

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку
Факультет електроніки, автоматизації та метрології
Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I
Лінійна алгебра
Аналітична геометрія
Математичний аналіз

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи
студентів спеціальностей

281 Публічне управління та адміністрування,
051 Економіка, 073 Менеджмент, 075 Маркетинг

Одеса – 2023

УДК 512.64+514.12+517.2+517.3

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» Урум Г. Д.

Вища математика, Частина I «Лінійна алгебра, аналітична геометрія, Математичний аналіз»: методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів спеціальностей: 281 Публічне управління та адміністрування, 051 Економіка, 073 Менеджмент, 075 Маркетинг/ Укладачі: Волкова М. Г., Тарасенко І. В., 2023, 50 с.

Методичні вказівки містять приклади розв'язання задач з таких розділів вищої математики, як лінійна алгебра, векторна алгебра, аналітична геометрія, основи математичного аналізу. Для перевірки засвоєння знань пропонуються запитання для самоконтролю та задачі для самостійного розв'язання.

Запропоновані методичні вказівки призначено для студентів спеціальностей 281 Публічне управління та адміністрування, 051 Економіка, 073 Менеджмент, 075 Маркетинг ОР Бакалавр першого року навчання.

Ухвалено на засіданні кафедри вищої математики, і рекомендовано до друку

Протокол № 2 від 26 вересня 2022

Затверджено методичною радою ДУІТЗ. Протокол № 2 від 8 лютого 2023

© Волкова М. Г., Тарасенко І. В., 2023

© ДУІТЗ, 2023

Зміст

1. Тема 1. Теорія матриць та визначників.....	4
2. Тема 2. Системи лінійних рівнянь.....	10
3. Тема 3. Векторна алгебра.....	14
4. Тема 4. Лінії першого порядку.....	17
5. Тема 5. Лінії другого порядку.....	23
6. Тема 6. Поверхні другого порядку.....	27
7. Тема 7. Функції. Границя функції. Неперервність функції.....	30
8. Тема 8. Похідна функції. Дослідження функції за допомогою похідної.....	37
9. Тема 9. Невизначений інтеграл.....	39
10. Тема 10. Визначений інтеграл та його застосування.....	51
Література.....	57

Тема 1. Теорія матриць та визначників.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 1 п. 1-7.

Приклади розв'язання задач.

Вправа 1. Знайти матрицю, транспоновану до даної

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця A розміром 2×2 . Поміняємо місцями стовпці та рядки й отримаємо матрицю A^T , транспоновану до матриці A :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^T розміром 2×2 .

$$2) B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

Матриця B розміром 2×3 . Поміняємо місцями стовпці та рядки й отримаємо матрицю B^T , транспоновану до матриці B :

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Матриця B^T розміром 3×2 .

Вправа 2. Обчисліть добуток матриць A і B :

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця A розміром 2×2 , матриця B також розміром 2×2 . Кількість стовпців матриці A збігається з кількістю рядків матриці B , тому множення $A \cdot B$ виконати можна і результатом буде матриця розміром 2×2 :

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) & 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 \\ -5 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) & -5 \cdot 6 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 + 6 & 12 - 12 \\ -15 + 2 & -30 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -13 & -34 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця A розміром 3×2 , матриця B розміром 2×2 . Кількість стовпців матриці A збігається з кількістю рядків матриці B , тому множення $A \cdot B$ виконати можна і результатом буде матриця розміром 3×2 :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \\ -2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & -2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & -1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 8 & -11 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вправа 3. Обчислити визначники 2-го та 3-го порядків, відповідно, за формулами:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2.$$

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) = 2 + 12 = 14.$$

$$2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \cdot (-1) - (-1) \cdot 5 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) -$$

$$-3 \cdot 0 \cdot (-3) = -30 + 0 + 3 + 20 + 4 + 0 = -3.$$

Вправа 4. Обчислити матрицю, обернену до даної:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) \cdot 7 + 4 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 7 -$$

$$-5 \cdot 0 \cdot (-2) = 14 + 20 + 0 + 3 - 84 + 0 = -47 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot 7 - 5 \cdot 0 = -7,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 \cdot 7 - 3 \cdot 0) = -28,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) = 23,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 7 - 5 \cdot 1) = -16,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 - 3 \cdot 1 = -17,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2 \cdot 5 - 3 \cdot 3) = 19,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2 \cdot 0 - 4 \cdot 1) = 4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = -10.$$

Союзна матриця має вигляд:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 1 \\ -28 & -17 & 4 \\ 23 & 19 & -10 \end{pmatrix},$$

тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -16 & 1 \\ -28 & -17 & 4 \\ 23 & 19 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{47} & \frac{16}{47} & -\frac{1}{47} \\ \frac{28}{47} & \frac{17}{47} & -\frac{4}{47} \\ -\frac{23}{47} & -\frac{19}{47} & \frac{10}{47} \end{pmatrix}.$$

Отже, відповідь:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{47} & \frac{16}{47} & -\frac{1}{47} \\ \frac{28}{47} & \frac{17}{47} & -\frac{4}{47} \\ -\frac{23}{47} & -\frac{19}{47} & \frac{10}{47} \end{pmatrix}.$$

Для перевірки потрібно перевірити виконання рівності $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -16 & 1 \\ -28 & -17 & 4 \\ 23 & 19 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -47 & 0 & 0 \\ 0 & -47 & 0 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -16 & 1 \\ -28 & -17 & 4 \\ 23 & 19 & -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -47 & 0 & 0 \\ 0 & -47 & 0 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Питання для самоконтролю:

1. Означення матриці. Види матриць.
2. Операції над матрицями.
3. Властивості операцій над матрицями.
4. Означення визначника 2-го порядку.
5. Означення визначника 3-го порядку.
6. Означення мінору та алгебраїчного доповнення.
7. Властивості визначників 2-го та 3-го порядків.

8. Означення визначників n -го порядку.
9. Транспоновані матриці.
10. Обернена матриця, умови існування, формула для обчислення оберненої матриці.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Знайти матрицю, транспоновану до даної

Варіант 1 $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$

Варіант 6 $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$

Варіант 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$

Варіант 7 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix},$

Варіант 3 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$

Варіант 8 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -4 & 10 & 4 \end{pmatrix},$

Варіант 4 $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$

Варіант 9 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix},$

Варіант 5 $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$

Варіант 10 $A = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Вправа 2. Обчислити добуток матриць $A \cdot B$:

Варіант 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -4 & 10 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$

Варіант 3 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 4 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Варіант 5 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Варіант 6 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Варіант 7 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 8 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Варіант 9 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 10 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Вправа 3. Обчислити визначники 2-го та 3-го порядків:

Варіант 1

1) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$

Варіант 2

1) $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

Варіант 3

1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

Варіант 4

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Варіант 5

1) $\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

Варіант 6

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 10 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

Варіант 7

1) $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$

Варіант 8

1) $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

Варіант 9

1) $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$

Варіант 10

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}.$$

$$2) \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Вправа 4. Обчислити матрицю, обернену до даної, якщо це можливо:

$$\text{Варіант 1)} A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Варіант 6)} A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Варіант 2)} A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Варіант 7)} A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Варіант 3)} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Варіант 8)} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Варіант 4)} A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Варіант 9)} A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Варіант 5)} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Варіант 10)} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тема 2. Системи лінійних рівнянь

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 1 п. 8-15.

Приклади розв'язання задач.

Вправа 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

- А) методом Крамера,
- Б) матричним способом,
- В) методом Гаусса.

Розв'язання:

А) Метод Крамера.

Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 27 - 3 + 6 + 6 = 41.$$

Оскільки визначник системи $\Delta \neq 0$, то задана система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -8 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 16 - 9 + 1 + 6 - 24 = -41;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 9 + 24 - 3 - 2 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 72 - 3 + 16 - 6 = 82;$$

Отже, за формулами Крамера будемо мати:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-41}{41} = -1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{41} = 0;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{82}{41} = 2.$$

Таким чином, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ – єдиний розв'язок системи.

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Б) Матричний метод.

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді система лінійних рівнянь запишеться у матричній формі: $A \cdot X = B$, і

матричним розв'язком системи буде $X = A^{-1} \cdot B$. Знайдемо матрицю A^{-1} (як ми це робили у вправі 4 Теми «Теорія матриць та визначників»):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 27 - 3 + 6 + 6 = 41 \neq 0.$$

Отже, обернена матриця A^{-1} існує, й можна знайти єдиний розв'язок системи. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів даної матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 + 9) = -11,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 - 2) = 5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 + 9) = -11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 - 2) = 5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7.$$

Союзна матриця має вигляд:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ -11 & -2 & 5 \\ 1 & -11 & 7 \end{pmatrix},$$

тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ -11 & -2 & 5 \\ 1 & -11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{41} & \frac{5}{41} & \frac{8}{41} \\ -\frac{11}{41} & -\frac{2}{41} & \frac{5}{41} \\ \frac{1}{41} & -\frac{11}{41} & \frac{7}{41} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок системи

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ -11 & -2 & 5 \\ 1 & -11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} -41 \\ 0 \\ 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язком системи буде $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$.

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$.

В) Метод Гаусса.

За системою запишемо матрицю коефіцієнтів і зведемо її до трикутного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -10 \\ 0 & 11 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 41 & 82 \end{array}\right),$$

а тепер за матрицею відновимо систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 7x_2 - 5x_3 = -10, \\ 41x_3 = 82, \end{cases}$$

звідки з третього рівняння системи знаходимо $x_3 = \frac{82}{41} = 2$,

тепер знайдене значення $x_3 = 2$ підставляємо в друге рівняння:

$$7x_2 - 5 \cdot 2 = -10,$$

$$7x_2 = 0,$$

$$x_2 = 0,$$

а тепер значення $x_3 = 2, x_2 = 0$ підставляємо в перше рівняння:

$$x_1 - 3 \cdot 0 + 2 = 1,$$

$$x_1 = -1.$$

Отримали $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$.

