. Інтеграл від функції комплексної змінної.....	16
8. Степеневі ряди.....	17
8.1. Означення та збіжність степеневих рядів.....	17
8.2. Ряди Тейлора та Лорана.....	18
9. Класифікація особливих точок функції комплексної змінної.....	19
10. Лишок функції.....	21
10.1. Означення та обчислення лишків функції.....	21
10.2. Основна теорема про лишки.....	21
11. Операційне числення.....	23
11.1. Перетворення Лапласа та його основні властивості.....	23
11.2. Основні теореми операційного числення.....	24
11.3. Алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь засобами операційного числення	25
11.4. Алгоритм розв'язання систем диференціальних рівнянь засобами операційного числення	27
Список рекомендованої літератури	31

1. Функція двох змінних

1.1. Означення функції двох змінних

Нехай задано множину D впорядкованих пар чисел $(x; y)$. Відповідність f , яка кожній парі чисел $(x; y) \in D$ ставить у відповідність одне й тільки одне число $z \in R$, називається **функцією двох змінних**, визначеною на множині D , значення якої належать множині R , та записується у вигляді $z = f(x, y)$. При цьому x та y називаються **незалежними змінними (аргументами)**, а z – **залежною змінною (функцією)**.

Множина $D = D(f)$ називається **областю визначення функції**. Множина значень, які набуває функція z в області визначення, називається **областю значень** цієї функції та позначається $E(z)$.

Приклад: $z = 2xy + \cos xy$; $z = (x + y)^2$; $z = \frac{y}{x + y}$.

Геометричний зміст

Кожній точці $M_0(x_0; y_0)$ області D у системі координат $Oxyz$ відповідає точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$ – апліката точки M . Сукупність усіх таких точок являє собою деяку **поверхню**, яка й буде геометрично зображати дану функцію $z = f(x, y)$.

Границя та неперервність функції двох змінних

Число A називається **границею функції** $z = f(M)$ в точці M_0 , якщо для довільної збіжної до M_0 послідовності точок

$$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n)$$

відповідна послідовність значень функції $f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_n) \dots$ збігається до числа A :

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \text{ або } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = A$$

Неперервність функції $z = f(x, y)$

в точці $M_0(x_0; y_0)$	на множині D
$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x; y) - f(x_0; y_0)) = 0 \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$	якщо $z = f(x, y)$ неперервна в кожній точці цієї множини

Приклад	Розв'язання
Знайти границі: 1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{tg(xy)}{y}$ 2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x + y}$	1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{tg(xy)}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \cdot tg(xy)}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{tg(xy)}{xy} = 3 \cdot 1 = 3.$ 2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x + y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{1 + \frac{y}{x}}$ – не існує, оскільки $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{x}$ не існує

1.2. Частинні похідні та диференціал функції двох змінних

частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по змінній x	частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по змінній y
$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$	$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$

Частинні похідні вищих порядків

– похідна по x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ називається частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x; y)$ по змінній x і позначається $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$;

– похідна по y від функції $\frac{\partial f}{\partial y}$ називається частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x; y)$ по змінній y і позначається $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$;

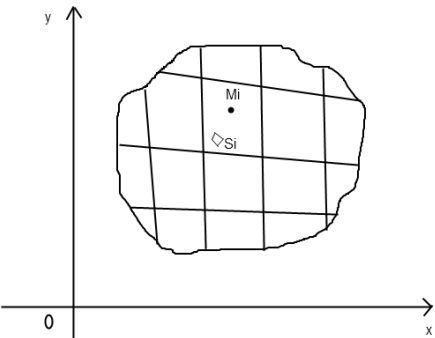
– похідна по y від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ називається мішаною похідною другого порядку від функції $z = f(x; y)$ і позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

– похідна по x від функції $\frac{\partial f}{\partial y}$ називається мішаною похідною другого порядку від функції $z = f(x; y)$ і позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Для мішаних похідних виконується рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Приклад	Розв'язання
Знайти частинні похідні першого порядку від функції: 1. $z = (5x^3 y^2 + 1)^3$ 2. $z = \sqrt[3]{e^y}$	1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3(5x^3 y^2 + 1)^2 \cdot 15x^2 y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3(5x^3 y^2 + 1)^2 \cdot 2x^3 y$. 2. Оскільки $z = \sqrt[3]{e^y} = e^{\frac{y}{3}}$, то $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{y}{3}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{y}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
Приклад	Розв'язання
Обчислити значення частинної похідної при вказаних значеннях аргументу $z = \ln(x^2 - y^2); x = 2; y = -1$	Знайдемо частинні похідні заданої функції: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 - y^2}$, тоді $\frac{\partial z}{\partial x} \Big _{x=2, y=-1} = \frac{2 \cdot 2}{2^2 - (-1)^2} = \frac{4}{3}$; $\frac{\partial z}{\partial y} \Big _{x=2, y=-1} = \frac{2 \cdot (-1)}{2^2 - (-1)^2} = -\frac{2}{3}$
Приклад	Розв'язання
Знайти частинні похідні другого порядку від функції $z = x^3 - 2x^2 y + 3y^2$	Знайдемо частинні похідні першого порядку: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 4xy$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2 y + 6y$.

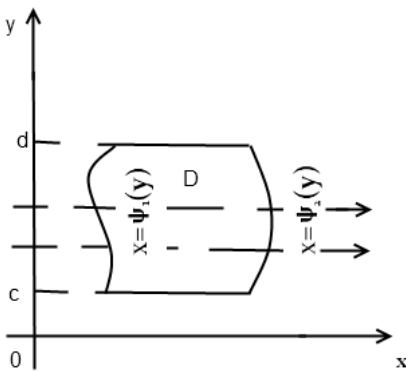
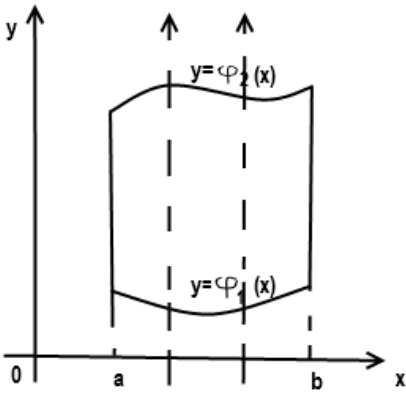
	Знайдемо частинні похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 4y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$
Приклад	Розв'язання
Перевірити, що функція $z = 2 \cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$ задовольняє диференціальному рівнянню $2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$	Знайдемо частинні похідні, що входять до заданого диференціального рівняння: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 2 \cos\left(y - \frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\sin\left(y - \frac{x}{2}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \sin(2y - x);$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(2y - x); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \cos(2y - x).$ Підставляючи отримані похідні до рівняння, маємо $-2 \cos(2y - x) + 2 \cos(2y - x) = 0$, звідки отримаємо тотожність $0 = 0$. Таким чином, функція $z = 2 \cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$ задовольняє заданому рівнянню.
1.3. Повний диференціал функції багатьох змінних $z = f(x; y) \Rightarrow dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy;$ $u = f(x; y; z) \Rightarrow du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$	
Приклад	Розв'язання
Знайти повний диференціал функції $z = 3x^2 y^5$	Знайдемо частинні похідні функції: $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^5; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 y^4,$ тоді повний диференціал дорівнює $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 6xy^5 dx + 5x^2 y^4 dy$
Приклад	Розв'язання
Обчислити значення повного диференціала функції $z = \arctg \frac{x}{y}$ при $x = 1, y = 3, dx = 0,01, dy = -0,05$	Знайдемо частинні похідні функції: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$ Тоді повний диференціал дорівнює $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx).$ Підставляючи задані значення, отримаємо $dz = \frac{1}{1 + 9} (-0,05 - 3 \cdot 0,01) = -0,008$
1.4. Дотична площина та нормаль до поверхні	
Рівняння дотичної площини $F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$	Рівняння нормалі $\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}$

