

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку

Факультет електроніки, автоматизації та метрології

Кафедра вищої математики

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Частина 1

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи
студентів усіх технічних спеціальностей

Одеса – 2023

Рецензент: доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» Урум Г. Д.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. Частина 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку: Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів усіх технічних спеціальностей / Укладачі:

М. Г. Волкова, О. І. Третьяк, О. Б. Козін. Одеса: ДУІТЗ, 2023. 81с.

Запропоновані методичні вказівки призначено для студентів усіх технічних спеціальностей і містять теми, що розглядаються під час вивчення курсу «Вища математика».

Ухвалено на засіданні кафедри вищої математики і рекомендовано до друку.

Протокол № 6 від 27 січня 2023 р.

Затверджено методичною радою ДУІТЗ.

Протокол № 2 від 08.02.2023 р.

© Волкова М. Г., Третьяк О. І, Козін О. Б. 2023

© ДУІТЗ, 2023

ЗМІСТ

Вступ	4
Тема 1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ	4
1.1. Основні означення.....	4
1.2. Приклади задач, що призводять до диференціальних рівнянь.....	7
1.3. Метод послідовних наближень.....	11
Тема 2. РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ, ЩО РОЗДІЛЯЮТЬСЯ	14
2.1. Рівняння зі змінними, що розділяються.....	14
2.2. Особливі розв'язки рівняння зі змінними, що розділяються.....	15
2.3. Рівняння, що приводиться до рівняння зі змінними, що розділяються.....	22
Тема 3. ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ	24
3.1. Однорідне рівняння.....	24
3.2. Найпростіше рівняння, яке зводиться до однорідного.....	28
3.3. Узагальнено-однорідне рівняння.....	31
Тема 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	34
4.1. Лінійне рівняння першого порядку.....	34
4.2. Рівняння Бернуллі.....	43
4.3. Рівняння Ріккаті.....	46
Тема 5. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ	52
5.1. Рівняння в повних диференціалах.....	52
5.2. Інтегровальний множник.....	55
Тема 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ	65
6.1. Метод алгебри.....	65
6.2. Метод введення параметра.....	70
Література	81

Вступ

В першій частині методичних вказівок розглядаються основні означення та теореми теорії звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, а також задачі, що призводять до диференціальних рівнянь. В роботі наводиться класифікація і методи розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку та приклади розв'язання задач. Кожна тема має свою нумерацію формул і містить задачі для самостійного розв'язування із наданням відповідей.

Тема 1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ

1.1. Основні означення

Диференціальним рівнянням називається співвідношення, що пов'язує незалежну змінну, невідому функцію і її похідні (або її диференціали).

У разі, коли невідома функція, що входить в диференціальне рівняння, залежить тільки від однієї незалежної змінної, диференціальне рівняння називається *звичайним*.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), що входить у рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння порядку n в найзагальнішому випадку містить незалежну змінну, невідому функцію і її похідні або диференціали до порядку n включно і має вигляд

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

У цьому рівнянні x - незалежна змінна, y - невідома функція, а y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ - похідні невідомої функції.

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0, \quad (1.2)$$

а якщо його можна розв'язати щодо похідної, то воно запишеться так:

$$y' = F(x, y). \quad (1.3)$$

Задача полягає у визначенні з диференціального рівняння невідомої функції, а процес визначення цієї функції називається розв'язанням, або інтегруванням диференціального рівняння.

Розв'язком, або інтегралом рівняння (1.3) називається будь-яка диференційована функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє це рівняння, тобто така, після підстановки якої в рівняння (3), воно перетворюється на тотожність, а саме

$$\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$$

є тотожністю відносно x .

Крива $y = \varphi(x)$, що визначається розв'язком рівняння (1.2) або (1.3), називається *інтегральною кривою* диференціального рівняння.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.2) або (1.3) називаються співвідношення виду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \text{ або } \Phi(x, y) = C, \quad (1.4)$$

що включають одну довільну постійну величину і мають таку властивість, що, розв'язуючи їх відносно y за будь-яких частинних значеннях довільної постійної, одержуємо функції виду $y = \varphi(x)$, що є розв'язками рівняння (1.2) або (1.3).

Рівняння (1.4) визначають *сім'ю інтегральних кривих* рівняння (1.2).

Частинним розв'язком диференціального рівняння (1.2) називається такий розв'язок, що отримується із загального розв'язку (1.4) за деякого частинного значення довільної постійної. Довільна постійна C , що входить в (1.4), визначається з так званих початкових умов.

Задача з початковими умовами ставиться так: знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1.2) такий, щоб він набував заданого значення y_0 за заданого значення незалежної змінної $x = x_0$, тобто щоб виконувалася рівність

$$y_0 = \varphi(x_0).$$

З точки зору геометрії задача з початковими умовами зводиться до того, щоб з сім'ї інтегральних кривих (1.4) виділити ту, яка проходить через точку (x_0, y_0) площини.

Задача Коші. Задача знаходження розв'язку рівняння (1.2), що задовольняє початкові умови

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

називається *задачею Коші*.

Особливий розв'язок. Розв'язок диференціального рівняння, який не може бути одержаним із загального розв'язку за жодного частинного значення довільної постійної, включаючи $\pm\infty$, називається його особливим розв'язком.

Теорема існування й єдиності розв'язку задачі Коші. Нехай дано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ визначена в деякій

області D площини xOy , що містить точку (x_0, y_0) . Якщо функція $f(x, y)$ задовольняє умовам:

а) $f(x, y)$ є неперервна функція двох змінних x і y в області D ;

б) $f(x, y)$ має частинну похідну $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, обмежену в області D ,

то знайдеться інтервал $(x_0 - h; x_0 + h)$, на якому існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ заданого рівняння, що задовольняє умові $y(x_0) = y_0$.

Теорема дає достатні умови існування єдиного **розв'язку** задачі Коші для рівняння $y' = f(x, y)$, але ці умови не є необхідними. А саме, може існувати єдиний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє умові $y(x_0) = y_0$, хоча в точці $(x_0; y_0)$ не виконуються умови а) або б) або обидві разом.

Зауваження. Умова обмеженості похідної $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, що фігурує в теоремі існування й єдиності розв'язку задачі Коші, може бути трохи послаблена й замінена так званою умовою *Ліпшица*.

Говорять, що функція $f(x, y)$, означена в деякій області D , задовольняє в D умові *Ліпшица* по y , якщо існує така постійна L (постійна *Ліпшица*), що для будь-яких y_1, y_2 з D і кожного x з D справедливо нерівність

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|.$$

Існування в області D обмеженої похідної $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ достатньо для того, щоб функція $f(x, y)$ задовольняла в D умові *Ліпшица*. Навпаки, з умови *Ліпшица* не випливає умова обмеженості похідної $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$; ця похідна може навіть не існувати. Наприклад, для рівняння $y' = 2|y|\cos x$ функція $f(x, y) = 2|y|\cos x$ не диференційована по y в точці $(x_0; 0)$, $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, але умова *Ліпшица* в околі цієї точки виконується. Дійсно,

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |2|y_2|\cos x - 2|y_1|\cos x| =$$

$$= 2|\cos x|||y_2| - |y_1|| \leq 2|y_2 - y_1|,$$

оскільки $|\cos x| \leq 1$, а $\|y_2 - y_1\| \leq |y_2 - y_1|$. Таким чином, умова Ліпшица виконується з постійної $L = 2$.

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна й задовольняє умові Ліпшица по y в області D , то задача Коші

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y|_{x=x_0} = y_0, \quad (x_0, y_0) \in D,$$

має єдиний розв'язок.

Зауваження. Умова Ліпшица є істотною для єдиності розв'язку задачі Коші. Це означає, що при невиконанні умови Ліпшица може існувати багато, і навіть нескінченна множина, розв'язків.

1.2. Приклади задач, що призводять до диференціальних рівнянь

Приклад 1. Швидкість розпаду радію пропорційна його наявній кількості. Знайти закон, який виражає зміну кількості радію протягом часу t , коли відомо, що через 1600 років залишиться половина початкової кількості радію.

Розв'язання. Позначимо через x кількість радію в даний момент часу t (t відраховується в роках). Отже, для розв'язання даної задачі потрібно знайти залежність між x і t , тобто виразити x як функцію від t , $x = x(t)$. Згідно з умовою задачі, швидкість розпаду $\frac{dx}{dt}$ прямо пропорційна наявній кількості радію. Тому

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t), \quad (1.5)$$

де k - коефіцієнт пропорційності

Отже, маємо диференціальне рівняння першого порядку. Розв'яжемо це рівняння. Для цього запишемо його у вигляді

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = k dt,$$

або

$$d(\ln x(t)) = d(kt).$$

Якщо диференціали функцій дорівнюють один одному, то самі функції відрізняються на сталу величину. Позначимо її через $\ln C$. Тоді

$$\ln x(t) = kt + \ln C,$$

або

$$x(t) = Ce^{kt}. \quad (1.6)$$

Формула (1.6) виражає залежність величини кількості радію від часу t . Проте в цю формулу входить стала інтегрування C . Щоб її визначити, скористаємося умовою задачі. Нехай у початковий момент часу $t=0$ кількість радію дорівнює x_0 , тобто

$$x(0) = x_0.$$

Підставивши в рівність (1.6) значення $t=0$ і $x(0) = x_0$, знайдемо

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

Коефіцієнт пропорційності k визначимо з умови, що при $t=1600$

$$\frac{x(t)}{x_0} = \frac{1}{2},$$

тобто

$$e^{1600k} = \frac{1}{2}, \text{ або } 1600k = \ln \frac{1}{2},$$

звідки

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{1600}.$$

Остаточно маємо

$$x(t) = x_0 e^{\frac{t}{1600} \ln \frac{1}{2}},$$

або

$$x(t) = x_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{1600}}.$$

Задачу розв'язано.

Приклад 2. Нехай вода витікає через отвір у дні циліндричної посудини (рис. 1.1). Знайти закон зниження рівня води в посудині протягом часу, коли відомо, що швидкість v витікання води з посудини залежить від висоти h рідини, що міститься над отвором, таким чином

$$v = 0,6\sqrt{2gh},$$

де g - прискорення вільного падіння.

Розв'язання. Введемо позначення: H - висота циліндричної посудини, S - площа її основи, h - висота стовпчика рідини над отвором у момент часу t , s - площа отвору. Розглянемо проміжок часу Δt , протягом якого вода виливається через отвір. За час Δt рівень води в посудині знизиться з висоти h до висоти $h + \Delta h$ ($\Delta h < 0$). За цей час з посудини витече об'єм рідини — $S\Delta h$. Таким самим буде об'єм потоку води, що витікає за цей самий час з отвору. Він дорівнює добутку sl , де l - довжина шляху, що проходить частинка рідини за час Δt . Позначимо через v_c середню швидкість, з якою рухається частинка рідини, проходячи через отвір. Тоді

$$l = v_c \cdot \Delta t.$$

За умовою задачі, v_c можна записати так:

$$v_c = 0,6 \cdot \sqrt{2g(h + \theta \cdot \Delta h)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Тоді, прирівнюючи обидва об'єми рідини, маємо

$$-S\Delta h = 0,6\sqrt{2g(h + \theta \cdot \Delta h)}\Delta t \cdot s,$$

звідки

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k\sqrt{h + \theta \cdot \Delta h}, \quad k = 0,6\frac{s}{S}\sqrt{2g}.$$

Переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, матимемо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}. \quad (1.7)$$

Диференціальне рівняння (1.7) розв'яжемо тим самим способом, що й рівняння (1.5). Дістанемо

$$2\sqrt{h(t)} = -kt + C,$$

де C - довільна стала. Для її знаходження скористаємося умовою: $h(0) = H$ при $t = 0$.

Отже, $C = 2\sqrt{H}$. Тоді

$$t = \frac{2(\sqrt{H} - \sqrt{h(t)})}{k}.$$

Поклавши, зокрема, тут $h(t) = 0$, знайдемо час, за який вся рідина витече з посудини: $t = \frac{2\sqrt{H}}{k}$.