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$.

Питання для самоконтролю:

1. Означення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Однорідні та неоднорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Означення розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
3. Означення сумісності та несумісності СЛАР, поняття визначеної та невизначеної СЛАР.
4. Теорема Крамера про сумісність та розв'язок СЛАР.
5. Матричний спосіб розв'язання СЛАР.
6. Метод Гаусса розв'язання СЛАР.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Розв'язати системи:

А) методом Крамера,

Б) матричним способом,

В) методом Гаусса.

$$\text{Варіант 1)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 11, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\text{Варіант 2)} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -16. \end{cases}$$

$$\text{Варіант 3)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\text{Варіант 4)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$\text{Варіант 5)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\text{Варіант 6)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

$$\text{Варіант 7)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\text{Варіант 8)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\text{Варіант 9)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\text{Варіант 10)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Тема 3. Векторна алгебра

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 2 п. 4-11 або [2] Розділ 1, Глава 2 п. 1-8.

Приклади розв'язання задач.

Вправа 1. Дано вектори $\vec{a}(3; -1; 0)$, $\vec{b}(2; -3; 1)$, $\vec{c}(-1; 4; 2)$.

Знайти $2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot (\vec{a} + \vec{c})$.

Розв'язання.

$$2 \cdot \vec{b} = 2 \cdot (2; -3; 1) = (4; -6; 2);$$

$$\vec{a} + \vec{c} = (3; -1; 0) + (-1; 4; 2) = (2; 3; 2);$$

$$3 \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 3 \cdot (2; 3; 2) = (6; 9; 6);$$

$$2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = (4; -6; 2) - (6; 9; 6) = (-2; -15; -4).$$

Відповідь: $(-2; -15; -4)$.

Вправа 2. Дано вектор $\vec{a}(2; -1; 5)$. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

де $(a_x; a_y; a_z)$ координати вектора $\vec{a}$.

Розв'язання.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30}.$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{30}}, \cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{30}}, \cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

Вправа 3. Дано вектори $\vec{a}(5; -1; 2)$, $\vec{b}(2; -2; 3)$. Знайти $\vec{a}^2 - 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходиться за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z,$$

де $(a_x; a_y; a_z)$ – координати вектора $\vec{a}$ і $(b_x; b_y; b_z)$ – координати вектора $\vec{b}$.

Розв'язання.

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = 5^2 + (-1)^2 + 2^2 = 25 + 1 + 4 = 30.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 10 + 2 + 6 = 18.$$

$$4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 18 = 72.$$

$$\vec{a}^2 - 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 30 - 72 = -42.$$

Відповідь: -42 .

Вправа 4. Дано вектори $\vec{a}(1; -3; 2)$, $\vec{b}(4; -1; 5)$. Знайти векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

де $(a_x; a_y; a_z)$ – координати вектора $\vec{a}$, та $(b_x; b_y; b_z)$ – координати вектора $\vec{b}$.

Розв'язання.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -13 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 11 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-13; 3; 11).$$

Відповідь: $\vec{a} \times \vec{b} = (-13; 3; 11)$.

Вправа 5. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}(3; -1; 0)$, $\vec{b}(2; -3; 1)$, $\vec{c}(-1; 4; 2)$ за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

де $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$.

Розв'язання.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -18 + 0 + 1 - 0 - 12 + 4 = -25.$$

Відповідь: -25 .

Питання для самоконтролю:

1. Означення вектора.
2. Колінеарні вектори. Співнаправлені вектори, протилежно напрямлені вектори.
3. Рівні вектори. Нуль-вектор.
4. Координати вектора. Напрямні косинуси вектора.
5. Операції над векторами: додавання векторів, віднімання векторів, множення вектора на число.
6. Скалярний добуток векторів. Властивості скалярного добутку векторів. Умова перпендикулярності векторів.

7. Векторний добуток векторів. Властивості векторного добутку векторів. Умова колінеарності векторів.
8. Мішаний добуток векторів. Властивості мішаного добутку векторів. Умова компланарності векторів.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Знайти:

- 1) $3 \cdot \vec{a} - 4 \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.
- 2) Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{c}$.
- 3) $\vec{b}^2 + 3 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$.
- 4) $\vec{a} \times \vec{b}$.
- 5) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Варіанти:

Варіант 1) $\vec{a}(4; -2; 0)$, $\vec{b}(5; -3; 1)$, $\vec{c}(0; 4; 2)$.

Варіант 2) $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(6; -2; 1)$, $\vec{c}(-1; 5; 2)$.

Варіант 3) $\vec{a}(4; -1; 3)$, $\vec{b}(4; -3; 0)$, $\vec{c}(-1; 4; 3)$.

Варіант 4) $\vec{a}(3; 4; 1)$, $\vec{b}(1; -3; 1)$, $\vec{c}(4; 1; 2)$.

Варіант 5) $\vec{a}(5; -1; 2)$, $\vec{b}(4; -1; 2)$, $\vec{c}(-3; 0; 2)$.

Варіант 6) $\vec{a}(2; -3; 2)$, $\vec{b}(2; -5; 1)$, $\vec{c}(-1; 0; 2)$.

Варіант 7) $\vec{a}(2; -1; 0)$, $\vec{b}(1; -4; 1)$, $\vec{c}(-2; 5; 1)$.

Варіант 8) $\vec{a}(3; -4; 0)$, $\vec{b}(0; 3; 1)$, $\vec{c}(1; -4; 2)$.

Варіант 9) $\vec{a}(2; 5; 1)$, $\vec{b}(3; 1; -1)$, $\vec{c}(-2; 3; 1)$.

Варіант 10) $\vec{a}(3; 5; 1)$, $\vec{b}(2; 1; 1)$, $\vec{c}(1; 4; -2)$.

Тема 4. Лінії першого порядку

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 2 п. 16 -18.

Вправа 1. Прямую L задано точкою $M_0(-1; 2)$ і нормальним вектором $\vec{n}(2; 3)$.

Записати: 1) загальне рівняння прямої; 2) нормальне рівняння прямої; 3) відстань від початку координат до прямої.

Розв'язання.

1) загальне рівняння прямої має вигляд $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$.

Спочатку складаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}(A; B)$:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

$$2 \cdot (x - (-1)) + 3 \cdot (y - 2) = 0,$$

відкриваємо дужки і зводимо подібні доданки

$$2x + 2 + 3y - 6 = 0,$$

$$2x + 3y - 4 = 0 \text{ — загальне рівняння прямої.}$$

2) нормальне рівняння прямої.

$$\text{знаходимо нормувальний множник } \mu = \frac{-\text{sign } C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

множимо обидві частини загального рівняння на μ :

$$\frac{1}{\sqrt{13}} \cdot 2x + \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot 3y - \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot 4 = 0,$$

$$\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{4}{\sqrt{13}} = 0.$$

3) для того, щоб знайти відстань $\rho(M_0, L)$ від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої L потрібно підставити координати точки $M_0(x_0; y_0)$ замість x, y в нормальне рівняння прямої L , а потім взяти модуль отриманого значення. В нашому випадку точка M_0 — це початок координат $O(0; 0)$, отже маємо:

$$\rho(O, L) = \left| \frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{4}{\sqrt{13}} \right| = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

Вправа 2. Записати загальне рівняння прямої L , що проходить через дві задані точки $M_1(3; 1)$ та $M_2(-1; 4)$.

Розв'язання. Запишемо спочатку канонічне рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

отже:

$$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y-1}{4-1},$$

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{3}$$

$$3 \cdot (x-3) = -4 \cdot (y-1),$$

$$3x - 9 = -4y + 4,$$

$$3x + 4y - 13 = 0.$$

останнє рівняння є загальним рівнянням прямої.

Вправа 3. Записати загальне рівняння площини, що проходить через точку

$M_0(3; 2; -1)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{MN}$, де $M(-1; -2; 5)$, $N(4; 5; 2)$.

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярно заданому вектору $\vec{n}(A; B; C)$, має вигляд:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0.$$

В нашому випадку $\vec{n} = \overrightarrow{MN} = (4 - (-1); 5 - (-2); 2 - 5) = (5; 7; -3)$. Тоді будемо мати:

$$5 \cdot (x - 3) + 7 \cdot (y - 2) + (-3) \cdot (z - (-1)) = 0,$$

$$5x - 15 + 7y - 14 - 3z - 3 = 0,$$

$$5x + 7y - 3z - 32 = 0,$$

останнє рівняння є загальним рівнянням площини.

Вправа 4. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(-3; 1; 4)$, $M_2(2; -1; -3)$, $M_3(-2; 4; 3)$. Записати загальне рівняння площини.

Розв'язання. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

отже,

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 1 & z - 4 \\ 2 - (-3) & -1 - 1 & -3 - 4 \\ -2 - (-3) & 4 - 1 & 3 - 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x + 3 & y - 1 & z - 4 \\ 5 & -2 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x+3) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (y-1)(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z-4)(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$23(x+3) - 2(y-1) + 17(z-4) = 0,$$

$$23x + 69 - 2y + 2 + 17z - 68 = 0,$$

$$23x - 2y + 17z + 3 = 0,$$

останнє рівняння є загальним рівнянням площини.

Вправа 5. Знайти відстань від точки $M(-3; 1; 4)$ до площини $\alpha: 4x - 7y - 4z + 3 = 0$.