Приклад	Розв'язання
Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до еліптичного параболоїду $z = 2x^2 + y^2$ в точці $A(1; -1; 3)$	Перетворимо рівняння поверхні $z = 2x^2 + y^2$ до вигляду $2x^2 + y^2 - z = 0$. Позначимо його ліву частину $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z$ та знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$ Обчислимо їх значення в точці $A(1; -1; 3)$ $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right _A = 4; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right _A = -2; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right _A = -1.$ Підставимо знайдені значення до рівняння дотичної площини $4(x-1) - 2(y+1) - (z-3) = 0 \quad \text{або}$ $4x - 2y - z - 3 = 0.$ Підставимо знайдені значення до рівняння нормалі $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$
2. Подвійний інтеграл	
2.1. Означення та властивості подвійного інтеграла	
	Якщо інтегральна сума $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta S_i$ при $\lambda = \max d(D_i)$ має скінченну границю, яка не залежить від способу розбиття області D на частини D_i та вибору в них довільних точок P_i, то ця границя називається подвійним інтегралом від функції $f(x; y)$ по області D $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x; y) dS = \iint_D f(x; y) dx dy$
Властивості	
1. $\iint_D c \cdot f(x, y) dx dy = c \cdot \iint_D f(x, y) dx dy$, де $c = const$	2. $\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$
3. Якщо $f(x, y) \geq 0$ в обл. D, то $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$	4. Якщо $f(x, y) \geq g(x, y)$ в обл. D, то $\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy$
5. Якщо $D = D_1 \cup D_2$, то $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$	6. Якщо функція $f(x, y) \geq 0$ неперервна в області D, яка має площу S, то $m \cdot S \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S$ де m, M - найменше та найбільше значення $f(x, y)$ в обл. D

7. Середнє значення функції

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy$$

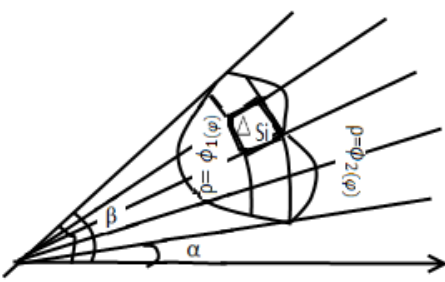
Правильні області

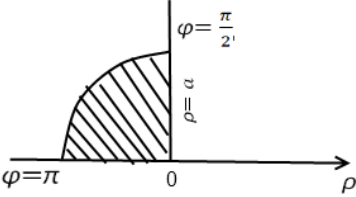
В напрямку осі OX	В напрямку осі OY
	
$D: \{\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y); c \leq y \leq d\}$	$D: \{a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$

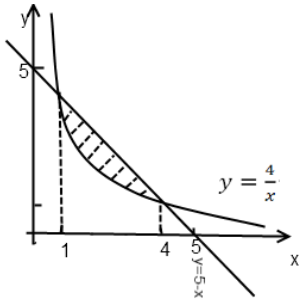
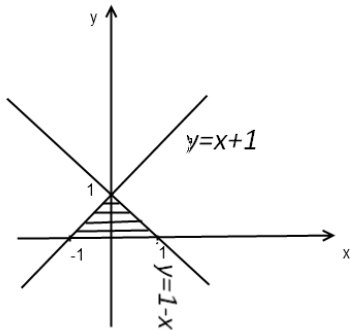
Зведення до повторних інтегралів

$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x; y) dx$	$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y) dy$
Приклад	Розв'язання
Обчислити $\int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1) dy$	Обчислення починаємо з внутрішнього інтеграла, де y є змінною, x – сталою: $\int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1) dy = \int_0^1 dx \left(xy - \frac{y^2}{2} + y \right) \Big _x^{2x} =$ $= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^2 + 2x - x^2 + \frac{x^2}{2} - x \right) dx = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2.2. Подвійний інтеграл в полярних координатах

	$\iint_D f(M) dS = \iint_D f(\varphi, \rho) \rho d\varphi d\rho$
---	--

Приклад	Розв'язання
Обчислити $\iint_D \rho \sin \varphi d\rho d\varphi, \text{ якщо}$ $D: \left\{ \rho = a; \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \right\}$	 - За даними рівняннями побудуємо обл. D. - Обл. D є фігурою, обмеженою вісями координат та чвертю кола. - Тоді подвійний інтеграл матиме вигляд $\begin{aligned} \iint_D \rho \sin \varphi d\rho d\varphi &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a \rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\rho^2}{2} \Big _0^a \sin \varphi d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{a^2}{2} \sin \varphi d\varphi = -\frac{a^2}{2} \cos \varphi \Big _{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$
2.3. Застосування подвійних інтегралів	
1) Площа плоскої фігури	$S = \iint_D dx dy$
2) Об'єм тіла	$V = \iint_D f(x, y) dx dy$
3) Площа поверхні	$S_n = \iint_D \sqrt{(f'_1(x; y))^2 + (f'_2(x; y))^2} dx dy$
4) Маса пластини з щільністю $\gamma = \gamma(x, y)$	$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$
5) Центр мас пластини	$x_c = \frac{\iint_D x \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy} ; \quad y_c = \frac{\iint_D y \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}$
6) Момент інерції	$y_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy ; \quad y_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy$

		$y_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy$	
Приклад		Розв'язання	
1. Знайти площу S фігури, обмеженої лініями : $x + y = 5$ та $xy = 4$		1) Побудуємо графіки функцій $x + y = 5$ та $xy = 4$ Точки перетину графіків знайдемо з системи  $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x(5 - x) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$ 2) Обчислимо площу отриманої фігури $S = \iint_D dx dy = \int_1^4 dx \int_{\frac{4}{x}}^{5-x} dy = \int_1^4 x \left \frac{5-x}{4} \right dx = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x} \right) dx = \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln x \right) \Big _1^4 =$ $= 20 - 8 - 4 \ln 4 - 5 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{15}{2} - 4 \ln 4 (\text{кв.од.})$	
2. Знайти масу пластини, яка обмежена лініями $x + y = 1$, $y - x = 1$, щільність якої $\gamma(x, y) = y$		Побудуємо область $D: \{x + y = 1; y - x = 1\}$ Точки перетину графіків знайдемо із системи  $\begin{cases} x + y = 1 \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ Тоді маса пластини $m = \iint_D \gamma(x; y) dx dy = \iint_D y dx dy = \int_0^1 y dy \int_{y-1}^{1-y} dx = \int_0^1 y x \Big _{y-1}^{1-y} dy =$ $= \int_0^1 (y - y^2 - y^2 + y) dy = 2 \int_0^1 (2y - 2y^2) dy = 2 \left(y^2 - \frac{2y^3}{3} \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{2}{3} (\text{куб.од.})$	

3. Потрійний інтеграл

Границя при $\rho \rightarrow 0$ інтегральних сум, яка не залежить від способу розбиття області V , називається **потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області V** :

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_V f(P_i) \Delta v_i$$

Трикратним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області V називається вираз вигляду

$$I_V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Обчислення потрійних інтегралів в декартовій системі координат

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Приклад:

1. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^2 (4+z) dz$$

Розв'язання:

Послідовно обчислимо три звичайні визначені інтеграли, починаючи з внутрішнього:

$$I_1 = \int_0^2 (4+z) dz = \left(4z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{36-16}{2} = 10;$$

$$I_2 = \int_{x^2}^1 I_1 dy = \int_{x^2}^1 10 dy = (10y) \Big|_{x^2}^1 = 10(1-x^2);$$

$$I_3 = I = \int_{-1}^1 I_2 dx = \int_{-1}^1 10(1-x^2) dx = \left(10(x - \frac{x^3}{3}) \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{40}{3}.$$