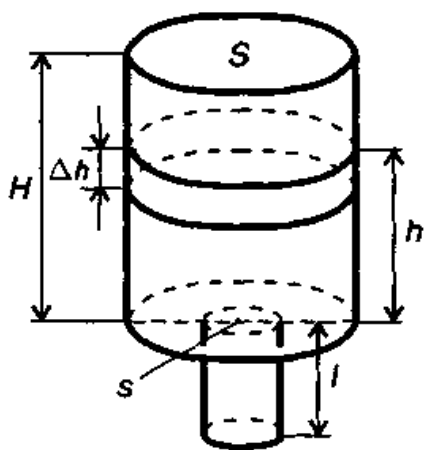


Рисунок 1.1.

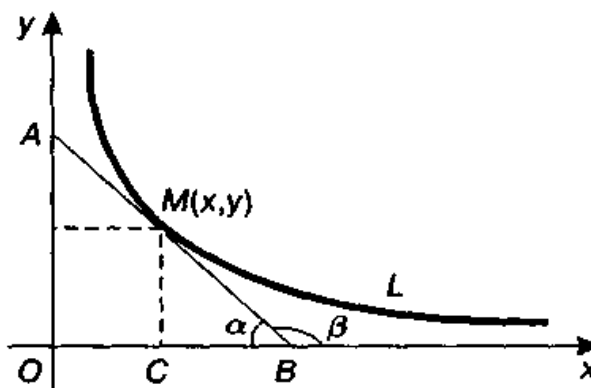


Рисунок 1.2.

Приклад 3. Знайти криві, в яких відрізок дотичної, що лежить між координатними осями, в точці дотику поділяється навпіл.

Розв'язання. Нехай шукана крива L має вигляд, який показано на рис. 1.2. Візьмемо на кривій L довільну точку $M(x, y)$ і в цій точці проведемо дотичну AB . Згідно з умовою задачі, відрізок $|CB| = x$. Тому з прямокутного трикутника MBC маємо

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg} \beta.$$

Враховуючи, що

$$\operatorname{tg} \beta = y',$$

дістанемо диференціальне рівняння

$$y' = -\frac{y}{x}. \quad (1.8)$$

Це рівняння можна записати так

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

або

$$d(\ln y) = d(-\ln x).$$

Тоді

$$\ln y = -\ln x + \ln |C| \quad (C \neq 0).$$

Звідси

$$y = \frac{C}{x}. \quad (1.9)$$

Отже, шуканими кривими є сім'я гіпербол, що залежить від одного параметра C .

1.3. Метод послідовних наближень

Нехай потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \quad (1.10)$$

що задовольняє початковій умові

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (1.11)$$

Припустимо, що в деякому прямокутнику

$$D\{|x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$$

з центром у точці (x_0, y_0) для рівняння (1.10) виконані умови а) і б) теореми існування й єдиності розв'язку задачі Коші (1.1) – (1.2).

Розв'язок задачі Коші (1.1) – (1.2) може бути знайдено методом послідовних наближень, що полягає в наступному.

Будуємо послідовність $\{y_n(x)\}$ функцій, обумовлених рекурентними співвідношеннями

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.12)$$

Як нульове наближення $y_0(x)$ можна взяти будь-яку функцію, неперервну в околі точки $x = x_0$; зокрема $y_0(x) \equiv y_0$ – початкове значення задачі Коші (1.11). Можна довести, що при зроблених припущеннях щодо рівняння (1.10) послідовні наближення $\{y_n(x)\}$ збігаються до точного розв'язку рівняння (1.10), що задовольняє початковій умові (1.11), у деякому інтервалі $x_0 - h < x < x_0 + h$, де

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|. \quad (1.13)$$

Оцінка похибки, одержаної при заміні точного розв'язку $y(x)$ n -м наближенням $y_n(x)$, дається нерівністю

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n, \quad (1.14)$$

$$\text{де } M = \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|.$$

Застосовуючи метод послідовних наближень, варто зупинитися на такому n , для якого $|y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ не перевершує припустимої похибки.

Приклад 1. Методом послідовних наближень знайти розв'язок рівняння $\frac{dy}{dx} = y$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$.

Розв'язання. Очевидно, що для даного рівняння на всій площині xOy виконані умови теореми існування й єдиності розв'язку задачі Коші. Будуємо послідовність $\{y_n(x)\}$ функцій, обумовлених співвідношеннями (1.12), прийнявши за нульове наближення $y_0(x) \equiv 1$:

$$y_0(x) \equiv 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0(t) dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(t) dt = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x y_2(t) dt = 1 + \int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

взагалі,

$$y_{n-1}(x) = 1 + \int_0^x y_{n-2}(t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}.$$

Зрозуміло, що $y_n(x) \rightarrow e^x$ при $n \rightarrow \infty$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $y(x) = e^x$ розв'язує поставлену задачу Коші.

Приклад 2. Методом послідовних наближень знайти наближений розв'язок рівняння $y' = x^2 + y^2$, що задовольняє початковій умові $y|_{x=0} = 0$ в прямокутнику $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

Розв'язання. Маємо $|f(x, y)| = x^2 + y^2 \leq 2$, тобто $M = 2$. За h беремо менше із чисел $a = 1$, $b/M = 1/2$, тобто $h = 1/2$. Послідовні наближення згідно з (1.13) будуть збігатися в інтервалі $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Становимо їх:

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 + y_0^2) dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x (t^2 + y_1^2) dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \int_0^x (t^2 + y_2^2) dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{3 \cdot 63} + \frac{t^{14}}{63^2} \right) dt = \\ = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Абсолютна похибка третього наближення не перевершує величини

$$|y_3(x) - y(x)| \leq \frac{2}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 2^2 = \frac{1}{6} < 0,1667,$$

$$\text{тут } M = \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| = M = \max_{(x,y) \in D} |2y| = 2.$$

Зауваження 1. Функція $f(x, y)$ повинна задовольняти всім умовам теореми існування й єдиності розв'язку задачі Коші.

Зауваження 2. Приклади показують, що однієї неперервності функції $f(x, y)$ недостатньо для збіжності послідовних наближень.

Тема 2. РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ, ЩО РОЗДІЛЯЮТЬСЯ

2.1. Рівняння зі змінними, що розділяються

Якщо в диференціальне рівняння першого порядку $F(x, y, y') = 0$ похідна y' входить у першому степені, то після розв'язання його відносно y' отримується рівняння виду

$$f(x, y) + \varphi(x, y)y' = 0.$$

Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то це рівняння може бути переписане так:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0.$$

В окремому випадку, коли кожна з функцій $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ є добутком двох функцій, одна з яких - функція тільки від x , а друга - тільки від y , тобто коли

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \text{ а } \varphi(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y),$$

то рівняння набуде вигляду

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0. \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) називається *диференціальним рівнянням зі змінними, що розділяються*.

Розділення змінних відбувається діленням обох частин (2.1) на добуток $\varphi_1(x) \cdot f_2(y)$, в якому $f_2(y)$ - функція тільки від y , що є множником при dx , а $\varphi_1(x)$ - функція тільки від x , що є множником при dy . Після ділення на цей добуток рівняння (2.1) приймає вигляд

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0, \quad (2.2)$$

а його загальний інтеграл запишеться так:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C. \quad (2.3)$$

2.2. Особливі розв'язки рівняння зі змінними, що розділяються

Рівняння (2.1) може бути переписане так:

$$\varphi_1(x) \cdot f_2(y) \left[\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy \right] = 0.$$

Тому, окрім знайденого раніше загального інтеграла (2.3) рівняння (2.1), його можуть також задовольняти розв'язки, що одержуються з рівняння

$$\varphi_1(x) \cdot f_2(y) = 0. \quad (2.4)$$

Якщо ці розв'язки не входять до загального інтегралу (2.3), то вони будуть *особливими* розв'язками рівняння (2.1).

Задача 1. Знайти загальні інтеграли рівнянь, особливі розв'язки, а також частинні розв'язки, що задовольняють початковим умовам, в наступних прикладах:

- 1) $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2dy = 0, \quad y(0) = 1;$
- 2) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0, \quad y(\sqrt{3}) = 0;$
- 3) $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0, \quad y(\sqrt{8}) = 1;$
- 4) $y' = 5\sqrt{y}, \quad y(0) = 25;$
- 5) $\operatorname{tg} y dx - x \ln x dy = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e;$
- 6) $y' + y^2 = 1.$

Розв'язання. 1) $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2dy = 0, \quad y(0) = 1;$

Приведемо рівняння до виду (2.2). Розділимо обидві частини рівняння на $(x^3 + 5)(y^3 + 5)$ й одержимо

$$\frac{x^2}{x^3 + 5} dx + \frac{y^2}{y^3 + 5} dy = 0.$$

Тепер змінні розділені. Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx + \int \frac{y^2}{y^3 + 5} dy = C_1;$$

$$\frac{1}{3} \ln|x^3 + 5| + \frac{1}{3} \ln|y^3 + 5| = \frac{1}{3} \ln|C|$$

(тут ми замінили C_1 на $\frac{1}{3}\ln|C|$).

Звідси загальний інтеграл запишеться так:

$$(x^3 + 5)(y^3 + 5) = \tilde{N}.$$

Слід також розглянути рівняння $(x^3 + 5)(y^3 + 5) = 0$. Але розв'язки цього рівняння не є особливими, оскільки вони виходять із загального інтеграла при $\tilde{N} = 0$. (Нагадуємо, що *особливим розв'язком* диференціального рівняння називається такий його розв'язок, який не може бути одержаний із загального за жодного частинного значення довільної постійної $\tilde{N}$.)

Використовуючи початкову умову, знайдемо $\tilde{N}$: підставляємо $x = 0$, $y = 1$ у загальний інтеграл:

$$(0 + 5)(1 + 5) = \tilde{N}, \quad \tilde{N} = 30.$$

Частинний розв'язок, що відповідає початковій умові:

$$(x^3 + 5)(y^3 + 5) = 30.$$

$$2) \quad x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0, \quad y(\sqrt{3}) = 0;$$

Приведемо рівняння до виду (2.2). Для цього розділимо обидві його частини на $\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}$. Після ділення одержимо

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, отримаємо загальний інтеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = C.$$

Звідси

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \quad (C > 0). \quad (2.5)$$

($C > 0$, оскільки розглядаються тільки арифметичні значення кореня).

Тепер слід з'ясувати питання про особливі розв'язки. Для цього розглянемо рівняння

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2} = 0.$$

Дійсних розв'язків це рівняння не має, а тому і немає особливих розв'язків.

Частинний розв'язок одержимо з умови $y=0$ при $x=\sqrt{3}$. Підставляючи ці значення x і y у загальний інтеграл (2.5), одержимо

$$\sqrt{1+3} \cdot \sqrt{1+0} = C, \quad C=3;$$

і частинним розв'язком буде

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 3.$$

$$3) \quad x y dx + (1+y^2) \sqrt{1+x^2} dy = 0, \quad y(\sqrt{8}) = 1;$$

Обидві частини рівняння ділимо на $y\sqrt{1+x^2}$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \frac{1+y^2}{y} dy = 0.$$

Інтегруючи, одержуємо

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int \left(\frac{1}{y} + y \right) dy = C$$

або

$$\sqrt{1+x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = C.$$

Щоб розглянути питання про особливі розв'язки, треба прирівняти до нуля добуток $y\sqrt{1+x^2}$. Звідси випливає, що $y=0$, $\sqrt{1+x^2}=0$.

Розв'язок $y=0$ є особливим розв'язком, оскільки він, задовольняючи рівняння, не може бути одержаним із загального розв'язку за жодного частинного значення C . Рівняння ж $\sqrt{1+x^2}=0$ дійсних розв'язків не має.