Розв'язання. Запишемо спочатку нормальне рівняння площини, для чого знайдемо нормувальний множник

$$\mu = \frac{-\text{sign } D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{-1}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + (-4)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{81}} = -\frac{1}{9},$$

множимо дане рівняння $4x - 7y - 4z + 3 = 0$ на μ :

$$-\frac{1}{9} \cdot 4x - \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 7y - \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 4z + \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 3 = 0,$$

$$-\frac{4}{9}x + \frac{7}{9}y + \frac{4}{9}z - \frac{1}{3} = 0.$$

Підставляємо координати точки $M(-3; 1; 4)$ замість x, y, z у нормальне рівняння площини, беремо модуль отриманого значення і знаходимо відстань від точки M до даної площини α ,

$$\rho(M, \alpha) = \left| -\frac{4}{9} \cdot (-3) + \frac{7}{9} \cdot 1 + \frac{4}{9} \cdot 4 - 1 \right| = \left| \frac{26}{9} \right| = 2\frac{8}{9}.$$

Вправа 6. Знайти кут між прямими

$$L_1: \quad \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-8}{4}$$

і

$$L_2: \quad \frac{x+6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{6}.$$

Розв'язання. Напрямний вектор першої прямої $\vec{q}_1 = (16; 21; 12)$, другої прямої $\vec{q}_2 = (3; 2; 6)$. Кут між прямими L_1 і L_2 є кутом між напрямними векторами $\vec{q}_1$ і $\vec{q}_2$, отже,

$$\begin{aligned} \cos \angle(L_1, L_2) &= \cos \angle(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{4 \cdot 3 + (-7) \cdot 2 + 4 \cdot 6}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \\ &= \frac{22}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{49}} = \frac{22}{9 \cdot 7} = \frac{22}{63}, \\ \angle(L_1, L_2) &= \arccos \frac{22}{63}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\arccos \frac{22}{63}$.

Питання для самоконтролю:

1. Пряма на площині. Загальне рівняння прямої.
2. Нормальне рівняння прямої.
3. Канонічне рівняння прямої на площині.
4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Відстань від точки до прямої.
5. Взаємне розташування прямих на площині.
6. Площина в просторі. Загальне рівняння площини.
7. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.
8. Нормальне рівняння площини.
9. Відстань від точки до площини.
10. Взаємне розташування площин.
11. Пряма у просторі.
12. Канонічне рівняння прямої в просторі.
13. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
14. Пряма, як перетин двох площин.
15. Кут між прямими в просторі.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Прямую L задано точкою M_0 і напрямним вектором $\vec{q}$.

Записати: 1) загальне рівняння прямої; 2) нормальне рівняння прямої; 3) відстань від початку координат до прямої:

Варіант 1

$$M_0(3; -2), \vec{q} = (-4; 3).$$

Варіант 2

$$M_0(1; -1), \vec{q} = (5; 2).$$

Варіант 3

$$M_0(3; -5), \vec{q} = (4; -3).$$

Варіант 4

$$M_0(2; -1), \vec{q} = (-6; 1).$$

Варіант 5

$$M_0(3; -4), \vec{q} = (-2; -2).$$

Варіант 6

$$M_0(0; -2), \vec{q} = (-4; 1).$$

Варіант 7

$$M_0(1; -3), \vec{q} = (-3; 3).$$

Варіант 8

$$M_0(2; -1), \vec{q} = (-4; 4).$$

Варіант 9

$$M_0(0; -1), \vec{q} = (4; -2).$$

Варіант 10

$$M_0(1; -2), \vec{q} = (-5; 3).$$

Вправа 2. Записати загальне рівняння площини, що проходить через точку

M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{MN}$:

Варіант 1

$$M_0(1; 2; -1), M(3; -2; 5), N(-4; 5; 2).$$

Варіант 2

$$M_0(4; -2; -1), M(0; -2; 5), N(4; -5; 2).$$

Варіант 3

$$M_0(5; 3; -1), M(2; -3; 1), N(-4; 3; -2).$$

Варіант 4

$$M_0(0; 2; 1), M(1; 2; 3), N(4; 3; 1).$$

Варіант 5

$$M_0(5; -2; 2), M(-1; 3; 2), N(1; 5; 2).$$

Варіант 6

$$M_0(1; 2; -3), M(-1; 2; 6), N(5; -5; -2).$$

Варіант 7

$$M_0(2; -2; -1), M(5; -2; 5), N(2; 5; 2).$$

Варіант 8

$$M_0(4; 4; -1), M(-1; -4; 3), N(4; -2; 2).$$

Варіант 9

$$M_0(5; -2; -3), M(3; -2; 1), N(-3; 5; -2).$$

Варіант 10

$$M_0(2; 2; -4), M(-5; -2; 3), N(4; -1; 2).$$

Вправа 3. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки M_1, M_2, M_3 . Записати загальне рівняння площини.

Варіант 1

$$M_1(-1; 2; 9), M_2(3; -1; 3), M_3(-5; 4; 1).$$

Варіант 2

$$M_1(3; 1; 2), M_2(5; -1; -3), M_3(1; 4; 3).$$

Варіант 3

$$M_1(5; 1; -4), M_2(3; 8; -1), M_3(-2; -4; -3).$$

Варіант 4

$$M_1(2; 1; 4), M_2(2; 1; 3), M_3(2; 1; 3).$$

Варіант 5

$$M_1(-9; 1; -4), M_2(4; -1; 3), M_3(0; 1; 3).$$

Варіант 6

$$M_1(0; 2; 1), M_2(-5; 0; -3), M_3(-1; -2; 3).$$

Варіант 7

$$M_1(2; -1; 4), M_2(3; 1; 2), M_3(2; -2; 6).$$

Варіант 8

$$M_1(5; 2; 3), M_2(1; -1; -2), M_3(-3; 5; 3).$$

Варіант 9

$$M_1(6; 1; 3), M_2(1; 0; -2), M_3(-4; 8; 3).$$

Варіант 10

$$M_1(-9; 2; 1), M_2(5; -1; -6), M_3(-3; 8; 3).$$

Вправа 4. Знайти відстань від точки M до площини α : $2x - y - 2z - 4 = 0$.

Варіант 1 $M(-1; 1; 0)$.

Варіант 2 $M(-2; 3; 1)$.

Варіант 3 $M(2; -1; 2)$.

Варіант 4 $M(4; -1; 3)$.

Варіант 5 $M(-1; 4; 0)$.

Варіант 6 $M(-6; 1; 3)$.

Варіант 7 $M(2; -2; 5)$.

Варіант 8 $M(1; 4; 3)$.

Варіант 9 $M(3; 2; -2)$.

Варіант 10 $M(3; -1; 5)$.

Вправа 5. Знайти кут між прямими L_1 і L_2 :

Варіант 1

$$L_1: \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-8}{-6}, L_2: \frac{x+2}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{2}.$$

Варіант 2

$$L_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{6}, L_2: \frac{x+1}{-4} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z+1}{4}.$$

Варіант 3

$$L_1: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{6}, L_2: \frac{x+1}{8} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{4}.$$

Варіант 4

$$L_1: \frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-8}{2}, L_2: \frac{x+2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{8}.$$

Варіант 5

$$L_1: \frac{x+2}{8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{4}, L_2: \frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-6}.$$

Варіант 6

$$L_1: \frac{x}{-4} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-7}{-4}, L_2: \frac{x+6}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}.$$

Варіант 7

$$L_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y+5}{-8} = \frac{z-5}{1}, L_2: \frac{x+7}{-3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+7}{6}.$$

Варіант 8

$$L_1: \frac{x+6}{1} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-7}{4}, L_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+5}{6}.$$

Варіант 9

$$L_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{8}, L_2: \frac{x+2}{7} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+1}{-4}.$$

Варіант 10

$$L_1: \frac{x-7}{6} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-8}{3}, L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{6}.$$

Тема 5. Лінії другого порядку

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 2 п. 19-20 або [2] Розділ 1, Глава п. §3.

Вправа 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика та мала піввісі дорівнюють, відповідно $a = 5$, $b = 2$.

Розв'язання. В рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

підставляємо значення $a = 5$, $b = 2$:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

це і є канонічне рівняння еліпса.

Вправа 2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо вісь $2a = 16$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

Розв'язання. В рівнянні гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

потрібно визначити a , b . З умови $a = 8$, далі

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \varepsilon = 8 \cdot \frac{5}{4} = 10,$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 64 = 36.$$

Отже, канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Вправа 3. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку $A(9; 6)$.

Розв'язання. В рівняння параболи

$$y^2 = 2px$$

підставимо координати точки $A(9; 6)$

$$6^2 = 2p \cdot 9 \Rightarrow 36 = 18p \Rightarrow p = 2.$$

Отже, рівняння параболи

$$y^2 = 4x.$$

Питання для самоконтролю:

1. Рівняння сфери.
2. Рівняння еліпсоїда. Властивості еліпсоїда.

3. Рівняння еліптичного параболоїда. Властивості еліптичного параболоїда.
4. Рівняння гіперболічного параболоїда. Властивості гіперболічного параболоїда.
5. Рівняння однопорожнинного гіперboloїда. Властивості однопорожнинного гіперboloїда.
6. Рівняння двопорожнинного гіперboloїда. Властивості двопорожнинного гіперboloїда.
7. Рівняння циліндра: кругового, еліптичного, гіперболічного, параболічного. Властивості циліндра.
8. Рівняння конуса, його властивості.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що:

- Варіант 1) велика вісь $2a = 10$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{4}{5}$.
- Варіант 2) мала вісь $2b = 30$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.
- Варіант 3) велика вісь $2a = 10$, відстань між фокусами $2c = 8$.
- Варіант 4) мала вісь $2b = 24$, відстань між фокусами $2c = 10$.
- Варіант 5) відстань між фокусами $2c = 6$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.
- Варіант 6) мала вісь $2b = 10$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.
- Варіант 7) велика вісь $2a = 30$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.
- Варіант 8) велика вісь $2b = 24$, відстань між фокусами $2c = 10$.
- Варіант 9) мала вісь $2a = 10$, відстань між фокусами $2c = 8$.
- Варіант 10) відстань між фокусами $2c = 8$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{4}{5}$.