Тут, як й при обчисленні подвійного інтеграла, можна застосовувати коротший запис:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^2 (4+z) dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 \left(4z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^2 dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 10 dy = \\ &= 10 \int_{-1}^1 y \Big|_{x^2}^1 dx = 10 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 10 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

2. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^c dz \int_0^b dy \int_0^2 (x^2 + y^2 + z^2) dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^c dz \int_0^b dy \int_0^2 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^c dz \int_0^b \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x + z^2 x \right) \Big|_0^2 dy = \\ &= \int_0^c dz \int_0^b \left(\frac{8}{3} + 2y^2 + 2z^2 \right) dy = \int_0^c \left(\frac{8}{3} y + \frac{2y^3}{3} + 2z^2 y \right) \Big|_0^b dz = \\ &= \int_0^c \left(\frac{8b}{3} + \frac{2b^3}{3} + 2z^2 b \right) dz = \left(\frac{8bz}{3} + \frac{2b^3 z}{3} + \frac{2bz^3}{3} \right) \Big|_0^c = \\ &= \frac{8bc}{3} + \frac{2b^3 c}{3} + \frac{2bc^3}{3} = \frac{2bc}{3} (4 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

4. Криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги)	
$\int_{AB} f(x, y) dl$	
4.1. Формули обчислення криволінійного інтеграла першого роду	
1) Дуга l задана параметрично: $l: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$ $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ $\int_l f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$	Приклад: Обчислити $\int (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl, \text{ де}$ $L: x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ Розв'язання: $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl = \begin{bmatrix} x'(t) = \cos t - t \sin t \\ y'(t) = \sin t + t \cos t \\ z'(t) = 1 \\ dl = \sqrt{t^2 + 2} dt \end{bmatrix} =$ $= \int_0^{2\pi} t \sqrt{t^2 + 2} dt = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left((1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$
2) Дуга l задана явно як функція від змінної x: $l: \{y = y(x), a \leq x \leq b\}$ $\int_l f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$	Приклад: Обчислити $\int_{AB} (x - y) dl, \text{ де } B - \text{ відрізок прямої } y = \frac{3}{4}x \text{ від } A(0;0) \text{ до } B(4;3)$ Розв'язання: $\int_{AB} (x - y) dl = \begin{bmatrix} y = \frac{3}{4}x; 0 \leq x \leq 4 \\ y' = \frac{3}{4}; dl = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{25}{16}} dx = \frac{5}{4} dx \end{bmatrix} =$ $= \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right) \cdot \frac{5}{4} dx = \frac{5}{4} \int_0^4 \frac{x}{4} dx = \frac{5}{16} \cdot \frac{x^2}{2} \Big _0^4 = \frac{5}{16} \cdot \frac{16}{2} = \frac{5}{2}$
3) Дуга l задана явно як функція від змінної y: $l: \{x = x(y), c \leq y \leq d\}$ $\int_l f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy$	Приклад: Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_{AB} y dl$, де AB – відрізок прямої $x = 5y$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(25;5)$

Розв'язання: $\int_{AB} y dl = \left[\begin{array}{l} x = 5y; dx = 5dy \\ dl = \sqrt{1+5^2} dy = \sqrt{26} dy \end{array} \right] = \int_0^5 \sqrt{26} y dy =$ $= \frac{\sqrt{26}}{2} \cdot y^2 \Big _0^5 = \frac{25\sqrt{26}}{2}$	
4.2. Застосування криволінійного інтегралу першого роду	
1. Площа циліндричної поверхні $P = \int_l f(x, y) dl$	2. Довжина кривої $L = \int_l dl$
3. Маса кривої L $m = \int_L \gamma(x, y) dl$	4. Координати центра мас кривої L $x_c = \frac{\int_L x \gamma(x, y) dl}{m}; \quad y_c = \frac{\int_L y \gamma(x, y) dl}{m}$
5. Момент інерції $I_x = \int_L y^2 \gamma(x, y) dl; \quad I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) dl; \quad I_o = \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl$	
5. Криволінійний інтеграл другого роду (по координатах точки)	
$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy$	
5.1. Формули обчислення криволінійного інтеграла другого роду	
1) Дуга l задана явно як функція від змінної y: $l: \{x = x(y), c \leq y \leq d\};$ $\int_l P(x, y) dy + Q(x, y) dy = \int_c^d (P(x(y); y) x'(y) + Q(x(y); y)) dx$	Приклад: Обчислити $\int_{AB} y^2 dx + 2xy dy$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$ по лінії $y = x$ Розв'язання: $\int_{AB} y^2 dx + 2xy dy = \left[\begin{array}{l} y = x; dy = dx \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right] =$ $= \int_0^1 (x^2 + 2x^2) dx = \int_0^1 3x^2 dx = 1$
2) Дуга l задана $l: \{y = y(x), a \leq x \leq b\}$ $\int_l P(x, y) dy + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x; y(x)) + Q(x; y(x)) y'(x)) dx$	Приклад: Обчислити $\int_{AB} y(x-y) dx + x dy$ вздовж лінії $y = 2x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;2)$

	Розв'язання: $\int_{AB} y(x-y)dx + xdy = \left[y = 2x^2; dy = 4xdx \right]_{0 \leq x \leq 1} =$ $= \int_0^1 [2x^2(x-2x^2) + x \cdot 4x] dx =$ $= \int_0^1 (2x^3 - 4x^4 + 4x^2) dx = \left(2 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^5}{5} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{2}{4} - \frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{30 - 48 + 80}{60} = \frac{62}{60} = \frac{31}{30}$
3) Дуга l задана параметрично $l: \{x = x(t), y = y(t); \alpha \leq t \leq \beta\};$ $\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t); y(t))x'(t) +$ $+ Q(x(t); y(t))y'(t)dt$	Приклад: Обчислити $\oint_L (x-2y)dx + (x+y)dy, \text{ де}$ $L: x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ Розв'язання: $\int_L (x-2y)dx + (x+y)dy =$ $= \left[\begin{matrix} x = R \cos t & dx = -R \sin t dt \\ y = R \sin t & dy = R \cos t dt; 0 \leq t \leq 2\pi \end{matrix} \right] =$ $= \int_0^{2\pi} (R \cos t - 2R \sin t)(-R \sin t) + (R \cos t + R \sin t)R \cos t dt =$ $= R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)) dt = 3\pi R^2$
Умова незалежності від форми кривої інтегрування $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$	
Формула Гріна $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$	
5.2. Застосування криволінійного інтеграла другого роду	
1) Площа плоскої фігури $S = \frac{1}{2} \int_l xdy - ydx$	

2) Робота сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

6. Похідна функції комплексної змінної

$$W = f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

Приріст аргументу	Приріст функції
$\Delta z = z_2 - z_1 = (x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1) =$ $= (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1) = \Delta x + i\Delta y$	$\Delta W = f(z + \Delta z) - f(z) =$ $= U(x + \Delta x, y + \Delta y) + iV(x + \Delta x, y + \Delta y) -$ $- (U(x, y) + iV(x, y)) = (U(x + \Delta x, y + \Delta y) - U(x, y)) +$ $+ i(V(x + \Delta x, y + \Delta y) - V(x, y)) = \Delta U + i\Delta V$

Похідною $f'(z)$ функції комплексної змінної $W = f(z)$ називається границя відношення приросту функції ΔW до приросту аргументу Δz , за умови, що границя існує та не залежить від шляху інтегрування, за яким $\Delta z \rightarrow 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta z}$$