Частинний розв'язок отримаємо, підставляючи в загальний інтеграл $\sqrt{x}=\sqrt{8}$; $y=1$:

$$\sqrt{1+8} + \ln 1 + \frac{1}{2} = C; \quad C = \frac{7}{2}.$$

Частинний розв'язок

$$\sqrt{1+x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = \frac{7}{2},$$

або

$$2\sqrt{1+x^2} + \ln y^2 + y^2 = 7.$$

4) $y' = 5\sqrt{y}, \quad y(0) = 25;$

Перепишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = 5\sqrt{y}.$

Звідси, поділивши обидві частини рівняння на $5\sqrt{y}$ і помноживши на dx , одержимо

$$\frac{dy}{5\sqrt{y}} = dx.$$

Інтегруючи, знайдемо загальний інтеграл

$$\frac{2}{5}\sqrt{y} = x + C, \tag{2.6}$$

або

$$y = \frac{25}{4}(x + C)^2.$$

Щоб одержати особливий розв'язок, розглянемо рівняння $5\sqrt{y} = 0$, звідки $y = 0$. Цей розв'язок буде особливим, оскільки він не може бути одержаний із загального за жодного числового значення довільної постійної C .

Частинний розв'язок отримуємо з (2.6), підставляючи в нього $x = 0$, $y = 25$:

$$\frac{2}{5}\sqrt{25} = 0 + C, \quad C = 2,$$

і частинним розв'язком буде

$$y = \frac{25}{4}(x + 2)^2.$$

5) $\operatorname{tg} y dx - x \ln x dy = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e;$

Для того, щоб розділити змінні, поділимо обидві частини рівняння на $\operatorname{tg} y \cdot \ln x$, й одержуємо $\frac{dx}{x \ln x} - \frac{dy}{\operatorname{tg} y} = 0$, а інтегруючи

$$\int \frac{dx}{x \ln x} - \int \frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \ln|C|,$$

знайдемо

$$\ln|\ln x| - \ln|\sin y| = \ln|C|.$$

Звідси

$$\frac{\ln x}{\sin y} = C,$$

або

$$\ln x = C \sin y.$$

Загальний інтеграл рівняння

$$x = e^{C \sin y}. \quad (2.7)$$

Для з'ясування питання про особливий розв'язок треба прирівняти до нуля вираз $\operatorname{tg} y \cdot x \cdot \ln x$, на який ми ділимо рівняння:

$$\operatorname{tg} y \cdot x \cdot \ln x = 0.$$

Звідси $\operatorname{tg} y = 0$; $x = 0$; $\ln x = 0$. Таким чином, $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); $x = 0$; $x = 1$.

Але із загального інтеграла при $C = 0$ одержуємо $x = 1$. Отже, $x = 1$ є не особливий розв'язок, а частинний. При $C = -\infty$ маємо $x = 0$, а тому $x = 0$ також не є особливий розв'язок, а є частинний. При $C = +\infty$ буде $y = k\pi$, що виходить з (2.7), і тому ці розв'язки не особливі, а частинні. Таким чином, розв'язки $x = 0$; $x = 1$ і $y = k\pi$, «підозрілі» на особливість, є просто частинними розв'язками. Отже, особливих розв'язків рівняння не має.

Щоб знайти частинний розв'язок, підставимо в (2.7) $x = e$; $y = \frac{\pi}{2}$ і одержимо

$$e = e^{C \sin \frac{\pi}{2}}; \quad e = e^C; \quad C = 1.$$

Тому частинним розв'язком буде

$$x = e^{\sin y}.$$

$$6) y' + y^2 = 1.$$

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2.$$

Розділимо обидві частини рівняння на $1 - y^2$ й помножимо на dx .
Одержимо рівняння, в якому змінні розділені:

$$\frac{dy}{1 - y^2} = dx.$$

Інтегруємо обидві його частини:

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = x + C;$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = x + C.$$

Звідси

$$\ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = 2(x + C); \quad \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = e^{2(x+C)},$$

$$\frac{1+y}{1-y} = e^{2(x+C)} \quad \text{або} \quad \frac{1+y}{1-y} = -e^{2(x+C)}.$$

Розглянемо кожний з цих випадків окремо.

$$1) \frac{1+y}{1-y} = e^{2(x+C)}; \quad y = \frac{e^{2(x+C)} - 1}{e^{2(x+C)} + 1} = \frac{e^{(x+C)} - e^{-(x+C)}}{e^{(x+C)} + e^{-(x+C)}}.$$

Загальний інтеграл: $y = \operatorname{th}(x + C)$.

$$2) \frac{1+y}{1-y} = -e^{2(x+C)}; \quad y = \frac{e^{2(x+C)} + 1}{e^{2(x+C)} - 1} = \frac{e^{(x+C)} + e^{-(x+C)}}{e^{(x+C)} - e^{-(x+C)}}.$$

Загальний інтеграл: $y = \operatorname{cth}(x + C)$.

Щоб вирішити питання про особливий розв'язок, прирівняємо до нуля вираз $1 - y^2$, на який ми ділили обидві частини рівняння:

$$1 - y^2 = 0, \quad y = \pm 1.$$

Ці розв'язки є особливими, оскільки не можуть бути одержані із загального за жодного числового значення довільної постійної C .

Задача 2 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні інтеграли, особливі і частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1) $y' = 0$;

2) $y' = a$;

3) $y' = 2x^2 + 5x + 12$; $y(1) = \frac{1}{6}$;

4) $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$;

5) $\sqrt{1 - y^2} dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0$; $y(0) = 1$;

6) $(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0$; $y(1) = 2$.

Вказівки. У п'ятому рівнянні довільну постійну вигідно ввести у вигляді $\arcsin C$, в шостому рівнянні - у вигляді $\arctg C$.

Відповідь. 1) $y = C$;

2) $y = ax + C$;

3) $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 12x + C$.

Частинний розв'язок $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 12x - 15$.

4) $y = \frac{1 + 4e^{5(x+C)}}{1 - e^{5(x+C)}}; \quad y = \frac{1 - 4e^{5(x+C)}}{1 + e^{5(x+C)}}.$

Розв'язки $y = 1$ і $y = -4$ - частинні. Вони містяться в загальному розв'язку: перший при $C = -\infty$, другий при $C = +\infty$.

5) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin C$, або, беручи синус обох частин, $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = C$.

Врахувати, що $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Особливий розв'язок $y = \pm 1$.

Частинний розв'язок $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1$.

6) $\arctg x + \arctg y = \arctg C$. Беручи тангенс обох частин, цю рівність можна записати у вигляді $\frac{x + y}{1 - xy} = C$.

Частинний розв'язок $\frac{x+y}{1-xy} = -3$. Врахувати, що $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$.

2.3. Рівняння, що приводиться до рівняння зі змінними, що розділяються

Рівняння виду

$$y' = f(ax + by + c) \quad (2.8)$$

приводиться до рівняння зі змінними, що розділяються, за допомогою підстановки

$$ax + by + c = z; \quad a + by' = z'; \quad y' = \frac{z' - a}{b}.$$

Рівняння (2.8) набуває вигляду:

$$\frac{z' - a}{b} = f(z); \quad z' = bf(z) + a;$$

$$\frac{dz}{dx} = bf(z) + a, \quad \text{або} \quad \frac{dz}{bf(z) + a} = dx.$$

Останнє рівняння - рівняння, в якому змінні розділені. У загальному інтегралі слід перейти до старої змінної, замінивши z на $ax + by + c$.

Задача 3. Знайти розв'язки рівнянь:

- 1) $y' = \frac{1}{3x + y}$;
- 2) $y'(y + x) = 1$;
- 3) $y' = 3^{3x+2y}$.

Розв'язання. Перше і друге рівняння цієї задачі відносяться до типу (2.8), а третє - рівняння із змінними, що розділяються.

$$1) \quad y' = \frac{1}{3x + y};$$

Підстановка: $3x + y = z$. Диференціюючи обидві частини рівності, знаходимо: $3 + y' = z'$; $y' = z' - 3$. Тому $z' - 3 = \frac{1}{z}$; $z' = \frac{1+3z}{z}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1+3z}{z}$.

Розділяємо змінні, помноживши обидві частини останнього рівняння на $\frac{z}{1+3z} dx$. Одержуємо $\frac{z}{1+3z} dz = dx$. Інтегруємо і знаходимо

$$\int \frac{z}{1+3z} dz = x + C;$$

звідки, обчислюючи інтеграл, маємо

$$\frac{1}{3}z - \frac{1}{9}\ln|1+3z| = x + C,$$

а замінюючи z на $3x + y$, маємо

$$\frac{1}{3}(3x + y) - \frac{1}{9}\ln|9x + 3y + 1| = x + C.$$

$$2) \quad y'(y + x) = 1;$$

Підстановка: $x + y = z$.

Відповідь. $y - \ln|x + y + 1| = C.$

$$3) \quad y' = 3^{3x+2y}.$$

Подати праву частину у вигляді $3^{3x+2y} = 3^{3x} \cdot 3^{2y}$;

$$\frac{dy}{dx} = 3^{3x} \cdot 3^{2y}; \quad \frac{dy}{3^{2y}} = 3^{3x} dx.$$

Довільну постійну вигідно увести у вигляді $-\frac{C}{6\ln 3}$.

Відповідь. $3 \cdot 3^{-2y} + 2 \cdot 3^{3x} = C.$

Задача 4 (для самостійного розв'язання).

Проінтегрувати рівняння:

$$1) \quad y' = 3x + 4y; \quad 2) \quad y' = \frac{2}{x + 2y}; \quad 3) \quad y' = \sqrt{2x + y - 3}.$$

Відповідь. 1) $y = Ce^{4x} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{16};$

$$2) \quad 5x + 10y + 4\ln|5x + 10y - 4| = C - 25x;$$

$$3) \quad 2\sqrt{2x + y - 3} - 4\ln(\sqrt{2x + y - 3} + 2) = x + C. +$$

Тема 3. ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

3.1. Однорідне рівняння

Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією степеня m* , якщо при всіх λ виконується тотожність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

Рівняння $y' = f(x, y)$ називається *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового степеня. Рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається *однорідним*, якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції одного і того самого степеня m . Таким чином, якщо рівняння $y' = f(x, y)$ або $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не змінюються при заміні x на λx і y на λy , то вони називаються *однорідними*. Підстановка

$$y = u \cdot x, \quad (3.1)$$

де $u = u(x)$ — нова шукана функція, перетворить однорідне рівняння в рівняння із змінними, що розділяються.

Після того, як нове рівняння буде проінтегроване, належить u замінити на $\frac{y}{x}$.

Задача 1. Проінтегрувати диференціальні рівняння:

$$1) \ y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0; \quad 2) \ xy dy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx.$$

Розв'язання. 1) Перш за все слід переконатися, що це рівняння однорідне. Замінивши x на λx , а y на λy , відзначимо, що рівняння не змінилося. Це і доводить, що воно однорідне. Зробимо підстановку (3.1): $y = u \cdot x$. Тоді $y' = u' \cdot x + u$, й рівняння перепишеться так:

$$u'x + u + \frac{x^2 + u^2 x^2}{x u x} = 0,$$

або, скорочуючи на x^2 :

$$u'x + u + \frac{1 + u^2}{u} = 0,$$

звідки $u'x + \frac{1+2u^2}{u} = 0$; $\frac{du}{dx}x = -\frac{1+2u^2}{u}$.

Тепер ми одержали рівняння зі змінними, що розділяються, яке після розділення змінних запишеться таким чином:

$$-\frac{u}{1+2u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$-\frac{1}{4} \ln(1+2u^2) = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$\ln(1+2u^2)^{-1} = 4\ln|x| + 4\ln|C|,$$

або, переходячи від логарифмів до чисел, тобто потенціюючи, знаходимо

$$\frac{1}{1+2u^2} + Cx^4.$$

Замінімо тепер u на $\frac{y}{x}$ й одержимо

$$\frac{1}{1+\frac{2y^2}{x^2}} = Cx^4; \quad \frac{x^2}{x^2+2y^2} = Cx^4.$$

Скоротимо на x^2 , тоді $\frac{1}{x^2+2y^2} = Cx^2$.