Вправа 2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що:

- Варіант 1) вісі $2a = 16, 2b = 8$.
- Варіант 2) відстань між фокусами $2c = 10$, вісь $2b = 8$.
- Варіант 3) відстань між фокусами $2c = 6$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.
- Варіант 4) вісі $2a = 10, 2b = 18$.
- Варіант 5) відстань між фокусами $2c = 20$, вісь $2b = 16$.
- Варіант 6) відстань між фокусами $2c = 12$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.
- Варіант 7) відстань між фокусами $2c = 34$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{17}{8}$.
- Варіант 8) відстань між фокусами $2c = 26$, вісь $2b = 24$.
- Варіант 9) відстань між фокусами $2c = 26$, вісь $2b = 10$.
- Варіант 10) вісі $2a = 14, 2b = 12$.

Вправа 3. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку $A(x; y)$:

Варіант 1) $A(8; 2)$.

Варіант 6) $A(3; 6)$.

Варіант 2) $A(5; 15)$.

Варіант 7) $A(4; 6)$.

Варіант 3) $A(1; 8)$.

Варіант 8) $A(10; 5)$.

Варіант 4) $A(8; 2)$.

Варіант 9) $A(6; 12)$.

Варіант 5) $A(4; 6)$.

Варіант 10) $A(4; 2)$.

Тема 6. Поверхні другого порядку.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [2] Розділ 1, Глава 3 п. 5.

Вправа 1. Визначити вид поверхні:

$$x^2 + 2y^2 - 6z^2 = 0.$$

Розв'язання. Зведемо до канонічного вигляду:

$$x^2 + 2y^2 - 6z^2 = 0,$$

$$\frac{x^2 + 2y^2 - 6z^2}{6} = 0,$$

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 0,$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{6}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{3}^2} - \frac{z^2}{1^2} = 0.$$

Отримане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

отже, є канонічним рівнянням конуса.

Вправа 2. Визначити вид поверхні:

$$8x^2 - 4y^2 + 24z^2 - 48 = 0.$$

Розв'язання. Зведемо до канонічного вигляду:

$$8x^2 - 4y^2 + 24z^2 - 48 = 0,$$

$$8x^2 - 4y^2 + 24z^2 = 48,$$

$$\frac{8x^2 - 4y^2 + 24z^2}{48} = \frac{48}{48},$$

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{6}^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Отримане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

отже, є канонічним рівнянням однополосного гіперболоїду з центральною віссю Oy .

Вправа 3. Визначити вид поверхні:

$$8x^2 + 3y^2 - 48z = 0.$$

Розв'язання. Зведемо до канонічного вигляду:

$$8x^2 + 3y^2 - 48z = 0,$$

$$48z = 8x^2 + 3y^2,$$

$$z = \frac{8x^2 + 3y^2}{48},$$

$$z = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{16},$$

$$z = \frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{4^2}.$$

Отримане рівняння має вигляд:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

отже, є канонічним рівнянням еліптичного параболоїду.

Питання для самоконтролю:

1. Рівняння сфери.
2. Рівняння еліпсоїда. Властивості еліпсоїда.
3. Рівняння еліптичного параболоїда. Властивості еліптичного параболоїда.
4. Рівняння гіперболічного параболоїда. Властивості гіперболічного параболоїда.
5. Рівняння однопорожнинного гіперboloїда. Властивості однопорожнинного гіперboloїда.
6. Рівняння двопорожнинного гіперboloїда. Властивості двопорожнинного гіперboloїда.
7. Рівняння циліндра: кругового, еліптичного, гіперболічного, параболічного. Властивості циліндра.
8. Рівняння конуса, його властивості.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Визначити вид заданих поверхонь і схематично побудувати їх.

Варіант № 1

$$3x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 12 = 0.$$

Варіант № 2

$$3x^2 - 4y^2 + 24z = 0.$$

Варіант № 3

$$x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 1 = 0.$$

Варіант № 4

$$6x^2 - y^2 + 4z^2 = 0.$$

Варіант № 5

$$4x^2 - 12y^2 + 6z^2 = 12.$$

Варіант № 6

$$x^2 + 3y^2 - 9z = 0.$$

Варіант № 7

$$4x^2 + y^2 = 9.$$

Варіант № 8

$$x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 16 = 0.$$

Варіант № 9

$$10x^2 + 5y^2 - 2z^2 - 50 = 0.$$

Варіант № 10

$$4x^2 - 12y^2 - 6z^2 = 12.$$

Тема 7. Функції. Границя функції. Неперервність функції

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 3 п. 3 – 5, 7 або [2] Розділ 2, Глава 4 п. 1-4, Глава 5 п. 1-7.

Вправа 1. Знайти границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3(n^2-n)}{4n+n^5}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3(n^2-n)}{4n+n^5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5-2n^4}{4n+n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(2 - 2 \cdot \frac{1}{n} \right)}{n^5 \left(4 \cdot \frac{1}{n^4} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 2 \cdot \frac{1}{n}}{4 \cdot \frac{1}{n^4} + 1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Вправа 2. Знайти границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n-11} \right)^{-3n+1}$, використовуючи означення числа e , тобто границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n-11} \right)^{-3n+1} &= [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+5}{2n-11} - 1 \right)^{-3n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+5-2n+11}{2n-11} \right)^{-3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{16}{2n-11} \right)^{-3n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{16}{2n-11} \right)^{\frac{2n-11 \cdot 16 \cdot (-3n+1)}{16 \cdot (2n-11)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{16}{2n-11} \right)^{\frac{2n-11-48n+16}{16 \cdot (2n-11)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{16}{2n-11} \right)^{\frac{2n-11}{16}} \right)^{\frac{-48n+16}{2n-11}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{16}{2n-11} \right)^{\frac{2n-11}{16}} \right)^{\frac{n(-48+\frac{16}{n})}{n(2-\frac{11}{n})}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e)^{\frac{-48+\frac{16}{n}}{2-\frac{11}{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-48+\frac{16}{n}}{2-\frac{11}{n}}} = e^{\frac{-48}{2}} = e^{-24}. \end{aligned}$$

Вправа 3. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-4x+1}{2x^2-5x+3}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-4x+1}{2x^2-5x+3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\left(1-\frac{1}{3}\right)}{2\left(1-\frac{3}{2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{2}{1}}{-\frac{1}{1}} = -2. \end{aligned}$$

Тут ми використали формулу розкладання квадратного тричлена на множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Вправа 4. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3-7x+1}{2x^2-9x^3+3}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 9x^3 + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(4 - 7 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(2 \cdot \frac{1}{x} - 9 + 3 \cdot \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 7 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 \cdot \frac{1}{x} - 9 + 3 \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{4}{-9}.$$

Вправа 5. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - 1}{x \cdot \arcsin 2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - 1}{x \cdot \arcsin 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 3x}{x \cdot \arcsin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot 9x^2}{\frac{\arcsin 2x}{2x} \cdot 2x^2} = \frac{-2 \cdot 1^2 \cdot 9}{1 \cdot 2} = -9.$$

Тут ми скористалися першою чудовою границею $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Вправа 6. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1) \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1^2}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1-1}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0^2+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Вправа 7. Дослідити функцію на неперервність і вказати характер точок розриву.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } -\infty < x < 0, \\ 2 - x, & \text{якщо } 0 \leq x < 3, \\ 8 - x^2, & \text{якщо } 3 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Розв'язання.

Функція $f(x)$ є неперервною на $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$. В точках $x = 0$, $x = 3$ можливий розрив, тому досліджуємо ці точки:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 = 0,$$

$$f(0) = 2 - 0 = 2,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 - x) = 2,$$

отже, точка $x = 0$ є точкою розриву I роду.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} 2 - x = -1,$$

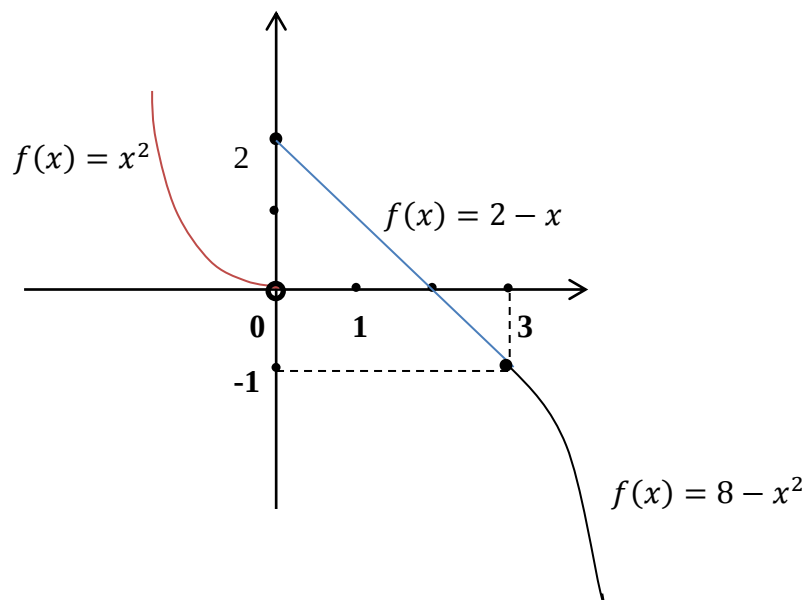
$$f(3) = 8 - 3^2 = -1,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (8 - x^2) = -1,$$

отже, точка $x = 3$ є точкою неперервності.

Таким чином, дана функція є неперервною на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Побудуємо графік даної функції.



Питання для самоконтролю:

1. Означення послідовності чисел. Монотонні послідовності. Обмежені послідовності.
2. Означення границі послідовності. Властивості границі послідовності.
3. Означення числа e .
4. Означення функції. Способи задання функції. Область визначення та область значень функції.
5. Основні елементарні функції, їхні властивості та графіки.
6. Границя функції, її властивості.
7. Дві чудові границі.
8. Неперервність функції в точці, в інтервалі, на відрізку. Точки розриву, їхня класифікація.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Обчислити границі послідовності

Варіант №1.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2(n-1)^2}{2n - n^5}.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-3}{5n+2} \right)^{-n}.$

Варіант №2.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - n^2 + 5n^3}{2n - n^3}.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-13}{n+2} \right)^{2n}.$

Варіант №3.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^3}{100n^3 - 3n^4 + 1}.$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n+3}{10n+2} \right)^{2n^3}$$

Вариант №4.