Умови Коші – Рімана

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y};$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

Якщо виконуються $W = f(z)$ – диференційована	Якщо не виконуються $W = f(z)$ – не диференційована
--	--

Правила диференціювання

- $(f_1(z) \pm f_2(z))' = f_1'(z) \pm f_2'(z);$
- $(c \cdot f(z))' = c \cdot f'(z);$
- $(f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z);$
- $\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right)' = \frac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)};$
- $(F(f(z)))' = F'(f(z)) \cdot f'(z),$ якщо $f(z)$ – складена функція

7. Інтеграл від функції комплексної змінної

Означення. Границя інтегральної суми при необмеженому зростанні числа розбиттів кривої L на елементарні дуги та при прямуванні до нуля довжини найбільшої з елементарних дуг, якщо вона існує, називається **інтегралом від функції $f(z)$ по кривій (по контуру) L** та позначається символом $\int_L f(z)dz$

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(C_k) \Delta z_k$$

Вираз через два дійсних криволінійних інтеграли

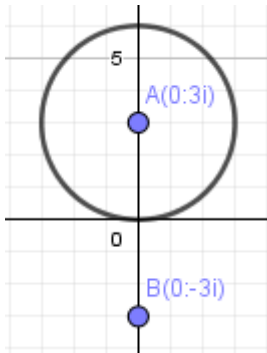
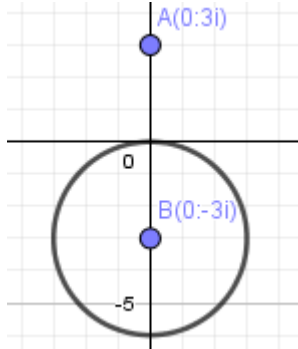
Позначення	Інтеграл
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy, C_k = \tilde{x}_k + i\tilde{y}_k$ $\Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$	$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i \int_L vdx + udy$

Обчислення, якщо лінія інтегрування має вигляд

$$L : z = z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \leq t \leq \beta;$$

$$\int_L f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt$$

Приклад	Розв'язання
Обчислити $\int_L f(z)dz$, де $f(z) = x^2 + iy^2$, L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A = 1 + i$ та $B = 2 + 3i$	Виділимо дійсну та уявну частини функції $f(z) = x^2 + iy^2 : u(x, y) = x^2; v(x, y) = y^2$, тоді $\int_L f(z)dz = \int_L x^2 dx - y^2 dy + i \int_L y^2 dx + x^2 dy$ Перший інтеграл обчислюється як визначений інтеграл $\int_L x^2 dx - y^2 dy = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^3 y^2 dy = \left. \frac{x^3}{3} \right _1^2 - \left. \frac{y^3}{3} \right _1^3 = -\frac{19}{3}.$ Другий інтеграл як криволінійний: складемо рівняння прямої AB $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} \Rightarrow y = 2x - 1, \text{ тоді } dy = 2dx \text{ та}$ $\int_L y^2 dx + x^2 dy = \int_1^2 ((2x-1)^2 + 2x^2) dx =$ $= \int_1^2 (6x^2 - 4x + 1) dx = \left(2x^3 - 2x^2 + x \right) \Big _1^2 = 9.$ Отже, $\int_L f(z)dz = \int_L x^2 dx - y^2 dy + i \int_L y^2 dx + x^2 dy = -\frac{19}{3} + 9i$

Теорема Коші	
Якщо функція $f(z)$ однозначна в обл. G , має в кожній точці обл. G неперервну похідну, то	
$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, де Γ – замкнений контур	
Приклад	Розв'язання
Обчислити $\int_L \frac{1}{z^2 + 9} dz$, якщо:	Надамо функцію у вигляді
	$\int_L \frac{1}{z^2 + 9} dz = \int_L \frac{dz}{(z - 3i)(z + 3i)}$
а) контур L – коло $ z - 3i = 2$;	а) контур L – коло $ z - 3i = 2$ є колом з центром в точці $(0; 3i)$ та радіусом $r = 2$, точка $z = -3i$ не входить до цього кола, тоді
	$\int_L \frac{1}{z^2 + 9} dz = \int_L \frac{dz}{(z - 3i)(z + 3i)} = \int_L \frac{\frac{dz}{z + 3i}}{z - 3i} = 2\pi i \frac{1}{z + 3i} \Big _{z=3i} =$
	$= 2\pi i \frac{1}{3i + 3i} = \frac{2\pi i}{6i} = \frac{\pi}{3};$
б) контур L – коло $ z + 3i = 3$	б) контур L – коло $ z + 3i = 3$ є колом з центром в точці $(0; -3i)$ та радіусом $r = 3$, точка $z = 3i$ не входить до цього кола, тоді
	$\int_L \frac{1}{z^2 + 9} dz = \int_L \frac{dz}{(z - 3i)(z + 3i)} = \int_L \frac{\frac{dz}{z + 3i}}{z - 3i} = 2\pi i \frac{1}{z - 3i} \Big _{z=-3i} =$
	$= 2\pi i \frac{1}{-3i - 3i} = -\frac{2\pi i}{6i} = -\frac{\pi}{3}$

8. Степеневі ряди	
8.1. Означення та збіжність степеневих рядів	
Ряд вигляду	
$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$	
де z – незалежна комплексна змінна, z_0 ; c – сталі комплексні числа; z_0 – центр ряду називається	
степеневим рядом функції комплексної змінної	
Якщо $z_0 = 0$, то степеневий ряд має вигляд	
$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$	

Збіжність степеневому ряду	
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ збігається абсолютно при $z - z_0 < R$, розбігається при $z - z_0 > R$, при $z - z_0 = R$ потрібні додаткові дослідження	R - радіус збіжності, знаходиться за формулами $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{ c_n }}; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{c_n}{c_{n+1}} \right $
Приклад: Знайти радіус збіжності та область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{5^n} = 1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \dots + \frac{(z-1)^n}{5^n} + \dots$	Розв'язання: Випишемо коефіцієнти ряду $c_n = \frac{1}{5^n} \text{ та } c_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}.$ Радіус збіжності знайдемо за формулою $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{c_n}{c_{n+1}} \right = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5.$ Отже, область збіжності ряду $z - 1 < 5$
8.2. Ряди Тейлора та Лорана	
Ряд Тейлора	Ряд Лорана
$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots$ або $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$ де $c_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ носить назву правильної частини ряду Лорана. Степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ носить назву головної частини ряду Лорана. Областю збіжності ряду Лорана є кільце $r < z - z_0 < R$, що обмежене концентричними колами з центром в точці $z = z_0$ та радіусами r та R.
Розкладання елементарних функцій в ряд Тейлора	
$1. \quad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$ $2. \quad \sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$ $3. \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$ $4. \quad shz = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$	$5. \quad chz = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$ $6. \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$ $7. \quad \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$

Приклад: 1. Розкласти до ряду Тейлора за степенями $z-i$ функцію $f(z) = z^5$	Розв'язання: Знайдемо похідні заданої функції: $f'(z) = 5z^4; f''(z) = 20z^3; f'''(z) = 60z^2;$ $f^{(4)}(z) = 120z; f^{(5)}(z) = 120; f^{(6)}(z) = \dots = 0.$ Обчислимо значення похідних в точці $z_0 = i$: $f(i) = i; f'(i) = 5; f''(i) = -20i; f'''(i) = -60;$ $f^{(4)}(i) = 120i; f^{(5)}(i) = 120; f^{(6)}(i) = \dots = 0.$ Ряд Тейлора за степенями $z-i$ функції $f(z) = z^5$ матиме вигляд: $f(z) = z^5 = i + 5(z-i) - 10(z-i)^2 - 10(z-i)^3 +$ $+ 5i(z-i)^4 + (z-i)^5$
2. Розкласти у ряд Лорана по степенях z функцію $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ в околі точки $z_0 = 0$	Надамо функцію у вигляді $f(z) = \frac{1}{2z-5} = \frac{1}{-5(1-\frac{2}{5}z)} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}z}$ Тоді за формулою суми нескінченної геометричної прогресії з $b_1 = -\frac{1}{5}$ та знаменником $q = \frac{2}{5}z$ отримаємо $f(z) = -\frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{2}{5}z + \left(\frac{2}{5}z\right)^2 + \left(\frac{2}{5}z\right)^3 + \dots \right) = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}z\right)^n$