Ці розв'язки зручніше записати у вигляді

$$\frac{1}{(x^2+2y^2)x^2} = C,$$

або $x^2(x^2+2y^2) = \frac{1}{C}$.

Замінюючи $\frac{1}{C}$ на C_1 , одержуємо

$$x^2(x^2+2y^2) = C_1.$$

2) У тому, що це рівняння однорідне, легко переконатися, замінивши x на λx , а y на λy . Помічаємо, що при цьому рівняння не змінилося. Перепишемо його для зручності у вигляді

$$\left[(x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2 \right] dx - xy dy = 0$$

і зробимо підстановку $y = u \cdot x$, з якої виходить, що

$$dy = u dx + x du.$$

Рівняння перепишеться у вигляді

$$\left[(x+ux)^2 e^{-u} + u^2 x^2 \right] dx - ux^2 (u dx + x du) = 0.$$

Розділивши обидві його частини на x^2 , одержимо рівняння

$$\left[(1+u)^2 e^{-u} + u^2 \right] dx - u(u dx + x du) = 0,$$

або

$$\left[(1+u)^2 e^{-u} + u^2 - u^2 \right] dx - ux du = 0.$$

Це рівняння зі змінними, що розділяються. Розділяючи їх, маємо рівняння

$$\frac{dx}{x} - \frac{u du}{(1+u)^2 e^{-u}} = 0. \quad (3.2)$$

Інтеграл

$$\int \frac{u du}{(1+u)^2 e^{-u}} = \int \frac{ue^u du}{(1+u)^2} = \frac{e^u}{1+u}.$$

Тому з (3.2) одержуємо

$$\ln x - \frac{e^u}{1+u} = -\ln C,$$

або

$$\ln x + \ln C = \frac{e^u}{1+u}.$$

Замінюючи u на $\frac{y}{x}$, одержуємо

$$\ln(Cx) = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{1 + \frac{y}{x}}; \quad \ln(Cx) = \frac{xe^{\frac{y}{x}}}{x + y},$$

й остаточно

$$(x + y)\ln(Cx) = xe^{\frac{y}{x}} +$$

Надаємо для самостійного розв'язання ще 5 однорідних рівнянь.

Задача 2. Проінтегрувати рівняння:

$$1) (x + y)dx + (y - x)dy = 0;$$

$$2) (x^2 - xy)dy + y^2dx = 0;$$

$$3) y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1;$$

$$4) xy' = x \sin \frac{y}{x} + y;$$

$$5) xy' + x \cos \frac{y}{x} - y + x = 0.$$

Вказівка. У третьому рівнянні $\int \frac{du}{e^u + 1} = \int \frac{e^u + 1 - e^u}{e^u + 1} du = u - \ln(e^u + 1).$

Одержаний розв'язок розв'язати відносно $e^{\frac{y}{x}}.$

Відповідь. 1) $\arctg \frac{y}{x} = \ln(C\sqrt{x^2 + y^2});$

$$2) y = Ce^{\frac{y}{x}};$$

$$3) e^{\frac{y}{x}} = \frac{Cx}{1 - Cx};$$

$$4) y = 2x \arctg(Cx);$$

$$5) \operatorname{tg} \frac{y}{2x} = \ln \frac{C}{x} +$$

3.2. Найпростіше рівняння, яке зводиться до однорідного

До однорідного диференціального рівняння можна звести диференціальне рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (3.3)$$

в якому $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — дійсні числа, причому

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}, \quad (3.4)$$

а f - довільна неперервна функція в заданій області. Справді, введемо нові змінні ξ й η :

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta, \quad (3.5)$$

де α й β - невідомі сталі. Підставляючи в диференціальне рівняння (3.3) значення (3.5) та враховуючи, що $\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$, одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right).$$

Сталі α й β виберемо так, щоб

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Система алгебраїчних рівнянь (3.6) має єдиний розв'язок. Таким чином, матимемо

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right). \quad (3.7)$$

У рівнянні (3.7) функція f є однорідною функцією нульового виміру. Якщо ж умова (3.4) не виконується, тобто

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda, \quad (3.8)$$

то, враховуючи, що $a_1 = a_2\lambda$, $b_1 = b_2\lambda$, диференціальне рівняння (3.3) набуде вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda a_2 x + \lambda b_2 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right).$$

Застосовуючи підстановку

$$z(x) = a_2 x + b_2 y,$$

дістанемо

$$\frac{1}{b_2} \frac{dz}{dx} - \frac{a_2}{b_2} = f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right),$$

або

$$\frac{dz}{dx} = b_2 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) + a_2.$$

Останнє диференціальне рівняння допускає відокремлення змінних. Знайшовши його загальний інтеграл і підставивши $a_2 x + b_2 y$ замість $z(x)$, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (3.3) за умови (3.8).

Задача 3. Проінтегрувати диференціальні рівняння:

$$1) (x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0;$$

$$2) (2x - 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0.$$

Розв'язання. 1) $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0;$

Тут умова (3.4) виконана. Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0, \\ \alpha - \beta + 4 = 0, \end{cases}$$

знаходимо $\alpha = -1, \beta = 3$. Виконуючи підстановку (3.5)

$$x = \xi - 1, \quad y = \eta + 3,$$

одержимо однорідне рівняння

$$(\xi + \eta)d\xi + (\xi - \eta)d\eta = 0.$$

Інтегруючи його за допомогою підстановки $\eta = z\xi$, де $z = z(\xi)$, знаходимо

$$\xi^2 + 2\xi\eta - \eta^2 = C.$$

Повертаючись до старих змінних x й y за формулами

$$\xi = x + 1, \quad \eta = y - 3,$$

одержимо, що

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y = C.$$

$$2) (2x - 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0.$$

У цьому рівнянні визначник з коефіцієнтів при dx і dy дорівнює нулю. Вважаючи $z = x - y$, тобто $y = x - z$, одержимо

$$(2z - 1)dx + (z + 1)(dx + dz) = 0,$$

$$3zdx - (z + 1)dz = 0.$$

Інтегруємо останнє рівняння:

$$3x - z - \ln|z| = C.$$

Замінюючи z на $x - y$, одержимо загальний інтеграл у вигляді

$$2x + y - \ln|x - y| = C.$$

Особливих розв'язків немає.

Задача 4. Проінтегрувати рівняння:

- 1) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0;$
- 2) $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0;$
- 3) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0;$
- 4) $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0;$
- 5) $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0.$

Відповідь. 1) $x^2 + y^2 - xy + x - y = C;$

$$2) \frac{x^2}{2} + y^2 - xy + y = C;$$

$$3) x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C;$$

$$4) (y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2;$$

$$5) 2x + y - 1 = Ce^{2y-x}.$$

3.3. Узагальнено-однорідне рівняння

Якщо існує таке число k , що при підстановці в рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{3.9}$$

замість x , y і dy відповідно λx , $\lambda^k y$ і $\lambda^{k-1} dy$ дістанемо те саме рівняння, тоді диференціальне рівняння (9) називають *узагальнено-однорідним*. Узагальнено-однорідне рівняння підстановкою $y = z^k$ зводиться до однорідного.

Іншими словами, деякі рівняння можна привести до однорідних заміною $y = z^k$. Число k звичайно наперед невідоме. Щоб його знайти, треба в рівнянні зробити заміну $y = z^k$. Вимагаючи, щоб рівняння було однорідним, знайдемо

число, якщо це можливо. Якщо ж цього зробити не можна, тоді рівняння не приводиться до однорідного цим способом.

Задача 5. Переконатися, що наступні рівняння є узагальнено-однорідними, і знайти заміни, які зводять їх до однорідних:

$$1) \quad 4xydx + (y - x^2)dy = 0;$$

$$2) \quad \left(\frac{2}{x^2} - y^2 \right) dx + dy = 0;$$

$$3) \quad 2x^4yy' + y^4 = 4x^6;$$

$$4) \quad \left(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1} \right) dx + 2xdy = 0;$$

$$5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4x^6 - y^4}{2x^4y}.$$

Розв'язання. 1) $4xydx + (y - x^2)dy = 0$.

Замість x , y і dy підставимо в рівняння відповідно λx , $\lambda^k y$ і $\lambda^{k-1} dy$:

$$4\lambda x \lambda^k y dx + (\lambda^k y - \lambda^2 x^2) \lambda^{k-1} dy = 0,$$

або

$$4\lambda^{k+1} xy dx + (\lambda^{2k-1} y - \lambda^{k+1} x^2) dy = 0.$$

При цьому, щоб рівняння не змінилося, число k треба взяти таким, яке задовольняло б рівність

$$k+1 = 2k-1 = k+1,$$

звідки

$$k = 2.$$

Отже, маємо узагальнено-однорідне рівняння й $k = 2$. За допомогою підстановки $y = z^2$ диференціальне рівняння можна звести до однорідного диференціального рівняння.

$$2) \quad \left(\frac{2}{x^2} - y^2 \right) dx + dy = 0.$$

Замість x , y і dy підставимо в рівняння відповідно λx , $\lambda^k y$ і $\lambda^{k-1} dy$:

$$\left[\frac{2}{(\lambda x)^2} - (\lambda^k y)^2 \right] dx + \lambda^{k-1} dy = 0,$$

або

$$\left(\frac{2}{\lambda^2 x^2} - \lambda^{2k} y^2 \right) dx + \lambda^{k-1} dy = 0.$$

При цьому, щоб рівняння не змінилося, число k треба взяти таким, яке задовольняло б рівність

$$-2 = 2k = k - 1,$$

звідки

$$k = -1.$$

Отже, маємо узагальнено-однорідне рівняння й $k = -1$. За допомогою підстановки $y = \frac{1}{z}$ диференціальне рівняння можна звести до однорідного диференціального рівняння.

$$3) 2x^4 y y' + y^4 = 4x^6.$$

Після заміни $y = z^k$ рівняння набуває вигляду

$$2kx^4 z^{2k-1} z' + z^{4k} = 4x^6.$$

Це рівняння буде однорідним у разі, коли степені всіх його членів рівні між собою, тобто

$$4 + (2k - 1) = 4k = 6.$$

Ці рівності задовольняються одночасно, якщо $k = \frac{3}{2}$. Отже, рівняння можна

звести до однорідного заміною $y = z^{\frac{3}{2}}$.

$$4) (y + y\sqrt{x^2 y^4 - 1}) dx + 2x dy = 0$$

Замість x , y і dy підставимо в рівняння відповідно λx , $\lambda^k y$ і $\lambda^{k-1} dy$:

$$\left[(\lambda^k y) + (\lambda^k y) \sqrt{(\lambda x)^2 (\lambda^k y)^4 - 1} \right] dx + 2(\lambda x)(\lambda^{k-1} dy) = 0,$$

або

$$(\lambda^k y + \lambda^k y \sqrt{\lambda^{2+4k} x^2 y^4 - \lambda^0}) dx + 2\lambda^k x dy = 0.$$

При цьому, щоб рівняння не змінилося, число k треба взяти таким, яке задовольняло б рівність

$$k = k + \frac{2 + 4k}{2} = k + \frac{0}{2} = k,$$

звідки

$$k = -\frac{1}{2}.$$

Отже, маємо узагальнено-однорідне рівняння й $k = -\frac{1}{2}$. За допомогою підстановки $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$ диференціальне рівняння можна звести до однорідного диференціального рівняння.

$$5) \frac{dy}{dx} = \frac{4x^6 - y^4}{2x^4 y}$$

Замість x , y і dy підставимо в рівняння відповідно λx , $\lambda^k y$ і $\lambda^{k-1} dy$:

$$\frac{\lambda^{k-1} dy}{dx} = \frac{4(\lambda x)^6 - (\lambda^k y)^4}{2(\lambda x)^4 (\lambda^k y)},$$

або

$$\lambda^{k-1} \frac{dy}{dx} = \frac{4\lambda^{6-(4+k)} x^6 - \lambda^{4k-(4+k)} y^4}{2x^4 y}.$$

При цьому, щоб рівняння не змінилося, число k треба взяти таким, яке задовольняло б рівність

$$k-1 = 6 - (4+k) = 4k - (4+k),$$

звідки

$$k = \frac{3}{2}.$$

Отже, маємо узагальнено-однорідне рівняння й $k = \frac{3}{2}$. За допомогою підстановки $y = z^{\frac{3}{2}}$ диференціальне рівняння можна звести до однорідного диференціального рівняння.