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^4}{(n+1)^4 - n^4}.$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+2} \right)^{5n^2-n}.$$

Вариант №5.

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2 - (n+5)^2}{2n - n^2}.$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-7}{n+2} \right)^{-5n}.$$

Вариант №6.

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100} + 2000}{(2n - n^{99})n}.$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n-1}{7n+2} \right)^{3n}.$$

Вариант №7.

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! - (2n+2)!}{(2n+3)!}.$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+2} \right)^n$$

Вариант №8.

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^3}{100n^3 - 3n^4 + 1}.$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+12}{4n+3} \right)^{5n-n^2}.$$

Вариант №9.

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2 - (n+5)^2}{2n - n^2}$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n-1}{7n+2} \right)^{5n-3}.$$

Вариант №10.

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^{n+2}}{5 - 3^n}.$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+2} \right)^{-20n+3}.$$

Вправа 2. Обчислити границі функцій

Варіант № 1.

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{x-1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}$;
4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x + 4}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x} - 1}$.

Варіант № 2

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x + 4} \right)^{1-2x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos 4x}$;
4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{1 - 4x} - 3}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{5x^3 + 3x^2 - 2x}$.

Варіант № 3

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 27}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (4 - 3x)^{\frac{x}{x-1}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3}$;
4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^2 + 3}{3x^2 + 1}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Варіант № 4

1) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{3x - 4} \right)^{2-x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3}$;
4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x^3 + 1}}{\arcsin(5x^3)}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2 \arcsin^2 2x}$.

Варіант № 5

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4x - 3} \right)^{4x+1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x^2 - 9}$;
4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{6x}$.

Варіант № 6

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{2x + 5} \right)^{1-3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 6x + 8}$;
4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{5x^2}$.

Варіант № 7

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3} ; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 7}{2x - 3} \right)^{4x+1} ; 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 4}{2x^2 - x + 1} ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 2x} ; 5) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x - 10}.$$

Варіант № 8

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - x - x^2}{3x^2 + 8x - 3} ; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{3x^3 + 4x + 2} ; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\arcsin 6x} ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 1}{4x - 1} \right)^{1-2x} ; 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}.$$

Варіант № 9

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 9x + 4} ; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x - 3x^2}{x^2 + x + 3} ; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \cdot \sin 3x} ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 2}{5x + 3} \right)^{3-2x} ; 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}.$$

Варіант № 10

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 11x + 6} ; 2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{2x - 1} - 3} ; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x} ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} (7 - 2x)^{\frac{2}{x-3}} ; 5) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{3}{8 - x^3} \right).$$

Вправа 3. Дослідити функцію на неперервність і вказати характер точок розриву.

Побудувати графік функції.

Варіант № 1

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{якщо } -\infty < x < 1, \\ 5 - x, & \text{якщо } 1 \leq x < 4, \\ -x^2, & \text{якщо } 4 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Варіант № 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } -\infty < x < -2, \\ 2 - x, & \text{якщо } -2 \leq x < 3, \\ 3 + 2x, & \text{якщо } 3 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Варіант № 3

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & \text{якщо } -\infty < x < 1, \\ 5 - x, & \text{якщо } 1 \leq x < 3, \\ 4 - x^2, & \text{якщо } 3 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Варіант № 4

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{якщо } -\infty < x < 2, \\ -x, & \text{якщо } 2 \leq x < 4, \\ 1 + x^2, & \text{якщо } 4 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Варіант № 5

$$f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2, & \text{якщо } -\infty < x < 1, \\ 5 - x, & \text{якщо } 1 \leq x < 4, \\ 1 + (x - 2)^2, & \text{якщо } 4 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Варіант № 6

$$f(x) = \begin{cases} (x - 2)^2, & \text{якщо } -\infty < x < 0, \\ 2x + 4, & \text{якщо } 0 \leq x < 4, \\ 10 - x^2, & \text{якщо } 4 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Варіант № 7

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{якщо } -\infty < x < 3, \\ 10 - 3x, & \text{якщо } 3 \leq x < 5, \\ 15 - x^2, & \text{якщо } 5 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Варіант № 8

$$f(x) = \begin{cases} 10 + x^2, & \text{якщо } -\infty < x < 0, \\ 5 + x, & \text{якщо } 0 \leq x < 3, \\ x^2 - 1, & \text{якщо } 3 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Варіант № 9

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x, & \text{якщо } -\infty < x < 1, \\ 5 - x, & \text{якщо } 1 \leq x < 4, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } 4 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Варіант № 10

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{якщо } -\infty < x < 2, \\ \frac{2}{x}, & \text{якщо } 2 \leq x < 4, \\ -x, & \text{якщо } 4 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Тема 8. Похідна функції. Дослідження функції за допомогою похідної.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 4 п. 1-6, 9-11 або [2] Розділ 3, Глава 6 п. 1-8, Глава 7 п. 1-5.

Вправа 1. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{10}{x} + x^2 - \ln x - 3$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{10}{x} + x^2 - \ln x - 3 \right)' = \left(10 \cdot \frac{1}{x} \right)' + (x^2)' - (\ln x)' - (3)' = 10 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + 2x - \frac{1}{x} = \\ &= -\frac{10}{x^2} + 2x - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Вправа 2. Знайти похідну функції $f(x) = x \cdot \cos x$.

Розв'язання.

$$f'(x) = (x \cdot \cos x)' = (x)' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)' = \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \cdot \sin x.$$

Вправа 3. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{1+2x^3}{2+x^4}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1+2x^3}{2+x^4} \right)' = \frac{(1+2x^3)' \cdot (2+x^4) - (1+2x^3) \cdot (2+x^4)'}{(2+x^4)^2} = \\ &= \frac{6x^2 \cdot (2+x^4) - (1+2x^3) \cdot 4x^3}{(2+x^4)^2} = \frac{12x^2 + 6x^6 - 4x^3 - 8x^6}{(2+x^4)^2} = \frac{12x^2 - 4x^3 - 2x^6}{(2+x^4)^2}. \end{aligned}$$

Вправа 4. Знайти похідну функції $f(x) = \sqrt{\sin x + x}$.

Розв'язання.

$$f'(x) = (\sqrt{\sin x + x})' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x + x}} \cdot (\sin x + x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x + x}} \cdot (\cos x + 1) = \frac{\cos x + 1}{2\sqrt{\sin x + x}}.$$

Питання для самоконтролю:

1. Означення похідної функції в точці.
2. Таблиця похідних.
3. Властивості похідних. Похідна складеної функції.
4. Дослідження функції на монотонність.
5. Дослідження функції на екстремум.
6. Дослідження функції на опуклість та точки перегину.
7. Асимптоти функції.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Знайти похідну функції $f(x)$.

Варіант 1.	Варіант 2.
1) $f(x) = \frac{3}{x} + x^5 + \ln x$.	1) $f(x) = 2^x + \frac{2}{x^2} + x^5 + 100$.

2) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$. 3) $f(x) = \frac{10-2x^3}{2+x^5}$. 4) $f(x) = e^{-x^2} + 10$.	2) $f(x) = x^2 \cdot e^x$. 3) $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + 1}$. 4) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.
Варіант 3. 1) $f(x) = e^x + \frac{2}{x^2} + x^3 + 100$. 2) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$. 3) $f(x) = \frac{\cos x + x}{\sin x + 1}$. 4) $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x + 1}$.	Варіант 4. 1) $f(x) = e^x + \operatorname{ctg} x$. 2) $f(x) = x^3 \cdot \ln x$. 3) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 + 1}$. 4) $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$.
Варіант 5. 1) $f(x) = 10e^x + \ln x$. 2) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$. 3) $f(x) = \frac{x^4 + 3x}{x^2 + 1}$. 4) $f(x) = \ln(x^2 + x)$.	Варіант 6. 1) $f(x) = \arccos x + \sqrt{x}$. 2) $f(x) = x^3 \cdot e^x$. 3) $f(x) = \frac{2+3x}{\sqrt{x}}$. 4) $f(x) = \ln \sin x$.
Варіант 7. 1) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}$. 2) $f(x) = x^3 \cdot \operatorname{arctg} x$. 3) $f(x) = \frac{x^6}{1+x^{12}}$. 4) $f(x) = \ln \arccos x$.	Варіант 8. 1) $f(x) = \frac{1}{x} + \arcsin x$. 2) $f(x) = x^3 \cdot e^x$. 3) $f(x) = \frac{x^4}{1+x^8}$. 4) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$.
Варіант 9. 1) $f(x) = \frac{2}{x^2} + x^2 + 100x$. 2) $f(x) = x^2 \cdot \arcsin x$. 3) $f(x) = \frac{1-2x^3}{5+x^2}$. 4) $f(x) = e^{-\cos x}$.	Варіант 10. 1) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 100x$. 2) $f(x) = x^2 \cdot 10^x$. 3) $f(x) = \frac{\arccos x}{x^2}$. 4) $f(x) = \operatorname{arctg} x^6$.

Тема 9. Невизначений інтеграл

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 6, п. 1 або [2] Розділ 4, Глава 8, п 1-9.

Таблиця невизначених інтегралів.

Кожна з наступних формул є вірною на кожному проміжку, що належить до області визначення підінтегральної функції:

$$1) \int 0 dx = C.$$

$$2) \int x^\alpha du = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ де } \alpha \neq -1.$$

Окремі випадки:

$$\text{а) } \int dx = x + C, \quad \text{б) } \int x du = \frac{x^2}{2} + C, \quad \text{в) } \int x^2 du = \frac{x^3}{3} + C,$$

$$\text{г) } \int \frac{1}{\sqrt{x}} du = 2\sqrt{x} + C, \quad \text{д) } \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

$$3) \int x^{-1} du = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$\text{Окремий випадок: } \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7) \int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8) \int \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

$$\text{Окремий випадок: } \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C, \quad (\text{при } a = 1).$$

$$10) \int \frac{du}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

Окремий випадок: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, (при $a=1$).

$$12) \int \frac{du}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0.$$

В цих формулах a - стала, x - незалежна змінна, C - довільна стала.