9. Класифікація особливих точок функції комплексної змінної

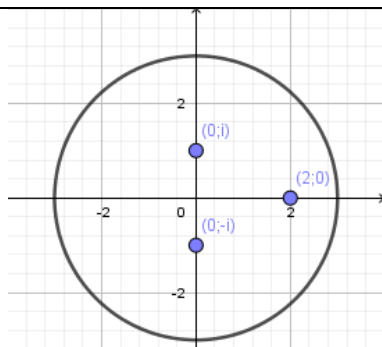
Ізольована особлива точка

Якщо функція $f(z)$ однозначна та аналітична в околі точки $z = z_0$, але не в самій точці $z = z_0$

Усувна особлива точка	Полюс	Істотно особлива точка
ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ не містить від'ємних степенів $(z - z_0)$	ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^m c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ містить лише скінченне число від'ємних степенів $(z - z_0)$ m – скінченне число (порядок полюса); $m=1$ – простий полюс; $m>1$ – полюс порядку m	ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n (z - z_0)^n$ містить нескінченну множину від'ємних степенів $(z - z_0)$
$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не існує

Приклади Дослідити характер ізольованої точки $z_0 = 0$ для функцій:		
$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ За означенням знаходимо: $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$ Отже, точка $z_0 = 0$ усувна особлива точка	$f(z) = \frac{1}{\sin z}$ За означенням знаходимо: $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sin z} = \infty$ Отже, точка $z_0 = 0$ простий полюс	$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ За означенням знаходимо: $\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0+0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0+0} e^{\frac{1}{z}} = \infty \\ \lim_{z \rightarrow 0-0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0-0} e^{\frac{1}{z}} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} \text{ не існує.}$ Отже, точка $z_0 = 0$ істотно особлива точка
Нулі функції: нулем функції $f(z)$ називається точка $z = z_0$ з області аналітичності функції $f(z)$, в якій має місце рівність $f(z_0) = 0$. Розвинення функції $f(z)$ для деякого околу точки $z = z_0$ має вигляд $f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m-1}(z - z_0)^{m-1} + \dots$ де m - порядок нуля; $m = 1$ – простий нуль; $m > 1$ – нуль порядку m		Зв'язок нуля з полюсом: ✓ якщо точка $z = z_0$ є нуль функції $f(z)$, то $z = z_0$ є полюсом функції $\frac{1}{f(z)}$; ✓ якщо точка $z = z_0$ є полюсом функції $f(z)$, то $z = z_0$ є нулем функції $\frac{1}{f(z)}$
Приклад:	Розв'язання:	
1. Показати, що точка $z = 0$ є нуль третього порядку функції $f(z) = z - \sin z$	1. Розвинемо задану функцію у ряд: $f(z) = z - \sin z = z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) =$ $= z - z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots,$ де $m = 3$, тобто точка $z = 0$ є нуль порядку 3.	
2. Показати, що точка $z = i$, яка є нулем функції $f(z) = z - i$ буде полюсом функції $f(z) = \frac{1}{z - i}$	2. За означенням полюса маємо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z - i} = \infty,$ тобто точка $z = i$ є простим полюсом функції $f(z) = \frac{1}{z - i}$	

10. Лишок функції	
10.1. Означення та обчислення лишків функції Значення інтеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$ називається лишком функції $f(z)$ відносно особливої точки $z = z_0$ та позначається $\text{Res} f(z_0)$	
Обчислення лишків	
Відносно полюсу	Відносно усувної особливої точки
✓ для простого полюса $\text{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z);$ ✓ для полюса порядку m $\text{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}((z - z_0)^m \cdot f(z))}{dz^{m-1}}$	$\text{Res} f(z_0) = 0$
Приклад	Розв'язання
1. Знайти лишки функції $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$	1. Особливі точки функції $z_1 = 1, z_2 = -i$ є простими полюсами. За правилом обчислення лишків маємо: $\begin{aligned} \text{Res} f(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{1}{(z-1)(z+i)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{1+i} \\ &= \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \text{Res} f(-i) &= \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \cdot \frac{1}{(z-1)(z+i)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{-i-1} = \\ &= -\frac{1}{1+i} = -\frac{1-i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$
2. Знайти лишки функції $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^3}$	2. Особлива точка функції $z = 2$ є полюсом порядку 3 ($m = 3$). За правилом обчислення лишків маємо: $\begin{aligned} \text{Res} f(2) &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d^{3-1} \left((z-2)^3 \cdot \frac{z^2}{(z-2)^3} \right)}{dz^{3-1}} = \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d^2(z^2)}{dz^2} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d(2z)}{dz} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2} 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned}$
10.2. Основна теорема про лишки	
Інтеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$ дорівнює сумі лишків функції $f(z)$ відносно особливих точок $z_1, z_2, \dots, z_n$ помноженої на $2\pi i$, тобто $\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} f(z_k)$	
Приклад	Розв'язання
1. Обчислити інтеграл $\int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-2)},$ де Γ – коло $z = 3$	1) Надамо підінтегральну функцію у вигляді $f(z) = \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z-2)}.$ 2) Ізольованими особливими точками підінтегральної функції є точки $z_1 = -i; z_2 = i; z_3 = 2$, які знаходяться в колі $z = 3$. Ці точки є простими полюсами.



3) Знайдемо лишки в цих точках:

$$\begin{aligned} \text{Res } f(-i) &= \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \cdot \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z-2)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2}{(z-i)(z-2)} = \frac{(-i)^2}{(-i-i)(-i-2)} = \\ &= \frac{-1}{-2i(-i-2)} = -\frac{1}{2i(2+i)} = -\frac{1}{-2+4i} = -\frac{-2-4i}{20} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res } f(i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \cdot \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z-2)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{(z+i)(z-2)} = \frac{(i)^2}{(i+i)(i-2)} = \\ &= \frac{-1}{2i(i-2)} = -\frac{1}{2i(-2+i)} = -\frac{1}{-2-4i} = -\frac{-2+4i}{20} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res } f(2) &= \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \cdot \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z-2)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2}{(z+i)(z-i)} = \frac{2^2}{(2+i)(2-i)} = \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

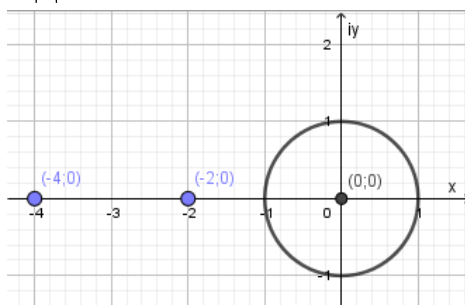
4) За основною теоремою про лишки отримаємо

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-2)} = 2\pi i \sum_{i=1}^3 \text{Res } f(z_i) = 2\pi i \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i + \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i + \frac{4}{5} \right) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