Задача 6. Проінтегрувати рівняння:

- 1) $(y^4 - 3x^2)dy + xydy = 0$;
- 2) $y^3 dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$;
- 3) $(x^2 y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0$;
- 4) $\left(1 + \sqrt{\frac{y^2}{x} - 1}\right)dx - 2ydy = 0$;
- 5) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2} + y^2$.

Відповідь. 1) $y^4 - x^2 = Cy^6$;

$$2) y^2 = Ce^{\frac{y^2}{x}};$$

$$3) \ x^2 y^2 + 1 = Cy;$$

$$4) \ \sqrt{y^2 - x} - \sqrt{x} = C, \quad x = y^2;$$

$$5) \ y = \frac{1 + 2Cx}{x(1 - Cx)}, \quad y = -\frac{2}{x} \cdot +$$

Тема 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

4.1. Лінійне рівняння першого порядку

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (4.1)$$

називаються *лінійними* тому, що шукана функція y і її похідна y' входять у них у першому степені.

Функції $p(x)$ і $q(x)$ припускаються неперервними в проміжку (a, b) , в якому шукається розв'язок рівняння (4.1).

Якщо права частина в (4.1) — функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю за всіх значень x з (a, b) , то рівняння набуває вигляду

$$y' + p(x)y = 0 \quad (4.2)$$

і називається в цьому випадку *лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку*. Якщо $q(x)$ не дорівнює тотожно нулю, то воно називається *неоднорідним*. Відзначимо, що лінійне однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються.

Іноді рівняння (4.2) називається лінійним рівнянням *без правої частини*.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.1) можна знайти за допомогою підстановки

$$y = e^{-\int p(x)dx} v(x), \quad (4.3)$$

де $v(x)$ — нова шукана функція. Множник $e^{-\int p(x)dx}$ — загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (4.2), що відповідає рівнянню (4.1), причому в цьому загальному розв'язку опущено множник C .

Підстановка (4.3) приводить (4.1) до рівняння зі змінними, що розділяються.

Задача 1. Знайти розв'язок рівняння $y' + y = e^x$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язання. Порівнюючи це рівняння з (4.1), ми бачимо, що функція $p(x)$ - коефіцієнт при y - дорівнює 1.

Щоб застосувати підстановку (4.3), обчислимо $\int p(x)dx$, який при $p(x)=1$ запишеться у вигляді $\int p(x)dx = \int dx = x$, а $e^{-\int p(x)dx} = e^{-x}$. Тому підстановка (3) має вигляд

$$y = e^{-x}v(x). \quad (4.4)$$

Підставимо вираз (4) в задане рівняння. Для цього (4.4) продиференціюємо як добуток

$$\begin{array}{r|l} 1 & y' = e^{-x}v'(x) - v(x)e^{-x} \\ + & \\ 1 & y = \frac{v(x)e^{-x}}{e^x = e^{-x}v'(x)} \end{array}$$

(Додаванням в лівих частинах цієї рівності $y' + y$, ми одержуємо праву частину заданого рівняння, тобто e^x).

Дістали рівняння зі змінними, що розділяються

$$\frac{dv}{dx}e^{-x} = e^x.$$

Множенням обох його частин на $e^x dx$, одержимо

$$dv = e^{2x}dx,$$

а інтегруючи їх, знайдемо

$$v = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Підставляючи знайдене значення v у (4.4), одержимо

$$y = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C \right) e^{-x},$$

або

$$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x. \quad (4.5)$$

Як доводиться в теорії інтеграції лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку (4.1), загальний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі двох доданків, з яких один є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння (4.2), а інший — його частинним розв'язком неоднорідного рівняння (воно виходить із загального при $C=0$). У нашому

випадку в (4.5) перший доданок Ce^{-x} — загальний розв’язок однорідного лінійного рівняння $y' + y = 0$, що відповідає заданому, а другий $\frac{1}{2}e^x$ — частинний розв’язок даного рівняння.

Дійсно, рівняння $y' + y = 0$ — рівняння із змінними, що розділяються:

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad \frac{dy}{y} = -dx. \text{ Інтегруючи, одержимо}$$

$$\ln|y| = -x + \ln|C|; \quad \ln|y| - \ln|C| = -x; \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x;$$

$$\left|\frac{y}{C}\right| = e^{-x}; \quad |y| = |C|e^{-x}; \quad y = Ce^{-x}.$$

З (4.5) визначимо довільну постійну C , використовуючи початкову умову $y(0) = 1$:

$$1 = Ce^0 + \frac{1}{2}e^0; \quad 1 = C + \frac{1}{2}; \quad C = \frac{1}{2}.$$

Підставляючи $C = \frac{1}{2}$ у (4.5), одержимо частинний розв’язок $y = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$, тобто частинний розв’язок є $y = \operatorname{sh} x$.

Задача 2. Знайти загальний розв’язок рівняння $y' - 4y = \cos x$, а також частинний, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв’язання. Порівнюючи з (4.1), з’ясуємо, що $p(x) = -4$ (це коефіцієнт при y у даному рівнянні). Щоб застосувати підстановку (4.3), обчислимо $-\int p(x)dx$, підставляючи в нього $p(x) = -4$:

$$-\int p(x)dx = -\int -4dx = 4x,$$

$$\text{а } e^{-\int p(x)dx} = e^{4x}.$$

Тому (4.3) запишеться так:

$$y = ve^{4x}. \quad (4.6)$$

Підставляючи це значення y у дане рівняння, одержимо

$$\begin{array}{l} 1 \mid y' = v'e^{4x} + 4ve^{4x} \\ -4 \mid y = \phantom{y' = v'e^{4x} + 4ve^{4x}} ve^{4x} \\ \hline \cos x = v'e^{4x} \end{array}$$

(при складанні два останніх доданки знищилися). Вийшло рівняння зі змінними, що розділяються:

$$\frac{dv}{dx}e^{4x} = \cos x.$$

Помноживши обидві його частини на $e^{-4x}dx$, одержимо

$$dv = e^{-4x} \cos x dx.$$

Обчисливши інтеграл, знайдемо

$$v = \frac{e^{-4x}}{17}(\sin x - 4\cos x) + C,$$

а з (4.6) одержуємо:

$$\begin{aligned} y &= \left[\frac{e^{-4x}}{17}(\sin x - 4\cos x) + C \right] e^{4x}; \\ y &= Ce^{4x} + \frac{1}{17}(\sin x - 4\cos x). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тут знову-таки слід звернути увагу на те, що доданок Ce^{4x} є загальним розв'язком однорідного лінійного рівняння $y' - 4y = 0$, що відповідає даному неоднорідному, а другий доданок - частинний розв'язок всього даного рівняння. Цей доданок виходить із загального розв'язку при $C = 0$.

Щоб визначити частинний розв'язок, підставляємо в (4.7) $x = 0$; $y = 1$ і одержуємо:

$$1 = C - \frac{4}{17}; \quad C = \frac{21}{17},$$

тому частинним розв'язком буде

$$y = \frac{1}{17}(21e^{4x} + \sin x - 4\cos x).$$

Задача 3 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x' + ax = e^{bt} \quad (a + b \neq 0).$$

Розглянути також випадок $a + b = 0$.

Вказівка. Тут шукана функція не y , як було в двох попередніх задачах, а x , незалежною змінною є t (це легко бачити з того, що права частина e^{bt} — функція t).

Замість інтеграла $-\int p(x)dx$ у (4.3) треба обчислити $-\int a dt = -at$. Тому підстановка (4.3) буде такою:

$$x = v(t)e^{-at}.$$

Відповідь. $x = Ce^{-at} + \frac{e^{bt}}{a+b} \quad (a+b \neq 0).$

Якщо $a+b=0$, то $x = Ce^{-at} + te^{-at}$.

Вказівка. Якщо $a+b=0$, то $b=-a$.

У трьох останніх задачах коефіцієнт при першому степені шуканої функції в лінійному рівнянні був величиною постійною (це були числа 1, -4, a).

Тепер ми розв'яжемо задачу, в якій цей коефіцієнт є функція незалежної змінної.

Задача 4. Знайти розв'язок рівняння

$$y' + y \cos x = \sin x \cos x,$$

що задовольняє початкову умову $y(0) = 0$.

(Рівняння лінійне, оскільки шукана функція y і її похідна y' входять в рівняння в першому степені).

Розв'язання. Порівнюючи задане рівняння з (4.1), робимо висновок, що $p(x) = \cos x$; $-\int p(x)dx = -\int \cos x dx = -\sin x$. Тому множник $e^{-\int p(x)dx}$ у (4.1) дорівнює $e^{-\sin x}$, а підстановка (1) запишеться так:

$$y = v(x)e^{-\sin x}. \quad (4.8)$$

Підставляючи це значення y у задане рівняння, одержимо:

$$\begin{array}{l} 1 \mid y' = v'e^{-\sin x} - ve^{-\sin x} \cos x \\ \cos x \mid y = \phantom{v'e^{-\sin x}} ve^{-\sin x} \\ \hline \sin x \cos x = v'e^{-\sin x} \end{array}$$

Вийшло рівняння зі змінними, що розділяються

$$\frac{dv}{dx} e^{-\sin x} = \sin x \cos x.$$

Помноживши його обидві частини на $e^{\sin x}$, будемо мати

$$dv = e^{\sin x} \sin x \cos x dx,$$

а

$$v = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx = e^{\sin x} \sin x - \int e^{\sin x} \cos x dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ dt = e^{\sin x} \cos x dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} du = \cos x dx \\ t = e^{\sin x} \end{array} \right|$$

$$= e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} + C.$$

Підставляючи це значення v у (4.8), знайдемо

$$y = (e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} + C) e^{-\sin x};$$

$$y = C e^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок. Підставляємо в загальний розв'язок початкову умову $x=0$; $y=0$; $0=C-1$; $C=1$. Частинний розв'язок запишеться так:

$$y = e^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

Задача 5 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні і частинні розв'язки наступних лінійних рівнянь:

$$1) \quad y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$2) \quad y' - \frac{1}{x+2} y = x^2 + 4x + 5; \quad y(-1) = \frac{3}{2};$$

$$3) \quad \frac{dx}{dt} - \frac{nx}{t+1} = e^t (t+1)^n; \quad x(0) = 1.$$

Вказівки. При розв'язанні багатьох задач доведеться користуватися формулою $e^{\ln N} = N$. У першому рівнянні $p(x) = \operatorname{tg} x$;

$$-\int p(x)dx = -\int \operatorname{tg} x dx = \ln \cos x; \quad e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x.$$

У другому рівнянні

$$p(x) = -\frac{1}{x+2}; \quad -\int p(x)dx = \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|;$$

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln(x+2)} = x+2.$$

Підстановка: $y = v(x)(x+2)$.