Методи інтегрування:

1 метод. Метод заміни змінної у невизначеному інтегралі:

$$\int f(x)dx = [x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt] = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

2 метод. Метод інтегрування частинами у невизначеному інтегралі:

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU.$$

За допомогою формули інтегрування частинами доводиться наступна рекурентна формула:

$$13) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \cdot \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}},$$

з якої при $n=2$ випливає:

$$14) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \arctg \frac{x}{a} + C.$$

Вправа 1. Знайти інтеграл $\int(\sqrt{x} + \cos x) dx$.

Розв'язання.

$$\int(\sqrt{x} + \cos x) dx = \int \sqrt{x} dx + \int \cos x dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \sin x + C = \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} + \sin x + C.$$

Вправа 2. Знайти інтеграл $\int(x - 2e^x) dx$.

Розв'язання.

$$\int(x - 2e^x) dx = \int x dx - 2 \int e^x dx = \frac{x^2}{2} - 2e^x + C.$$

Вправа 3. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx &= \int \left(\frac{x^{1/2}}{x^{1/4}} - 2 \frac{x^{2/3}}{x^{1/4}} + \frac{1}{x^{1/4}} \right) dx = \int (x^{1/4} - 2x^{5/12} + x^{-1/4}) dx = \\ &= \int x^{1/4} dx - 2 \int x^{5/12} dx + \int x^{-1/4} dx = \frac{4}{5} x^{5/4} - \frac{24}{17} x^{17/12} + \frac{4}{3} x^{3/4} + C. \end{aligned}$$

Вправа 4. Знайти інтеграл $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

Розв'язання. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C$.

Вправа 5. Знайти інтеграл $\int \sin(3x - 5) dx$.

Розв'язання.

$$\int \sin(3x - 5) dx = \frac{1}{3} (-\cos(3x - 5)) + C = -\frac{1}{3} \cos(3x - 5) + C.$$

Вправа 5. Знайти інтеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Вправа 6. Знайти інтеграл $\int \sqrt[5]{5x^3 + 1} \cdot x^2 dx$.

Розв'язання. Виконаємо заміну $t = \varphi(x) = 5x^3 + 1$, тоді $dt = t'(x) dx = (5x^3 + 1)' dx = 15x^2 dx$,

отже $x^2 dx = \frac{1}{15} dt$. Таким чином отримуємо

$$\begin{aligned} \int \sqrt[5]{5x^3 + 1} \cdot x^2 dx &= \int \sqrt[5]{t} \cdot \frac{1}{15} \cdot dt = \frac{1}{15} \int t^{\frac{1}{5}} dt = \frac{1}{15} \cdot \frac{t^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + C = \frac{1}{15} \cdot \frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \\ &= \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{6} \cdot t^{\frac{6}{5}} + C = \frac{1}{18} \sqrt[5]{t^6} + C = \frac{1}{18} t \cdot \sqrt[5]{t} + C = \left[\begin{array}{c} \text{повернемося до початкової} \\ \text{змінної } t = 5x^3 + 1 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{18} \cdot (5x^3 + 1) \cdot \sqrt[5]{5x^3 + 1} + C. \end{aligned}$$

Зауваження. На практиці зручно користуватися наступними формулами:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

За допомогою цих формул обчислюються інтеграли вигляду:

$$1) I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad 2) I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

$$3) I_3 = \int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}, \quad 4) I_4 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Вправа 7. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{3x^2 - 11x + 17}$.

Розв'язання. Для обчислення інтегралів 1-го і 2-го типів, що містять квадратний тричлен у знаменнику, спочатку виділяємо повний квадрат в знаменнику, а потім використовуємо одну з табличних формул:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3x^2 - 11x + 17} &= \int \frac{dx}{3\left(x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{17}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{x^2 - 2x \cdot \frac{11}{6} + \left(\frac{11}{6}\right)^2 - \frac{121}{36} + \frac{17}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{83}{36}} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{83}}{6}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{83}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{11}{6}}{\frac{\sqrt{83}}{6}} + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{83}} \operatorname{arctg} \frac{6x - 11}{\sqrt{83}} + C \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{83}} \operatorname{arctg} \frac{6x - 11}{\sqrt{83}} + C$.

Вправа 8. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 3x - x^2}}$.

Розв'язання. Це інтеграл 2-го типу. Знову виділяємо повний квадрат у квадратному тричлені, що стоїть під знаком кореня, а потім використовуємо одну з табличних формул:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{5 + 3x - x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{5 - (x^2 - 3x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - \left(x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right)}} = \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{29}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{29}}{2}} + C = \\ &= \arcsin \frac{2x - 3}{\sqrt{29}} + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\arcsin \frac{2x - 3}{\sqrt{29}} + C$.

Вправа 9. Знайти інтеграл $\int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5} dx$.

Розв'язання. Перед нами інтеграл 3-го типу. При обчисленні такого інтеграла спочатку потрібно знайти похідну квадратного тричлена, що стоїть у знаменнику:

$$(x^2 - 2x - 5)' = 2x - 2,$$

і за допомогою перетворень записати цю похідну в чисельнику:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+6)}{x^2-2x-5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)+8}{x^2-2x-5} dx = \left[\begin{array}{l} \text{ділимо почленно чисельник} \\ \text{на знаменник} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \left[\begin{array}{l} \text{в першому інтегралі в чисельнику} \\ \text{стоїть похідна знаменника,} \\ \text{а другий інтеграл є інтегралом 1-го типу:} \\ \text{виділяємо повний квадрат у знаменнику} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-5| + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2 - (\sqrt{6})^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-5| + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} - (x-1)}{\sqrt{6} + (x-1)} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} - x + 1}{\sqrt{6} + x - 1} \right| + C.\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{2} \ln |x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} - x + 1}{\sqrt{6} + x - 1} \right| + C.$

Вправа 10. Знайти інтеграл $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$.

Розв'язання. Це інтеграл 4-го типу. Тут знову знаходимо похідну виразу, що стоїть під коренем: $(x^2+4x+10)' = 2x+4$, а потім прагнемо записати отриману похідну у чисельнику:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx &= \frac{5}{2} \cdot \int \frac{2x+\frac{6}{5}}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \frac{5}{2} \cdot \int \frac{(2x+4)-\frac{14}{5}}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \left[\begin{array}{l} \text{ділимо почленно чисельник} \\ \text{на знаменник} \end{array} \right] = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx + \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{14}{5} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \left[\begin{array}{l} \text{до першого інтегралу застосовуємо} \\ \text{формулу} \\ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C, \\ \text{другий інтеграл є інтегралом 2-го типу:} \\ \text{виділяємо повний квадрат} \\ \text{в квадратному тричлені} \end{array} \right] = \\ &= \frac{5}{2} \cdot 2\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = \\ &= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln |x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}| + C = 5\sqrt{x^2+4x+10} - \\ &- 7 \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C.\end{aligned}$$

Відповідь: $5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C.$

Вправа 11. Знайти інтеграл $\int x^2 \sin x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{u(x)} \underbrace{\sin x dx}_{dv(x)} &= \left[\begin{array}{l} u(x) = x^2; \quad dv = \sin x dx \\ du = (x^2)' dx = 2x dx; \quad v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -x^2 \cos x - 2 \int x(-\cos x) dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{до останнього інтеграла знову} \\ \text{застосовуємо формулу інтегрування частинами} \\ u = x; \quad dv = \cos x dx \\ du = x' dx = dx; \quad v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right] = \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

Вправа 12. Знайти інтеграл $\int x \ln x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = x dx \\ du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx; \quad v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Вправа 13. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Приводимо неправильний раціональний дріб до правильного за допомогою ділення звичайним «стовпчиком»:

$$\begin{array}{r} \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} \left| \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x + 1} \right. \\ \hline x^3 - 3x^2 + 6x - 1 \\ \hline x^3 - 5x^2 + 6x \\ \hline 2x^2 - 1 \end{array}$$

Отже,

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = x + 1 + \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

Далі,

а) розкладаємо знаменник на множники

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3);$$

б) записуємо схему розкладання раціонального дробу

$$\frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3};$$

в) зводимо до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники:

$$2x^2 - 1 = A(x^2 - 5x + 6) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 - 2x).$$

г) складаємо систему рівнянь, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа, а саме:

$$\left. \begin{array}{l} x^2: \quad A + B + C = 2 \\ x^1: \quad 5A + 3B + 2C = 0 \\ x^0: \quad 6A = -1 \end{array} \right\}$$

д) розв'язуємо отриману систему, наприклад, за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 21, \quad \Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -34,$$

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = -\frac{7}{2}, \quad C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = \frac{17}{3}.$$

Очевидно, що систему можна розв'язати й іншими методами. Остаточного отримуємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx &= \int (x+1)dx - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} - \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{17}{3} \int \frac{dx}{x-3} = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{7}{2} \ln |x-2| + \frac{17}{3} \ln |x-3| + c. \end{aligned}$$

Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції лише в трьох випадках:

а) коли p - ціле число, покладаємо $x = t^r$, де r - спільний знаменник дробів m та n ;

б) коли $\frac{m+1}{n}$ - ціле число, покладаємо $a + bx^n = t^N$, де N знаменник дробу p ;

в) коли $\frac{m+1}{n} + p$ - ціле число, підстановкою $ax^{-n} + b = t^N$, где N - знаменник дробу p .