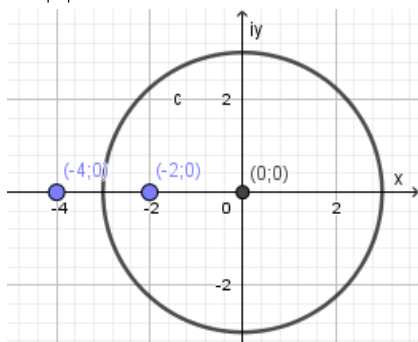
2. Обчислити інтеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z(z+2)(z+4)}, \text{ де } \Gamma - \text{коло}$$

a) $|z| = 1$;



б) $|z| = 3$;



1) Ізольованими особливими точками підінтегральної функції є точки $z_1 = 0$; $z_2 = -2$; $z_3 = -4$, які знаходяться в колі $|z| = 3$. Ці точки є простими полюсами

2) Знайдемо лишки в цих точках:

$$\text{Res } f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \cdot \frac{1}{z(z+2)(z+4)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z+2)(z+4)} = \frac{1}{(0+2)(0+4)} = \frac{1}{8};$$

$$\text{Res } f(-2) = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \cdot \frac{1}{z(z+2)(z+4)} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1}{z(z+4)} = \frac{1}{(-2)(-2+4)} = -\frac{1}{4};$$

$$\text{Res } f(-4) = \lim_{z \rightarrow -4} (z+4) \cdot \frac{1}{z(z+2)(z+4)} = \lim_{z \rightarrow -4} \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{(-4)(-4+2)} = \frac{1}{8}.$$

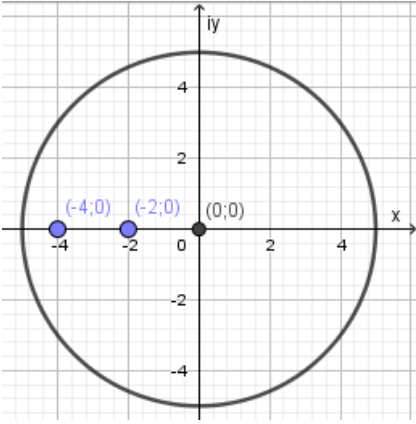
3) Розглянемо області інтегрування:

a) Γ – коло $|z| = 1$. В цьому колі знаходиться тільки простий полюс $z_1 = 0$, тоді основною теоремою про лишки отримаємо

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z(z+2)(z+4)} = 2\pi i \cdot \text{Res } f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4};$$

б) Γ – коло $|z| = 3$. В цьому колі знаходяться прості полюси $z_1 = 0$; $z_2 = -2$, тоді основною теоремою про лишки отримаємо

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z(z+2)(z+4)} = 2\pi i \cdot (\text{Res } f(0) + \text{Res } f(-2)) = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{4};$$

в) $z = 5$ 	в) Γ – коло $z = 5$. В цьому колі знаходяться прості полюси $z_1 = 0; z_2 = -2; z_3 = -4$, тоді основною теоремою про лишки отримаємо $\int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z(z+2)(z+4)} = 2\pi i \cdot (\text{Res } f(0) + \text{Res } f(-2) + \text{Res } f(-4)) = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = 0$
--	---

11. Операційне числення		
11.1. Перетворення Лапласа та його основні властивості		
Операційне числення – один з методів математичного аналізу, за допомогою якого можна простіше розв’язувати різні математичні задачі (наприклад, лінійні диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь)		
Функція $f(t)$ має задовольняти умовам		
1. $f(t)$ - визначена та неперервна всюди на $-\infty < t < +\infty$ за винятком скінченної кількості точок розриву першого роду на кожному скінченному інтервалі	2. $f(t) = 0$ при $t < 0$	3. Існують такі числа $M > 0$ та $s > 0$, що для всіх $t < 0$ виконується нерівність $ f(t) < Me^{st},$ число s – показник зростання функції
Означення оригіналу		
Функція $f(t)$, яка задовольняє умовам 1 – 3, називається початковою функцією або оригіналом		
Означення зображення		
Функція $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ називається лапласовим зображенням або зображенням функції $f(t)$. Позначення $F(p) \rightarrow f(t)$ або $f(t) \leftarrow F(p)$		
Означення перетворення Лапласа		
Операція відповідності оригіналу $f(t)$ та зображення $F(p)$, що визначається формулою $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$, називається перетворенням Лапласа		
Основні властивості перетворення Лапласа		
1. Властивість однорідності	якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ та c – стала, то $f(t) \rightarrow F(p) + c$	
2. Властивість лінійності	якщо $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$ та $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$ і c_1, c_2 – сталі, то $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \rightarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$	

3. Диференціювання оригіналу	якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ та $f'(t)$ є оригіналом, то $f'(t) = pF(p) - f(0)$
4. Інтегрування оригіналу	якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то $\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p}$
5. Диференціювання зображення	якщо $F(p) \rightarrow f(t)$, то $F^{(n)}(p) \rightarrow (-t)^n f(t)$
6. Інтегрування зображення	якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\frac{f(t)}{t}$ є оригіналом та $\int_p^\infty F(u) du$ збігається, то $\frac{f(t)}{t} = \int_p^\infty F(u) du$

11.2. Основні теореми операційного числення	
1. Теорема подібності	якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ та $\lambda > 0$, то $f(\lambda t) \rightarrow \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
2. Теорема зміщення	якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ та α - довільне комплексне число, то $F(p - \alpha) \rightarrow e^{-\alpha t} f(t)$
3. Теорема запізнення	якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ та $\lambda > 0$, то $f(t - \alpha) \rightarrow e^{-\alpha p} F(p)$
4. Теорема множення	якщо $F_1(p) \rightarrow f_1(t)$ та $F_2(p) \rightarrow f_2(t)$, то $F_1(p) \cdot F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$
Знаходження оригіналу за зображенням	
Приклад: Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням: 1. $F(p) = \frac{p^2}{(1 + p^2)^2}$ 2. $F(p) = \frac{1}{p^3(1 + p^2)}$	Розв'язання: 1. Оскільки $\frac{p}{1 + p^2} \rightarrow \cos t$, то покладемо в теоремі множення $F_1(p) = F_2(p) = \frac{p}{1 + p^2}$ та $f_1(t) = f_2(t) = \cos t$, тоді отримаємо $f(t) = \int_0^t \cos \tau \cdot \cos(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\cos t + \cos(2\tau - t)) d\tau =$ $= \frac{1}{2} \left(\tau \cos t + \frac{1}{2} \sin(2\tau - t) \right) \Big _0^t = \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t).$ 2. Надамо дріб у вигляді $\frac{1}{p^3(1 + p^2)} = p \cdot \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{1 + p^2}.$ Покладемо $F_2(p) = \frac{1}{p^4} \rightarrow \frac{t^3}{6} = f_2(t); F_2(p) = \frac{1}{1 + p^2} \rightarrow \sin t = f_1(t).$ Тоді за теоремою множення, маємо

3. $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$ 4. $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2 - 4)}$	$p \cdot \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{1+p^2} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{6} \cdot \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^3 \sin \tau d\tau.$ Інтегруючи останній інтеграл два рази по частинах, знайдемо $f(t) = \frac{1}{2}(t-\tau)^2(-\cos \tau) - 2(t-\tau)\sin \tau + 2\cos \tau \Big _0^t = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$ 3. Розкладемо дріб на елементарні: $\frac{p}{p^2 - 2p + 5} = \frac{p}{p^2 - 2p + 1 + 4} = \frac{p}{(p-1)^2 + 4} =$ $= \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + \frac{1}{(p-1)^2 + 4}$ За таблицею оригіналів та зображень маємо $\frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} \rightarrow e^t \cos 2t; \frac{1}{(p-1)^2 + 4} = \frac{2}{(p-1)^2 + 2^2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} e^t \sin 2t.$ Отже, $f(t) = e^t \cos 2t + \frac{1}{2} e^t \sin 2t$ 4. Розкладемо дріб на елементарні: $\frac{1}{(p-1)(p^2 - 4)} = \frac{1}{(p-1)(p-2)(p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+2}.$ Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо значення коефіцієнтів A, B, C: $1 = Ap^2 - 4A + Bp^2 + Bp - 2B + Cp^2 - 3Cp + 2C$ $\begin{array}{l l} p^2 & A+B+C=0 \\ p & B-3C=0 \\ p^0 & -4A-2B+2C=1 \end{array}$ Звідки $A = -\frac{1}{3}; B = \frac{3}{12}; C = \frac{1}{12}.$ Таким чином, $\frac{1}{(p-1)(p^2 - 4)} = \frac{1}{(p-1)(p-2)(p+2)} =$ $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p+2}.$ Отже, $f(t) = -\frac{1}{3} e^t + \frac{3}{12} e^{2t} + \frac{1}{12} e^{-2t}$
---	---

11.3. Алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь засобами операційного числення

1. Розв'яжемо задачу Коші, тобто знайдемо частинний розв'язок, диференціального рівняння $y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t)$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = y_0; y'(0) = y'_0$.