Функція $v(x) = \int \frac{x^2 + 4x + 5}{x+2} dx = \frac{(x+2)^2}{2} + \ln(x+2) + C.$

Відповідь. 1) $y = C \cos x + \sin x \cos x$; частинний розв'язок:

$$y = \sin x \cos x;$$

$$2) \quad y = C(x+2) + \frac{(x+2)^3}{2} + (x+2)\ln(x+2);$$

частинний розв'язок: $y = (x+2) + \frac{(x+2)^3}{2} + (x+2)\ln(x+2);$

$$3) \quad x = C(t+1)^n + e^t(t+1)^n; \text{ частинний розв'язок: } x = e^t(t+1)^n. +$$

Задача 6 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні інтеграли і частинні розв'язки лінійних рівнянь:

$$1) \quad y' - \frac{1}{\sin x \cos x} y = -\operatorname{cosec} x - \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \quad y' - 2xy = 1 - 2x^2; \quad y(0) = 2;$$

$$3) \quad xy' + y = x^2 + 3x + 2; \quad y(1) = \frac{29}{6}.$$

Вказівки. 1) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x$; $e^{\ln \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$. Підстановка: $y = v \cdot \operatorname{tg} x$.

$$2) \quad p(x) = -2x; \quad e^{-\int p(x)dx} = e^{x^2}. \text{ Підстановка: } y = ve^{x^2}.$$

$$3) \text{ Обидві частини рівняння розділити на } x. \text{ Функція } p(x) = \frac{1}{x};$$

$$-\int p(x)dx = -\ln x; \quad e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}. \text{ Підстановка:}$$

$$y = v \cdot \frac{1}{x}.$$

Відповідь. 1) $y = C \operatorname{tg} x + \cos x$; $y = \operatorname{tg} x + \cos x$;

2) $y = Ce^{x^2} + x$; $y = 2e^{x^2} + x$;

3) $y = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3} + \frac{3x}{2} + 2$; $y = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{3} + \frac{3x}{2} + 2$.

Деякі рівняння стають лінійними, якщо поміняти ролями шукану функцію і незалежне змінне. Так, нелінійне рівняння

$$A(y) + B(y)x - C(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

стає лінійним, якщо його подати у вигляді

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y)x = f(y),$$

де $\varphi(y) = \frac{B(y)}{A(y)}$, $f(y) = \frac{C(y)}{A(y)}$.

Задача 7. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$ydx - (x + y^2 \sin y)dy = 0.$$

Розв'язання. Якщо обидві частини рівняння розділити на dy , то одержимо

$$y \frac{dx}{dy} - x - y^2 \sin y = 0.$$

Розділивши на коефіцієнт при $\frac{dx}{dy}$, одержимо рівняння

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y \sin y,$$

у якому шуканою функцією є x , незалежною змінною - y . А оскільки шукана функція x і її похідна $\frac{dx}{dy}$ входять в рівняння у першому степені, то воно є лінійним. Підстановка (4.3) запишеться так:

$$x = v(y) e^{-\int p(y) dy} = v e^{-\int \frac{1}{y} dy} = v e^{\ln y} = v y.$$

Загальний розв'язок: $x = Cy - y \cos y$.

Задача 8 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні інтеграли рівнянь:

1) $t dx + (x - t \sin t) dt = 0;$

2) $2y \frac{dx}{dy} + x = 2y^3;$

3) $(y^2 + 1) \frac{dx}{dy} + 2xy = 2y^2.$

Вказівка. Кожне з цих рівнянь лінійне відносно x і $\frac{dx}{dy}$. Шукана функція - x , незалежна змінна - y . Перш ніж інтегрувати обидві частини рівняння, потрібно розділити на коефіцієнт при $\frac{dx}{dy}$.

Відповідь. 1) $x = \frac{C}{t} + \frac{\sin t}{t} - \cos t;$

2) $x = \frac{C}{\sqrt{y}} + \frac{2}{7} y^3;$

3) $x = \frac{2}{3} \frac{y^3 + C}{y^2 + 1}.$

Задача 9. Знайти загальні інтеграли рівнянь:

1) $y' - \frac{2x+1}{x^2+x+1} y = \cos x - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \sin x;$

2) $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x - \frac{x^2 \cos x}{\sin x};$

3) $y' - \frac{2}{x} y = \frac{e^x (x-2)}{x}.$

Вказівка. У третьому рівнянні при інтегруванні частинами, яке треба буде застосувати, два інтеграли взаємно знищуються. Інтегрувати частинами доведеться тільки один раз.

Відповідь. 1) $y = C(x^2 + x + 1) + \sin x;$

2) $y = C \sin x + x^2;$

3) $y = Cx^2 + e^x.$

4.2. Рівняння Бернуллі

Якщо праву частину лінійного рівняння (1) помножити на y^n за умови, що n — будь-яке дійсне число, окрім нуля і одиниці ($n \neq 0$ і $n \neq 1$), то одержимо рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \quad (4.9)$$

Воно називається *рівнянням Бернуллі*.

Оскільки $n \neq 0$ і $n \neq 1$, то це рівняння не є лінійним.

Після множення його обох частин на y^{-n} і підстановки $y^{1-n} = z$, де $z = z(x)$ — нова шукана функція, воно приводиться до лінійного, інтеграцією якого ми вже займалися.

Перетворення рівняння Бернуллі в лінійне виконуємо в такій послідовності:

1) помножимо обидві частини рівняння на y^{-n} ;

2) введемо підстановку $y^{1-n} = z$. Обидві частини цієї рівності продиференціюємо: $(1-n)y^{-n}y' = z'$; $y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}$;

3) одержане рівняння проінтегруємо як лінійне за допомогою підстановки (4.3), в якій замість y треба писати z ;

4) повертаємося до шуканої функції, замінюючи z на y^{1-n} .

Детально ми розглядаємо розв'язок тільки одного рівняння Бернуллі і для самостійного розв'язання пропонуємо 5 рівнянь, враховуючи велике число вправ, виконаних при інтегруванні лінійних рівнянь.

Задача 10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - y(2y \ln x - 1) = 0.$$

Розв'язання. Приведемо рівняння до виду (4.9):

$$y' + \frac{1}{x}y = 2\frac{\ln x}{x}y^2$$

(обидві частини рівняння ми розділили на x і доданок, що містить y у першому степені, залишили в лівій частині рівняння).

1) Обидві частини рівняння помножимо на y^{-2} :

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = 2\frac{\ln x}{x}. \quad (4.10)$$

2) Зробимо тепер підстановку

$$y^{-1} = z. \quad (4.11)$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності і пам'ятаючи, що y є функція x , одержимо

$$-y^{-2}y' = z', \quad y^{-2}y' = -z'.$$

Роблячи ці заміни в (4.10), одержимо рівняння

$$-z' + \frac{1}{x}z = 2\frac{\ln x}{x},$$

або

$$z' - \frac{1}{x}z = -2\frac{\ln x}{x},$$

яке є лінійним відносно z і z' .

Щоб зробити підстановку (4.3), обчислимо спочатку інтеграл, що в неї входить

$$\text{У нас } p(x) = -\frac{1}{x}; \quad -\int p(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x; \quad e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln x} = x.$$

Підстановка: $z = vx$.

$$\begin{array}{l|l} 1 & z' = v'x + v \\ -\frac{1}{x} & z = vx \\ \hline & -2\frac{\ln x}{x} = v'x \end{array}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2\frac{\ln x}{x^2}; \quad dv = -2\frac{\ln x}{x^2}dx;$$

$$v = -2\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -2\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2}\right) = 2\frac{\ln x}{x} + 2\frac{1}{x} + C;$$

$$\begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dt = \frac{dx}{x^2} & t = -\frac{1}{x} \end{array}$$

$$z = vx = \left(2\frac{\ln x}{x} + 2\frac{1}{x} + C\right)x; \quad z = Cx + 2(\ln x + 1).$$

Щоб повернутися до початкової шуканої функції, скористаємося зробленою підстановкою (4.11) й одержимо

$$y^{-1} = Cx + 2(\ln x + 1).$$

Задача 11 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні розв'язки рівняння:

$$1) \quad x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + xy^3 = a^2;$$

$$2) \quad xy' - y^2 \ln x + y = 0;$$

$$3) \quad y' - \frac{1}{x}y = y^2;$$

$$4) \quad (x^2 - 4)y' - 4y = -(x + 2)y^2;$$

$$5) \quad y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}.$$

Вказівка. Перш ніж робити будь-які перетворення в рівняннях 1, 2 і 4, слід розділити обидві частини рівняння на коефіцієнт при y' .

Відповідь. 1) $y^3 = \frac{C}{2x^3} + \frac{3a^2}{2x};$

$$2) \quad \frac{1}{y} = 1 + \ln x + Cx;$$

$$3) \quad y = \frac{2x}{x^2 + C};$$

$$4) \quad \frac{1}{y} = \frac{x+2}{x-2} [C + \ln(x+2)];$$

$$5) \quad \sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1-x^2}{3} . +$$

4.3. Рівняння Ріккаті

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x) \quad (4.12)$$

називається *рівнянням Ріккаті*. У загальному випадку воно не розв'язується в квадратурах. Якщо ж відомий один його частинний розв'язок $y_1(x)$, то заміною

$$y = y_1(x) + z, \quad (4.13)$$

рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі і таким чином може бути розв'язаним в квадратурах.

Іноді частинний розв'язок вдається підібрати, виходячи з виду вільного члена $r(x)$. Наприклад, для рівняння $y' + y^2 = x^2 - 2x$ у лівій частині будуть члени, подібні до членів в правій частині, якщо узяти $y = ax + b$. Підставляючи в рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при подібних членах, знайдемо a і b (якщо частинний розв'язок вказаного виду існує). Інший приклад: для рівняння $y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$ ті ж самі міркування спонукають нас шукати частинний розв'язок

у вигляді $y_1 = \frac{a}{x}$. Підставляючи $y_1 = \frac{a}{x}$ у рівняння, знайдемо постійну a .

Рівняння Ріккаті виду

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \quad (4.14)$$

де A , B і C – постійні числа, причому $(B+1)^2 \geq 4AC$, має частинний розв'язок вигляду

$$y_1 = \frac{a}{x}. \quad (4.15)$$

Рівняння (14) є також узагальнено-однорідним рівнянням, в якому $k = -1$ й, отже, підстановкою

$$y = \frac{z}{x}$$

завжди зводиться до рівняння зі змінними, що розділяються.

Рівняння Ріккаті вигляду

$$y' = a \frac{y^2}{x} + \frac{1}{2} \frac{y}{x} + c \quad (4.16)$$

або

$$xy' - \frac{1}{2}y - ay^2 = cx \quad (4.16')$$

підстановкою

$$y = z\sqrt{x} \quad (4.17)$$

зводиться до рівняння зі змінними, що розділяються

$$\sqrt{x}z' = az^2 + c.$$

Спеціальне рівняння Ріккаті вигляду

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^m \quad (4.18)$$

у разі, коли $m=0$, $m=-2$ інтегрується в елементарних функціях. Воно інтегрується в елементарних функціях також при всіх m , для яких

$$\frac{m}{2m+4} = k \quad (k - \text{ціле число}), \quad (4.19)$$

бо (якщо $m \neq 0$, $m \neq -2$) його можна привести до виду (4.16').

Дійсно, вводячи замість x й y нові змінні t і $z = z(t)$ за формулами

$$y = \frac{z}{x}, \quad x^{m+2} = t,$$

одержимо рівняння вигляду

$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t \quad \left(\alpha = k - \frac{1}{2} \right),$$

яке зводиться до рівняння вигляду (16') за допомогою послідовного застосування підстановок

$$z = \frac{t}{a+u}, \quad a = \frac{1+\alpha}{\gamma} \quad \text{або} \quad z = a + \frac{t}{u}, \quad a = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad (4.20)$$

які відповідно збільшують або зменшують число α на одиницю.

Рівняння Ріккаті (4.12) за допомогою підстановки виду

$$y = \alpha(x)z \quad (4.21)$$

можна звести до такого рівняння Ріккаті, в якому коефіцієнт при квадраті шуканої функції дорівнює $+1$ або -1 .

Підстановкою вигляду

$$y = z + \beta(x) \quad (4.22)$$

можна, не міняючи коефіцієнта при квадраті шуканої функції, зробити коефіцієнт при шуканій функції рівним нулю.

Комбінуючи вказані підстановки, будь-яке рівняння Ріккаті можна звести до виду

$$y' = \pm y^2 + r(x).$$

Якщо при цьому виявиться, що $r(x) = Bx^m$, то одержимо спеціальне рівняння Ріккаті.