Вправа 14. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = \int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^{-2} dx$, отже

$m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$. Маємо перший випадок, коли $p = -2$ - ціле. Застосовуємо підстановку

$x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, отримуємо

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx &= \left[\begin{array}{l} x = t^6; \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{t^3}{(1+t^2)^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \left[\begin{array}{l} \text{поділемо чисельник} \\ \text{на знаменник} \end{array} \right] = \\ &= 6 \int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2 + 3}{(1+t^2)^2} \right) dt = 6 \int t^4 dt - 12 \int t^2 dt + 18 \int dt - 6 \int \frac{4t^2 + 4 - 4 + 3}{(1+t^2)^2} dt = \frac{6}{5} t^5 - 4t^3 + 18t - \\ &- 6 \int \frac{4(t^2 + 1) - 1}{(1+t^2)^2} dt = \left[\begin{array}{l} \text{під знаком інтегралу чисельник} \\ \text{почленно ділимо на знаменник} \end{array} \right] = \frac{6}{5} t^5 - 4t^3 + 18t - 24 \int \frac{dt}{1+t^2} + \\ &+ 6 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \left[\begin{array}{l} \text{до останнього інтеграла} \\ \text{застосовуємо рекуррентну} \\ \text{формулу 14), де } a = 1 \end{array} \right] = \frac{6}{5} t^5 - 4t^3 + 18t - 24 \cdot \arctgt + \\ &+ 6 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t^2 + 1} + \arctgt \right) + C = \frac{6}{5} t^5 - 4t^3 + 18t - 24 \arctgt + \frac{3t}{t^2 + 1} + 3 \cdot \arctgt + C = \\ &= \frac{6}{5} t^5 - 4t^3 + 18t - 21 \cdot \arctgt + \frac{3t}{t^2 + 1} + C = \left[\begin{array}{l} \text{Повертаємось до} \\ \text{початкової змінної} \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right] = \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - \\ &- 21 \cdot \arctg \sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - 21 \cdot \arctg \sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} + C$.

Вправа 15. Знайти інтеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Розв'язання. В цьому випадку $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x \left(1 + x^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} dx$, звідки $m = 1$; $n = \frac{2}{3}$; $p = -\frac{1}{2}$;

знаходимо, що $\frac{m+1}{n} = 3$ - ціле число, отже маємо 2-й випадок. Покладемо $1 + x^{\frac{2}{3}} = t^2$. Тоді

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \left[\begin{aligned} 1+x^{\frac{3}{2}}=t^2 &\Rightarrow x^{\frac{3}{2}}=t^2-1 \Rightarrow x=(t^2-1)^{\frac{2}{3}} \\ dx &= \left((t^2-1)^{\frac{2}{3}} \right)' dt = \frac{3}{2}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2tdt = 3t(t^2-1)^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned} \right] = \int \frac{(t^2-1)^{\frac{3}{2}} \cdot 3t(t^2-1)^{-\frac{1}{2}} dt}{\sqrt{t^2}} =$$

$$= 3 \int (t^2-1) dt = 3 \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt = 3 \left(\frac{t^5}{5} - 2 \frac{t^3}{3} + t \right) + C = \frac{3t^5}{5} - 2t^3 + 3t + C = \left[\begin{aligned} t^2 &= 1+x^{\frac{3}{2}} \\ t &= \sqrt{1+\sqrt[3]{x^3}} \end{aligned} \right] =$$

$$= \frac{3(1+\sqrt[3]{x^3})^{\frac{5}{2}}}{5} - 2(1+\sqrt[3]{x^3})^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^3}} + C.$$

Відповідь: $\frac{3(1+\sqrt[3]{x^3})^{\frac{5}{2}}}{5} - 2(1+\sqrt[3]{x^3})^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^3}} + C.$

Вправа 16. Знайти інтеграл $\int \sqrt[3]{3x-x^3} dx.$

Розв'язання. Тут $m = \frac{1}{3}$; $n = 2$; $p = \frac{1}{3}$ и $\frac{m+1}{n} + p = 1$ – ціле. Покладаємо $3x^{-2} + 1 = t^2$.

Тоді

$$I = \int \sqrt[3]{3x-x^3} dx = -\frac{9}{2} \int \frac{t^3 dt}{(t^3+1)^2} = \frac{3}{2} \int t d\left(\frac{1}{t^3+1}\right) = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^3+1}.$$

Оскільки

$$\int \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}},$$

то остаточно маємо

$$I = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, \text{ где } t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}.$$

Відповідь: $I = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, \text{ де } t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}.$

Питання для самоконтролю:

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Означення первісної. Властивості первісної.
2. Означення невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтегралу.
3. Таблиця інтегралів.
4. Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами.
5. Інтегрування раціональних виразів.
6. Інтегрування тригонометричних виразів.
7. Інтегрування ірраціональних виразів.

Вправа 1. Обчислити інтеграли і отримані відповіді перевірити диференціюванням.

Варіант 1 $\int (x + \sqrt{x}) dx.$	Варіант 6 $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx.$
Варіант 2 $\int 2^x \cdot 5^{2x} dx.$	Варіант 7 $\int \left(\frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x} \right) dx.$
Варіант 3 $\int \frac{dx}{5x+4}.$	Варіант 8 $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
Варіант 4 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10}}.$	Варіант 9 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-5}}.$
Варіант 5 $\int \frac{dx}{9x^2+4}.$	Варіант 10 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

Вправа 2. Обчислити інтеграли і отримані відповіді перевірити диференціюванням:

Варіант 1 $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}}.$	Варіант 6 $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}.$
Варіант 2 $\int \operatorname{tg} x dx.$	Варіант 7 $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1} dx.$
Варіант 3 $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}.$	Варіант 8 $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}.$
Варіант 4 $\int \frac{x^3 dx}{x^4+a^4}.$	Варіант 9 $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}.$
Варіант 5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{b^2x^2+a^2}}.$	Варіант 10 $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Вправа 3. Знайти інтеграл

Варіант 1 $\int \ln x dx.$	Варіант 6 $\int x^2 \ln x dx.$
Варіант 2 $\int (x+1) \sin x dx.$	Варіант 7 $\int x \cos 3x dx.$
Варіант 3 $\int \arcsin x dx.$	Варіант 8 $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx.$
Варіант 4 $\int (x+5)e^x dx.$	Варіант 9 $\int x \ln(x-1) dx.$
Варіант 5 $\int e^x \cos x dx.$	Варіант 10 $\int x \cdot 5^x dx.$

Вправа 4. Знайти інтеграли:

Варіант 1 $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^2(x+4)^2}.$	Варіант 6 $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3}.$
Варіант 2 $\int \frac{x^2}{1-x^4} dx.$	Варіант 7 $\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}.$
Варіант 3 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$	Варіант 8 $\int \frac{x^5 dx}{x^3-1}.$
Варіант 4 $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}.$	Варіант 9 $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+x} dx.$
Варіант 5 $\int \frac{(x^3-2x^2+4)dx}{x^3(x-2)^2}.$	Варіант 10 $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} dx.$

Вправа 5. Знайти інтеграли:

Варіант 1 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}.$	Варіант 6 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx.$
Варіант 2 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{(x-2)}{x}} dx.$	Варіант 7 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$
Варіант 3 $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx.$	Варіант 8 $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$
Варіант 4 $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$	Варіант 9 $\int x\sqrt{3-x}dx.$
Варіант 5 $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}.$	Варіант 10 $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$

Тема 10. Визначений інтеграл та його застосування

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 6, п. 2 або [2] Розділ 4, Глава 9, п. 1-7.

Вправа 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx = \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x^3} \right) \Big|_1^4 = \left(2\sqrt{4} + \frac{3}{2}\sqrt{4^3} \right) - \left(2\sqrt{1} + \frac{3}{2}\sqrt{1^3} \right) = \\ &= (4 + 12) - \left(2 + \frac{3}{2} \right) = 16 - 3\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Вправа 2. Обчислити площу фігури Φ , що обмежена параболою $y = -x^2 + 6x - 7$ та прямою $y = x - 3$ (рис.1).

Розв'язання. Використаємо формулу $S_{\Phi} = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

Побудуємо пряму $y = x - 3$. При $x = 3$ маємо $y = 0$, при $x = 0$ буде $y = -3$.

Отже, точки $(3; 0)$ та $(0; -3)$ - це точки перетину даної прямої з координатними осями.

Тепер знайдемо координати вершини параболу $y = 6x - x^2 - 7$. Для цього перепишемо у стандартному вигляді $y = -x^2 + 6x - 7$, а потім за формулами

$$x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a}, \quad y_{\text{верш}} = y(x_{\text{верш}})$$

знаходимо $x_{\text{верш}} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$, $y_{\text{верш}} = y(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 7 = 2$. Отже, вершина параболу

знаходиться в точці $(3; 2)$, а її вітки напрямлені вниз, оскільки старший коефіцієнт від'ємний.

Далі знайдемо абсциси точок перетину даних кривих: з рівняння $x - 3 = 6x - x^2 - 7$, або $x^2 - 5x + 4 = 0$ знаходимо $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ (рис.1).