2. Вважаємо, що $y(t), y'(t), y''(t)$ та права частина $f(t)$ є оригіналами. Позначимо $y(t) \rightarrow Y(p); f(t) \rightarrow F(p)$.

3. За теоремою про диференціювання оригіналу та з початкових умов, маємо $y'(t) \rightarrow pY(p) - y_0; y''(t) \rightarrow p^2Y(p) - py_0 - y'_0.$ 4. В заданому диференціальному рівнянні перейдемо до зображень: $y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = f(t) \rightarrow p^2Y(p) - py_0 - y'_0 + a_1(pY(p) - y_0) + a_2Y(p) = F(p)$ або $(p^2 + a_1p + a_2)Y(p) = F(p) + py_0 + y'_0 + a_1y_0.$ 5. Звідси операторний розв'язок заданого рівняння матиме вигляд $Y(p) = \frac{F(p) + py_0 + y'_0 + a_1y_0}{p^2 + a_1p + a_2}.$ 6. Для розв'язання задачі Коші переходимо до оригіналу $Y(p) \rightarrow y(t).$	
Приклад: Знайти розв'язок задачі Коші: $\begin{cases} y'' + y = t \\ y(0) = 1; y'(0) = 1 \end{cases}$	Розв'язання: 1) Диференціальне рівняння $y'' + y = t$, початкові умови $y(0) = 1; y'(0) = 1$ 2) $y(t), y'(t), y''(t)$ та $f(t) = t$ є оригіналами 3) $y''(t) \rightarrow p^2Y(p) - py_0 - y'_0 = p^2Y(p) - p - 1; f(t) = t \rightarrow \frac{1}{p^2}$ 4) В заданому диференціальному рівнянні перейдемо до зображень: $(p^2 + 1)Y(p) = \frac{1}{p^2} + p + 1; (p^2 + 1)Y(p) = \frac{1 + p^2}{p^2} + p$ $Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1}$ 5) Переходимо до оригіналу $Y(p) \rightarrow y(t):$ $Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1} \rightarrow f(t) = t + \cos t$
Приклад: Знайти розв'язок задачі Коші: $\begin{cases} y'' - y' = 1 \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0 \end{cases}$	Розв'язання: 1. Диференціальне рівняння $y'' - y' = 1$, початкові умови $y(0) = 0; y'(0) = 0$ 2. $y(t), y'(t), y''(t)$ та $f(t) = 1$ є оригіналами 3. $y(t) \rightarrow Y(p); y'(t) \rightarrow pY(p) - y(0) = pY(p);$ $y''(t) \rightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p);$ $f(t) = 1 \rightarrow \frac{1}{p}$ 4. В заданому диференціальному рівнянні перейдемо до зображень: $p^2Y(p) - pY(p) = \frac{1}{p}$ звідки $Y(p) = \frac{1}{p(p^2 - p)} = \frac{1 - p^2 + p^2}{p^2(p - 1)} = \frac{-1 - p}{p^2} + \frac{1}{p - 1} = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p - 1}$ 5. Оскільки $\frac{1}{p^2} \rightarrow t; \frac{1}{p} \rightarrow 1; \frac{1}{p - 1} \rightarrow e^t$, то $y(t) = -t - 1 + e^t$

Приклад:	Розв'язання:
В початковий момент часу $t = 0$ в електричний ланцюг, що складається з послідовно поєднаних індуктивності L, опору R та ємкості C, включається стала електрорушійна сила u_0. Струм в ланцюзі та заряд конденсатора в початковий момент дорівнюють нулю. Знайти силу струму $i(t)$ в ланцюзі	Оскільки $i(0) = 0; q(0) = 0$, то операторний опір $Z(p) = Lp + R + \frac{1}{Cp}$, а операторна напруга $U(p) = \frac{u_0}{p}$. За законом Ома знайдемо операторний струм: $I(p) = \frac{u_0}{p \left(Lp + R + \frac{1}{Cp} \right)} = \frac{u_0}{L \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{u_0}{L \left(\left(p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)} = \frac{u_0}{L \left((p - \alpha)^2 + \omega^2 \right)}$ де $\alpha = \frac{R}{2L}; \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ Застосовуючи формули $\frac{1}{p^2 + k^2} \rightarrow \frac{1}{k} \sin(kt); \frac{1}{p^2 - k^2} \rightarrow \frac{1}{k} sh(kt); \frac{1}{p^2} \rightarrow t$ та теорему зміщення, отримаємо $i(t) = \frac{u_0}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t), \text{ якщо } \omega^2 > 0;$ $i(t) = \frac{u_0}{L\gamma} e^{-\alpha t} sh(\gamma t), \text{ якщо } \omega^2 = -\gamma^2 < 0;$ $i(t) = \frac{u_0}{L} t e^{-\alpha t}, \text{ якщо } \omega = 0.$ Враховуючи, що $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, можна сказати, що перший результат буде при $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, другий - при $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ та третій - при $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. В першому випадку в ланцюзі відбувається коливальний процес, що затухає. Число α називається коефіцієнтом затухання; $\alpha \neq 0$ за наявності R та чим більше α, тим швидше зменшується струм. Число ω називається коловою частотою - дорівнює числу коливань, що відбуваються в ланцюзі за час 2π сек.

11.4. Алгоритм розв'язання систем диференціальних рівнянь методами операційного числення

1. Розглянемо систему двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x'(t) + a_{11}x(t) + a_{12}y(t) = f_1(t) \\ y'(t) + a_{21}x(t) + a_{22}y(t) = f_2(t) \end{cases}, \text{ де } x(t), y(t) - \text{невідомі функції}$$

Знайдемо частинний розв'язок системи, що задовольняє початковим умовам $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