Задача 12. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' = -y^2 + 1 + x^2.$$

Розв'язання. Очевидно, що $y_1 = x$ є частинний розв'язок. Вважаючи

$$y = x + \frac{1}{z},$$

одержуємо

$$z' - 2xz = 1,$$

звідки

$$z = e^{x^2} \left(C + \int e^{-x^2} dx \right).$$

Отже,

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2} dx}.$$

Задача 13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}. \quad (4.23)$$

Розв'язання. Це рівняння вигляду (4.14). Шукатимемо його частинний розв'язок у вигляді

$$y_1 = \frac{a}{x}.$$

Підставляючи y_1 в рівняння (4.23), одержуємо

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{a^2}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}, \quad a^2 + 2a + 1 = 0,$$

звідки $a = -1$. Отже,

$$y_1 = -\frac{1}{x}.$$

Вважаючи тепер

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z},$$

дійдемо лінійного рівняння

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2}.$$

Інтегруючи його, знаходимо

$$z = \frac{x}{2}(C - \ln|x|).$$

Тому

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x(C - \ln|x|)} +$$

Задача 14. Проінтегрувати спеціальне рівняння Ріккати

$$y' = y^2 + x^{-4}. \quad (4.24)$$

Розв'язання. Тут $m = -4$, умова (4.19) виконана, причому $k = 1$. Застосовуючи підстановки

$$y = \frac{z}{x}, \quad x^{-2} = t \quad [z = z(t)],$$

будемо мати

$$tz' + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t \quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\right).$$

Щоб звести це рівняння до виду (4.16'), треба застосувати один раз другу з підстановок (4.20), тобто

$$z = -1 + \frac{t}{u},$$

після чого одержимо

$$tu' - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}t.$$

Це рівняння виду (4.16'). Вважаючи $u = v\sqrt{t}$, знаходимо

$$\sqrt{t}v' = \frac{1+v^2}{2},$$

звідки

$$v = \operatorname{tg}(\sqrt{t} + C) \quad \left(-C - \frac{\pi}{2} < \sqrt{t} < -C + \frac{\pi}{2}\right).$$

Отже,

$$u = \sqrt{t} \operatorname{tg}(\sqrt{t} + C), \quad z = -1 + \sqrt{t} \operatorname{ctg}(\sqrt{t} + C).$$

Тому загальним розв'язком рівняння (4.24) буде

$$y = \frac{1}{x^2} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{x} + c \right) - \frac{1}{x}.$$

Задача 15 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні розв'язки наступних рівнянь, що мають частинні розв'язки вигляду $y = ax + b$:

1) $y' = y^2 - xy - x$;

2) $xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x$.

Відповідь. 1) $y_1 = x + 1$, $y = x + 1 + e^{\frac{x^2}{2} + 2x} \left(C - \int e^{\frac{x^2}{2} + 2x} dx \right)^{-1}$;

2) $y_1 = x$, $y = x + \frac{1}{1 + Cx}$.

Задача 16 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні розв'язки наступних рівнянь:

1) $y' + y^2 = -\frac{1}{4x^2}$;

2) $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$;

3) $x^2 y' + (xy - 2)^2 = 0$;

4) $y' = y^2 + \frac{1}{x^2}$.

Відповідь. 1) $y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x(C + \ln|x|)}$;

2) $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(C - \ln x)}$;

3) $y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + C}$;

4) $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2xy + 1}{\sqrt{3}} = \ln|x| + C$.

Задача 17 (для самостійного розв'язання).

Проінтегрувати наступні спеціальні рівняння Ріккаті:

1) $y' = y^2 + x^{-\frac{4}{3}}$;

2) $y' = -y^2 + x^{-\frac{8}{3}}$;

3) $y' = -y^2 + x^{-4}$;

4) $y' = y^2 + x^{-\frac{8}{5}}$.

Відповідь. 1) $y = \frac{u}{x}, \quad x^{\frac{2}{3}} = t, \quad u = \frac{t}{-\frac{1}{3} + v}, \quad v = w\sqrt{t}, \quad w = \operatorname{tg}(C - 3\sqrt{t});$

2) $y = \frac{u}{x}, \quad x^{-\frac{2}{3}} = t, \quad u = 1 + \frac{t}{v}, \quad v = \frac{1}{3} + \frac{t}{w}, \quad w = z\sqrt{t},$

$$z = \frac{1 + Ce^{6\sqrt{t}}}{1 + Ce^{6\sqrt{t}}}.$$

Задача 18 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні розв'язки наступних рівнянь, звівши коефіцієнт при квадраті невідомої функції до одиниці:

1) $xy' = x^2y^2 - (2x+1)y + 1;$

2) $xy' = x^2y^2 - y + 1.$

Відповідь. 1) $y = \frac{x+C-1}{x(x+C)};$

2) $xy = \operatorname{tg}(x+C) \quad \left(-\frac{\pi}{2} - C < x < \frac{\pi}{2} - C\right).$

Задача 19 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні розв'язки наступних рівнянь, звівши їх до виду, що не містить шуканої функції:

1) $y' = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4;$

2) $y' = y^2 - 2x^2y + x^4 + 2x + 4.$

Відповідь. 1) $y = \operatorname{tg}(4x+C) + \frac{x^2}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{C}{4} < x < \frac{\pi}{8} - \frac{C}{4}\right);$

2) $y = 2\operatorname{tg}(2x+C) + x^2 \quad \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2} < x < \frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}\right).$

Задача 20 (для самостійного розв'язання).

Знайти загальні розв'язки наступних рівнянь, зводячи їх до вигляду $y' = y^2 + c$:

1) $xy' = x^2y^2 + y + \frac{2}{x^2} + 2;$

2) $xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2.$

Відповідь. 1) $y = \frac{\sqrt{2}}{x} \operatorname{tg}(\sqrt{2}x+C) - \frac{1}{x^2} \quad \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{C}{\sqrt{2}} < x < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{C}{\sqrt{2}}\right);$

2) $y = 2x\operatorname{tg}(2x+C) + 2 \quad \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2} < x < \frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}\right).$

Тема 5. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

5.1. Рівняння в повних диференціалах

Рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (5.1)$$

називають *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, тобто

$$dU(x, y) \equiv \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Аби рівняння (5.1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно й достатньо, щоб

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (5.2)$$

Усі розв'язки рівняння в повних диференціалах задовольняють умову $U(x, y) = C$, де C — довільна стала.

Щоб знайти функцію $U(x, y)$, скористаємося рівностями

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \quad (5.3)$$

Інтегруючи першу з цих рівностей по x , визначимо функцію $U(x, y)$ із точністю до довільної диференційованої функції $\varphi(y)$:

$$U(x, y) = \int M(x, y)dx = \Phi(x, y) + \varphi(y). \quad (5.4)$$

Диференціюючи (5.4) по y з урахуванням другої з рівностей (5.3), дістанемо рівняння для визначення функції $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Задача 1. Розв'язати рівняння

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0.$$

Розв'язання. Маємо:

$$M(x, y) = 2xy + 3y^2, \quad N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Отже,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

тобто ліва частина даного рівняння є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

З першого рівняння знаходимо

$$U(x, y) = x^2 y + 3xy^2 + \varphi(y).$$

Останню рівність диференціюємо по y :

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = x^2 + 6xy + \frac{d\varphi(y)}{dy} = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

тобто

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = -3y^2.$$

Звідси

$$\varphi(y) = -y^3 + C_1.$$

Тому

$$U(x, y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + C_1.$$

Остаточно маємо

$$x^2 y + 3xy^2 - y^3 = C. +$$

Задача 2. Розв'язати рівняння

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{\partial \left(2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) \right)}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}} = \frac{\partial \left(-\sqrt{x^2 - y} \right)}{\partial x},$$

то дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Функцію $U(x, y)$ знаходимо з рівнянь

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}), \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y}. \quad (5.5)$$

Інтегруємо по x перше з цих рівнянь (вважаючи y сталою):

$$U(x, y) = \int (2x + 2x\sqrt{x^2 - y}) dx = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} + \varphi(y).$$

Підставивши $U(x, y)$ у друге з рівнянь (5.5), дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} + \varphi(y) \right) &= -\sqrt{x^2 - y}, \\ -\sqrt{x^2 - y} + \frac{d\varphi(y)}{dy} &= -\sqrt{x^2 - y}, \quad \varphi(y) = \text{const}. \end{aligned}$$

Отже,

$$U(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}}$$

і розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C,$$

або

$$y = x^2 - \left[\frac{3}{2}(C - x^2) \right]^{\frac{2}{3}}.$$

Задача 3 (для самостійного розв'язання).

Розв'язати рівняння:

$$1) \quad e^{-y} dx + (1 - xe^{-y}) dy = 0;$$

- 2) $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0;$
- 3) $(12x + 5y - 9) dx + (5x + 2y - 4) dy = 0;$
- 4) $(3xy^2 - x^2) dx + (3x^2y - 6y^2 - 1) dy = 0;$
- 5) $(\ln y - 2x) dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right) dy = 0;$
- 6) $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0.$

Відповідь. 1) $xe^{-y} + y = C;$

- 2) $y^2 + \frac{x^2 \cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} = C;$
- 3) $6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 4y = C;$
- 4) $6y + 12y^3 - 9x^2y^2 + 2x^3 = C;$
- 5) $x \ln y - x^2 - y^2 = C;$
- 6) $\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = C.$

5.2. Інтегрувальний множник

Інтегрувальним множником для рівняння (5.1) називають таку функцію $m(x, y)$, після множення на яку рівняння (5.1) перетворюється на рівняння в повних диференціалах.

Якщо $m(x, y)$ — інтегрувальний множник рівняння (5.1), то рівняння

$$m(x, y)M(x, y)dx + m(x, y)N(x, y)dy = 0$$

є рівнянням у повних диференціалах і тому

$$\frac{\partial}{\partial y}(m(x, y)M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(m(x, y)N(x, y))$$

тобто інтегрувальний множник $m(x, y)$ є розв'язком рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$m(x, y) \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.6)$$

$$= N(x, y) \frac{\partial m(x, y)}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial m(x, y)}{\partial y}.$$

Іноді рівняння (5.6) спрощується й інтегрувальний множник для рівняння (5.1) легко знайти. Розглянемо кілька таких випадків.

Випадок 1. Якщо рівняння (5.1) має інтегрувальний множник, що залежить лише від x , тобто $m(x, y) = m(x)$, то з (5.6) дістаємо

$$\frac{1}{m(x)} \frac{dm(x)}{dx} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}.$$

Випадок 2. Якщо рівняння (5.1) має інтегрувальний множник, що залежить лише від y , тобто $m(x, y) = m(y)$, тоді

$$\frac{1}{m(y)} \frac{dm(y)}{dy} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{-M(x, y)}.$$

Випадок 3. Якщо рівняння (5.1) має інтегрувальний множник, що залежить від деякої відомої функції $\omega(x, y)$, тобто $m(x, y) = m(\omega(x, y))$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(\omega(x, y))} \frac{dm(\omega(x, y))}{d\omega} &= \\ &= \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Нехай $m_0(x, y)$ - інтегрувальний множник рівняння (5.1) і $U_0(x, y) = C$ - інтеграл цього рівняння, який йому відповідає. Тоді всі інтегрувальні множники рівняння (5.1) виражаються формулою

$$m(x, y) = m_0(x, y) \varphi(U_0(x, y)),$$

де $\varphi(z)$ - довільна неперервно диференційовна функція. Використовуючи це твердження, інтегрувальний множник іноді можна знайти так. Запишемо рівняння (5.1) у вигляді

$$M_1(x, y)dx + N_1(x, y)dy + M_2(x, y)dx + N_2(x, y)dy = 0$$

і припустимо, що знайдено інтегровальні множники $m_1(x, y)$ і $m_2(x, y)$ та інтеграли $U_1(x, y) = C$, $U_2(x, y) = C$, відповідно, рівнянь

$$M_1(x, y)dx + N_1(x, y)dy = 0$$

й

$$M_2(x, y)dx + N_2(x, y)dy = 0.$$

Тоді всі інтегровальні множники першого з цих рівнянь мають вигляд

$$m(x, y) = m_1(x, y)\varphi_1(U_1(x, y)),$$

а другого - вигляд

$$m(x, y) = m_2(x, y)\varphi_2(U_2(x, y)),$$

де $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$ — довільні диференційовні функції. Якщо функції $\varphi_1^*(z)$ й $\varphi_2^*(z)$ можна дібрати так, щоб

$$m_1(x, y)\varphi_1^*(U_1(x, y)) = m_2(x, y)\varphi_2^*(U_2(x, y)),$$

тоді

$$m(x, y) = m_1(x, y)\varphi_1^*(U_1(x, y))$$

- інтегровальний множник рівняння (5.1).