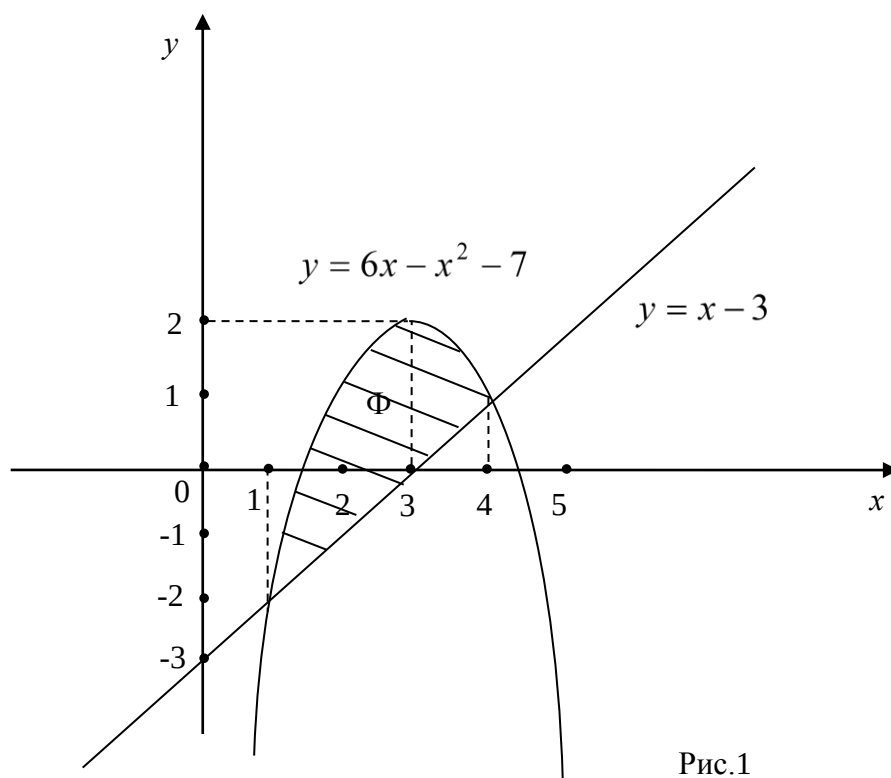


Рис.1

Знаходимо площу фігури:

$$S_{\Phi} = \int_1^4 ((6x - x^2 - 7) - (x - 3)) dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x \right) \Big|_1^4 =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot (4^2 - 1^2) - \frac{1}{3} \cdot (4^3 - 1^3) - 4 \cdot (4 - 1) = \frac{5}{2} \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot 63 - 4 \cdot 3 = 4\frac{1}{2} = 4,5 \quad (\text{кв.од.})$$

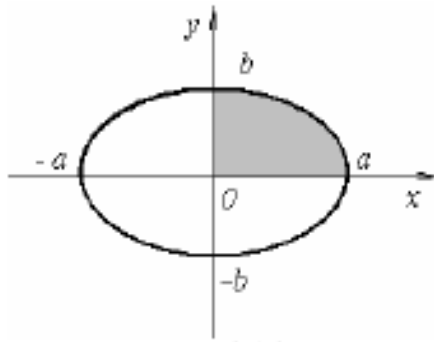
Відповідь: 4,5 кв.од.

Задача 2. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Розв'язання. Еліпс – фігура, симетрична відносно Ox і Oy . Тому достатньо обчислити лише площу фігури, розташованої в I чверті, враховуючи, що при цьому t змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до 0. Позначимо площу зафарбованої частини, обмеженої еліпсом в I чверті, через S_1 , й знайдемо її за відповідною формулою:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt$$



$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t \cdot (a \cos t)' dt = -ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t \, dt = -\frac{1}{2} ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos 2t) \, dt = \\
 &= -\frac{1}{2} ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \left[\begin{array}{l} \text{верхня підстановка} \\ \text{перетворює на нуль} \\ \text{вираз, що стоїть у дужках} \end{array} \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} ab \left(0 - \left(\frac{\pi}{2} - \sin \frac{2\pi}{2} \right) \right) = -\frac{1}{2} ab \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi ab}{4} \text{ (кв.од)}.
 \end{aligned}$$

Тепер знайдемо площу всієї фігури

$$S = 4 \cdot S_1 = 4 \cdot \frac{\pi ab}{4} = \pi ab \text{ (кв. од)}.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $a = b = R$, еліпс перетворюється на коло, й отже, площа в цьому випадку буде збігатися з, відомою зі шкільного курсу математики, площею круга $S = \pi \cdot R^2$.

Відповідь: площа фігури, обмеженої еліпсом, дорівнює πab кв.од.

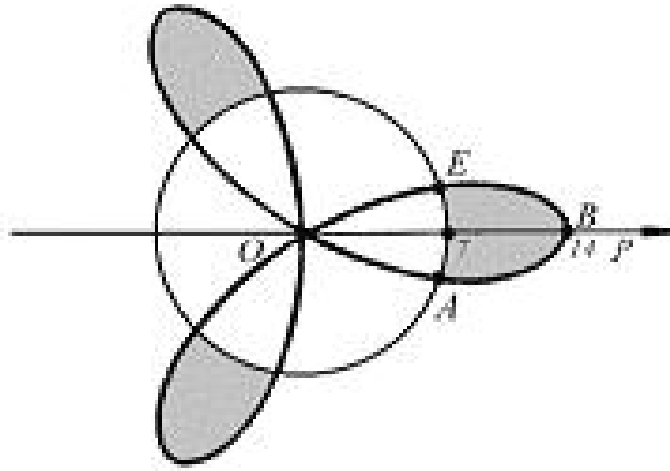
Задача 3.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $\rho = 7$ та $\rho = 14 \cos 3\varphi$, $\rho \geq 7$.

Розв'язання. Використаємо формулу для площі в полярній системі координат:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$$

Перше з рівнянь $\rho = 7$ визначає коло з центром у полюсі та радіусом $R = 7$. Друге рівняння $\rho = 14 \cos 3\varphi$ задає трипелюсткову „троянду”. Умова $\rho \geq 7$ означає, що нас буде цікавити лише та частина площини, яка знаходиться поза колом радіусом $R = 7$. Отримана фігура має вигляд



Знайдена фігура, площу S якої необхідно знайти, складається з трьох рівновеликих частин. Знайдемо площу S_1 однієї з цих частин, наприклад, ABE . Шукаємо значення φ , які відповідають точкам перетину кривих $\rho = 7$ та $\rho = 14 \cos 3\varphi$, з системи

$$\begin{cases} \rho = 7; \\ \rho = 14 \cos 3\varphi; \end{cases} \Rightarrow 7 = 14 \cos 3\varphi \Rightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\varphi = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3\varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Значення φ для точок A та E знаходимо, покладаючи $n = 0$:

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{9}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{9},$$

тобто, φ змінюється у проміжку $\left[-\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right]$. Застосуємо формулу (8) для обчислення площі

S_1 частини ABE , яка обмежена графіками функцій $\rho = 7$ та $\rho = 14 \cos 3\varphi$ й $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right]$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} [(14 \cos 3\varphi)^2 - 7^2] d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} [196 \cos^2 3\varphi - 49] d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 196 \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \cos^2 3\varphi d\varphi - \frac{1}{2} \cdot 49 \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} d\varphi = 98 \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{2} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi - \frac{49}{2} \cdot \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} = \end{aligned}$$

$$= 49 \left(\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} - \frac{49}{2} \left(\frac{\pi}{9} - \left(-\frac{\pi}{9} \right) \right) = 49 \left(\frac{\pi}{9} - \left(-\frac{\pi}{9} \right) \right) + \frac{49}{6} \left(\sin \frac{6\pi}{9} - \sin \left(-\frac{6\pi}{9} \right) \right) - \frac{49}{2} \cdot \frac{2\pi}{9} = 49 \cdot \frac{2\pi}{9} + \frac{49}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) - \frac{49\pi}{9} = \frac{49\sqrt{3}}{6} + \frac{49\pi}{9} \quad (\text{кв. од.}).$$

Площа всієї фігури буде дорівнювати:

$$S = 3 \cdot S_1 = 3 \cdot \left(\frac{49\sqrt{3}}{6} + \frac{49\pi}{9} \right) = \frac{49\sqrt{3}}{2} + \frac{49\pi}{3} \quad (\text{кв. од.})$$

Відповідь: $\frac{49\sqrt{3}}{2} + \frac{49\pi}{3}$ кв. од.

Питання для самоконтролю:

1. Означення визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла.
2. Формула Ньютона- Лейбніца.
3. Формули для обчислення площі фігури, заданої в декартовій системі координат, в полярній системі координат, параметрично.
4. Формули для обчислення довжини дуги кривої, заданої в декартовій системі координат, в полярній системі координат, параметрично.
5. Формули для обчислення об'єму тіла обертання.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Обчислити визначений інтеграл

Варіант 1	
1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dx.$	2. $\int_1^4 \left(\frac{4}{x^2} + 2x \right) dx.$
Варіант 2	
1. $\int_0^{\ln 2} x e^{-2x} dx.$	2. $\int_1^4 (4\sqrt{x} + 3x^2) dx.$
Варіант 3	
1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$	2. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx.$
Варіант 4	
1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx.$	2. $\int_{-1}^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}} dx.$
Варіант 5	

1. $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx.$	2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos 3x dx .$
Варіант 6	
1. $\int_1^2 x \cdot \log_2 x dx ;$	2. $\int_1^2 \left(3x^2 - \frac{2}{x^2}\right) dx .$
Варіант 7	
1. $\int_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{3} dx ;$	2. $\int_{-1}^{-3} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx .$
Варіант 8	
1. $\int_0^1 x \cdot 2^{\frac{x}{2}} dx ;$	2. $\int_1^4 (4x^3 - 3\sqrt{x}) dx .$
Варіант 9	
1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x dx ;$	2. $\int_0^1 (4x^3 - 2x + 1) dx .$
Варіант 10	
1. $\int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1+\ln x)^2} dx ;$	2. $\int_1^8 \frac{1+2\sqrt{x}}{x^3} dx .$

Література:

1. Вища математика: підручник/ Домбровський В. А. та ін.; за редакцією М. І. Шинкарика. Тернопіль: Вид. Кап'юка, 2003. 480 с.
2. Стрелковська І. В. Лінійна алгебра: навч. посіб. Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2006. 179 с.
3. Паскаленко В. М., Стрелковська І. Векторна алгебра: метод. посібн. Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2004. 42 с.
4. Паскаленко В. М., Стрелковська І. Визначений інтеграл: навч. посіб. Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2009. 84 с.
5. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: підручник. Київ: Знання, 2007. 454 с.
6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів: навч. посіб. Київ : Знання, 2008. 517 с.
7. Клепко В., Голець В. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. Київ: Центр навчальної літератури, 2019. 594 с.

Навчальне видання
Волкова Марія Георгіївна
Тарасенко Ірина Вікторівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I

Лінійна алгебра

Аналітична геометрія

Математичний аналіз

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи
студентів спеціальностей

281 Публічне управління та адміністрування,
051 Економіка, 073 Менеджмент, 075 Маркетинг

ДУІТЗ
65023, Одеса, вул.. Кузнечна, 1
Обсяг 2,0 д.а., електр.версія