2. Вважаємо, що шукані функції $x(t), y(t)$, їх похідні $x'(t), y'(t)$ та праві частини $f_1(t), f_2(t)$ є оригіналами. 3. Позначимо $x(t) \rightarrow X(p), y(t) \rightarrow Y(p), f_1(t) \rightarrow F_1(p), f_2(t) \rightarrow F_2(p)$, і за теоремою диференціювання оригіналів $x'(t) \rightarrow pX(p) - x_0, y'(t) \rightarrow pY(p) - y_0$. 4. Перейдемо до системи алгебраїчних рівнянь відносно зображень: $\begin{cases} pX(p) - x_0 + a_{11}X(p) + a_{12}Y(p) = F_1(p) \\ pY(p) - y_0 + a_{21}X(p) + a_{22}Y(p) = F_2(p) \end{cases}$ 5. Розв'язуючи її, знайдемо зображення $X(p), Y(p)$, оригіналами яких є шукані функції $x(t), y(t)$	
Приклад: 1. Знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} y' + 3y + x = 0 \\ x' - y + x = 0 \end{cases}, \quad \text{що}$ задовольняє початковим умовам $y(0) = 1, x(0) = 1$	Розв'язання: 1. Вважаємо, що шукані функції $x(t), y(t)$, їх похідні $x'(t), y'(t)$ та праві частини $f_1(t), f_2(t)$ є оригіналами. 2. Позначимо $x(t) \rightarrow X(p), y(t) \rightarrow Y(p)$, $f_1(t) = 0 \rightarrow F_1(p) = 0, f_2(t) = 0 \rightarrow F_2(p) = 0$, $x'(t) \rightarrow pX(p) - x_0 = pX(p) - 1$, $y'(t) \rightarrow pY(p) - y_0 = pY(p) - 1$ 3. Перейдемо до системи алгебраїчних рівнянь відносно зображень: $\begin{cases} pY(p) - 1 + 3Y(p) + X(p) = 0 \\ pX(p) - 1 - Y(p) + X(p) = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} (p+3)Y(p) + X(p) = 1 \\ -Y(p) + (p+1)X(p) = 1 \end{cases}$ 4. Знайдемо розв'язок системи за формулами Крамера: $\Delta = (p+3)(p+1) + 1 = p^2 + 4p + 4 = (p+2)^2;$ $\Delta_Y = p+1-1 = p;$ $\Delta_X = p+3+2 = p+4.$ Тоді $Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{p}{(p+2)^2}; X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{p+4}{(p+2)^2}.$ 5. Знайдемо оригінали $x(t), y(t)$ за знайденими зображеннями $Y(p) = \frac{p}{(p+2)^2} = \frac{(p+2)-2}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2} - \frac{2}{(p+2)^2};$ $X(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)^2}.$ За таблицею оригіналів та зображень, маємо $\frac{1}{p+2} \rightarrow e^{-2t}; \frac{1}{(p+2)^2} \rightarrow te^{-2t}.$ Звідки отримаємо шуканий розв'язок системи: $x(t) = e^{-2t}(1+2t); y(t) = e^{-2t}(1-2t)$

2. Знайти розв'язок системи $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases}$ що задовольняє початковим умовам $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$	1) Запишемо систему у вигляді $\begin{cases} x' - y - z = 0 \\ y' - z - x = 0 \\ z' - x - y = 0. \end{cases}$ 2) Вважаємо, що шукані функції $x(t), y(t), z(t)$, їх похідні $x'(t), y'(t), z'(t)$ та праві частини $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ є оригіналами. 3) Позначимо $x(t) \rightarrow X(p), y(t) \rightarrow Y(p), z(t) \rightarrow Z(p)$; $f_1(t) = 0 \rightarrow F_1(p) = 0, f_2(t) = 0 \rightarrow F_2(p) = 0, f_3(t) = 0 \rightarrow F_3(p) = 0$; $x'(t) \rightarrow pX(p) - x_0 = pX(p) - 1, y'(t) \rightarrow pY(p) - y_0 = pY(p)$; $z'(t) \rightarrow pZ(p) - z_0 = pZ(p)$. 4) Перейдемо до системи алгебраїчних рівнянь відносно зображень: $\begin{cases} pX(p) - Y(p) - Z(p) = 1 \\ -X(p) + pY(p) - Z(p) = 0 \\ -X(p) - Y(p) + pZ(p) = 0 \end{cases}$ 5) Знайдемо розв'язок системи за формулами Крамера: $\Delta = p^3 - 3p - 2 = (p+1)^2(p-2);$ $\Delta_Y = p+1;$ $\Delta_X = p^2 - 1;$ $\Delta_Z = p+1.$ Тоді $Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{p+1}{(p+1)^2(p-2)} = \frac{1}{(p+1)(p-2)} = \frac{1}{3(p-2)} - \frac{1}{3(p+1)};$ $X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{p^2-1}{(p+1)^2(p-2)} = \frac{p-1}{(p+1)(p-2)} = \frac{2}{3(p+1)} + \frac{1}{3(p-2)};$ $Z(p) = \frac{\Delta_Z}{\Delta} = \frac{p+1}{(p+1)^2(p-2)} = \frac{1}{3(p-2)} - \frac{1}{3(p+1)}.$ 6) Знайдемо оригінали $x(t), y(t), z(t)$ за знайденими зображеннями за допомогою таблиці оригіналів та зображень: $x(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}; y(t) = z(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$
3. Знайти розв'язок системи $\begin{cases} x' + y = e^t \\ y' + x = e^{-t} \end{cases}$ що задовольняє початковим умовам $x(0) = 1; y(0) = 1$.	1) Вважаємо, що шукані функції $x(t), y(t)$, їх похідні $x'(t), y'(t)$ та праві частини $f_1(t), f_2(t)$ є оригіналами. 2) Позначимо $x(t) \rightarrow X(p), y(t) \rightarrow Y(p)$; $f_1(t) = e^t \rightarrow F_1(p) = \frac{1}{p-1}, f_2(t) = e^{-t} \rightarrow F_2(p) = \frac{1}{p+1}$; $x'(t) \rightarrow pX(p) - x_0 = pX(p) - 1, y'(t) \rightarrow pY(p) - y_0 = pY(p) - 1$.

3) Перейдемо до системи алгебраїчних рівнянь відносно зображень:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + Y(p) = \frac{1}{p-1}; \\ X(p) + pY(p) - 1 = \frac{1}{p+1}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX(p) + Y(p) = \frac{p}{p-1}; \\ X(p) + pY(p) = \frac{p+2}{p+1}. \end{cases}$$

4) Знайдемо розв'язок системи за формулами Крамера:

$$\Delta = p^2 - 1$$

$$\Delta_X = \frac{p^3 - p + 2}{(p-1)(p+1)}$$

$$\Delta_Y = \frac{p^3 - 3p}{(p-1)(p+1)}$$

Тоді

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{\frac{p^3 - p + 2}{(p-1)(p+1)}}{p^2 - 1} = \frac{p^3 - p + 2}{(p^2 - 1)^2} = \frac{p}{p^2 - 1} + \frac{2}{(p^2 - 1)^2};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{\frac{p^3 - 3p}{(p-1)(p+1)}}{p^2 - 1} = \frac{p^3 - 3p}{(p^2 - 1)^2} = \frac{p}{p^2 - 1} - \frac{2p}{(p^2 - 1)^2};$$

5) Враховуючи, що

$$cht \rightarrow \frac{p}{p^2 - 1}; \quad t \cdot cht - sht \rightarrow \frac{2}{(p^2 - 1)^2}; \quad t \cdot sht \rightarrow \frac{2p}{(p^2 - 1)^2},$$

знайдемо оригінали $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} + t \cdot cht; \\ y(t) = cht - t \cdot sht. \end{cases}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лиман Ф., Власенко В., Петренко С. Вища математика: Навчальний посібник. Ч. 1,2. Суми: Універсальна книга, 2018. 614 с.
4. Зайцев Є.П. Вища математика. Київ: Алерта, 2013, 574 с.
5. Дубовик В.П. Вища математика, Київ: 2013. 150 с.
6. Клепко В. Голець В. Вища математика в прикладах і задачах: - Центр навчальної літератури, 2019, 594 с.
7. Овчинніков П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч. 1,2, Київ: Техніка, 2009.
8. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Київ: А.С.К., 2018.

Навчальне видання

Лінкова Олена Володимирівна
Гарбуз Артем Ігорович

Вища математика та математична статистика

навчально-наочний посібник
для студентів очної та дистанційної форми навчання
(частина 3)

ДУІТЗ
65023, Одеса, вул. Ковальська, 1
Обсяг 2,0, електронна версія