Задача 4. Розв'язати рівняння

$$x \frac{dy}{dx} = (3x^2 \cos y - \sin y) \cos y,$$

коли відомо, що воно має інтегровальний множник як функцію однієї змінної x або y .

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y dx - x dy = 0 \quad (5.8)$$

і знайдемо різницю

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} &= -3x^2 \cdot 2 \cos y \sin y - \cos 2y + 1 = \\ &= -2(3x^2 \cos y - \sin y) \sin y.\end{aligned}$$

Якщо цей вираз розділити на $-M(x, y)$, то частка буде функцією лише від y . Отже, інтегрувальний множник є функцією від y . Знайдемо його з рівняння (див. випадок 2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(y)} \frac{dm(y)}{dy} &= \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{-M(x, y)} = 2 \operatorname{tg} y, \\ \frac{dm(y)}{m(y)} &= 2 \operatorname{tg} y dy, \quad \ln |m(y)| = -2 \ln |\cos y| + \ln C.\end{aligned}$$

Виберемо $m(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$. Помноживши рівняння (5.8) на $\frac{1}{\cos^2 y}$, дістанемо рівняння в повних диференціалах:

$$(3x^2 - \operatorname{tg} y) dx - \frac{x}{\cos^2 y} dy = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} &= 3x^2 - \operatorname{tg} y, \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{\cos^2 y}, \\ U(x, y) &= \int (3x^2 - \operatorname{tg} y) dx = x^3 - x \operatorname{tg} y + \varphi(y), \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - x \operatorname{tg} y + \varphi(y)) &= -\frac{x}{\cos^2 y}, \\ -\frac{x}{\cos^2 y} + \varphi'(y) &= -\frac{x}{\cos^2 y}, \quad \varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = \operatorname{const}.\end{aligned}$$

Отже,

$$U(x, y) = x^3 - x \operatorname{tg} y, \quad x^3 - x \operatorname{tg} y = C.$$

Зазначимо, що при діленні на $\cos^2 y$ були втрачені розв'язки заданого рівняння $y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. Розв'язати рівняння

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0.$$

Розв'язання. З'ясуємо, чи має дане рівняння інтегрувальний множник як функцію однієї змінної. Обчислимо

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{y^2} - 2y - \frac{1}{y} - \frac{2x}{y^2} = -\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right).$$

Отже, функція $\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}$ залежить лише від x , тому

інтегрувальний множник можна знайти з рівняння

$$\frac{1}{m(x)} \frac{dm(x)}{dx} = -\frac{1}{x}, \quad \frac{dm(x)}{m(x)} + \frac{dx}{x} = 0,$$

тобто $m(x) = \frac{1}{x}$.

Помноживши задане рівняння на $\frac{1}{x}$, дістанемо рівняння в повних диференціалах:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$$

Записавши його у вигляді

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{y} + 2y\right)dy - \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0,$$

$$d\left(\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y}\right) = 0,$$

отримаємо

$$\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y} = C . +$$

Задача 6. Розв'язати рівняння

$$ydx - (x + x^2 + y^2)dy = 0,$$

коли відомо, що воно має інтегрувальний множник, який залежить від $x^2 + y^2$.

Розв'язання. Інтегрувальний множник знайдемо з рівняння (5.7), поклавши в ньому $\omega(x, y) = x^2 + y^2$. Маємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m(\omega(x, y))} \frac{dm(\omega(x, y))}{d\omega} = \\ & = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y}} = \\ & = \frac{1+1+2x}{-(x+x^2+y^2)2x-y \cdot 2y} = \frac{2(1+x)}{-2(1+x)(x^2+y^2)} = -\frac{1}{\omega(x, y)}, \\ & \frac{dm(\omega(x, y))}{m(\omega(x, y))} + \frac{d\omega(x, y)}{\omega(x, y)} = 0, \quad m(\omega(x, y)) = \frac{1}{\omega(x, y)} = \frac{1}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Помноживши вихідне рівняння на $\frac{1}{x^2+y^2}$, дістанемо рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{ydx}{x^2+y^2} - \left(\frac{x}{x^2+y^2} + 1 \right) dy = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -\left(\frac{x}{x^2+y^2} + 1 \right),$$

$$U(x, y) = \int \frac{y}{x^2+y^2} dx = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \varphi(y) \right) = - \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + 1 \right),$$

$$-\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \frac{x}{y^2} + \frac{d\varphi(y)}{dy} = -\frac{x}{x^2 + y^2} - 1,$$

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = -1, \quad \varphi(y) = -y,$$

$$U(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - y, \quad \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - y = C, \quad y = 0. +$$

Задача 7. Розв'язати рівняння

$$(x^3 - xy^2 - y)dx + (x^2y - y^3 + x)dy = 0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$x(x^2 - y^2)dx + y(x^2 - y^2)dy + xdy - ydx = 0.$$

Розглянемо рівняння

$$x(x^2 - y^2)dx + y(x^2 - y^2)dy = 0. \quad (5.9)$$

Його інтегрувальний множник

$$m_1^0(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}.$$

Отже,

$$xdx + ydy = 0, \quad x^2 + y^2 = C.$$

Тому всі інтегрувальні множники рівняння (5.9) виражаються формулою

$$m_1(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2} \varphi_1(x^2 + y^2),$$

де $\varphi_1(z)$ - довільна диференційовна функція.

Рівняння

$$x dy - y dx = 0 \quad (5.10)$$

має інтегрувальний множник

$$m_2^0(x, y) = \frac{1}{xy}.$$

Отже,

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \frac{y}{x} = C.$$

Тому всі інтегрувальні множники рівняння (5.10) виражаються формулою

$$m_2(x, y) = \frac{1}{xy} \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right),$$

де $\varphi_2(z)$ — довільна диференційована функція.

Користуючися тим, що $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$ - довільні функції, доберемо їх так, аби виконувалася рівність

$$\frac{1}{x^2 - y^2} \varphi_1(x^2 + y^2) = \frac{1}{xy} \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Це буде тоді, коли, наприклад,

$$\varphi_1(z) = 1, \quad \varphi_2(z) = \frac{z}{1 - z^2}.$$

Вибравши так функції $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$ знайдемо інтегрувальний множник заданого рівняння:

$$m(x, y) = m_1(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2} = m_2(x, y) = \frac{1}{xy} \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Помноживши обидві частини заданого рівняння

$$m(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2},$$

дістанемо рівняння в повних диференціалах:

$$\left(x - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2 - y^2},$$

$$U(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| + \varphi(y) \right) = y + \frac{x}{x^2 - y^2},$$

$$\frac{x}{x^2 - y^2} + \varphi'(y) = y + \frac{x}{x^2 - y^2},$$

$$\varphi'(y) = y, \quad \varphi(y) = \frac{1}{2} y^2,$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right|,$$

$$\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| = C.$$

Задача 8 (для самостійного розв'язання).

Проінтегрувати наступні рівняння, для яких $m = m(x)$ або $m = m(y)$:

- 1) $\left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0;$
- 2) $(x^2 + y)dx - xdy = 0;$
- 3) $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0;$
- 4) $(xy^2 + y)dx - xdy = 0;$
- 5) $(x \cos y - y \sin y)dy + (x \sin y + y \cos y)dx = 0.$

Відповідь. 1) $x^2 - y^2 + 2xy = C;$

$$2) \quad x - \frac{y}{x} = C;$$

$$3) \quad x^2 + y - \frac{x}{y} + \ln|y| = C;$$

$$4) \quad \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C;$$

$$5) \quad e^x (x \sin y - \sin y + y \cos y) = C.$$

Задача 9 (для самостійного розв'язання).

Розв'язати наступні рівняння за допомогою інтегрувальних множників одного із видів: $m = m(x + y)$, $m = m(xy)$, $m = m(x^2 - y^2)$, $m = m(x^2 + y^2)$:

$$1) \quad x^2 y^3 + y + (x^3 y^2 - x) y' = 0;$$

$$2) \quad x \left(4 + \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dx - y \left(4 - \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dy = 0;$$

$$3) \quad (y + x^2) dy + (x - xy) dx = 0;$$

$$4) \quad \left[2y + \frac{1}{(x + y)^2} \right] dx + \left[3y + x + \frac{1}{(x + y)^2} \right] dy = 0.$$

Відповідь:

$$1) \quad x^2 y^2 + 2 \ln \frac{x}{y} = C;$$

$$2) \quad 2(x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 = C;$$

$$3) \quad x^2 + y^2 = C(y - 1)^2;$$

$$4) \quad y^3 + x^2 y + 2xy^2 + \ln|x + y| = C.$$

Тема 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

6.1. Метод алгебри

Диференціальне рівняння першого порядку, *не розв'язане відносно похідної*, має вигляд

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (6.1)$$

Для якісного дослідження таке рівняння бажано розв'язати відносно похідної $y' = \frac{dy}{dx}$, тобто дістати одне або кілька рівнянь типу

$$y' = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (6.2)$$

Кожне з цих рівнянь треба вирішити.

Кажуть, що задача Коші для рівняння (6.1) з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ має єдиний розв'язок [точка (x_0, y_0) є точкою єдиності розв'язку], якщо не існує двох інтегральних кривих рівняння (6.1), які проходили б через точку (x_0, y_0) і мали б у цій точці спільну дотичну. В протилежному разі в точці (x_0, y_0) єдиність розв'язку задачі Коші порушується [точка (x_0, y_0) є точкою неєдиності розв'язку задачі Коші].

Достатні умови існування й єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (6.1) визначає така теорема.

Теорема. Нехай функція $F(x, y, y')$ в околі точки (x_0, y_0, y'_0) , де y'_0 — один із коренів рівняння $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, неперервна по x і неперервно диференційовна по y і y' , а її похідна по y' відмінна від нуля:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, y'_0)}{\partial y'} \neq 0.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ задачі Коші $F(x, y, y') = 0$, $y(x_0) = y_0$, визначений у досить малому околі точки x_0 для якого $\varphi'(x_0) = y'_0$.

Задача 1. Розв'язати рівняння

$$(y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x.$$

Розв'язання. Оскільки

$$(y')^3 - 2x(y')^2 + y' - 2x = (y' - 2x)((y')^2 + 1),$$

то дане рівняння еквівалентне рівнянню

$$y' - 2x = 0.$$

Його розв'язки мають вигляд

$$y = x^2 + C.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння

$$(y')^2 + y(y - x)y' - xy^3 = 0.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(y' + y^2)(y' - xy) = 0.$$

Отже, вихідне рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$y' + y^2 = 0 \quad \text{й} \quad y' - xy = 0.$$

Розв'язки першого з них

$$y = 0 \quad \text{й} \quad y = \frac{1}{x + C},$$

а другого -

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Остаточно

$$\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y - \frac{1}{x + C}\right) = 0.$$

Задача 3. Розв'язати рівняння

$$(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь, розв'язаних відносно похідної:

$$y' + \sin x = 0 \quad \text{й} \quad y' - 2xy = 0.$$

Розв'язками першого з цих рівнянь є

$$y = \cos x + C,$$

а другого -

$$y = Ce^{x^2}.$$

Тому розв'язки заданого рівняння

$$(y - \cos x - C)(ye^{-x^2} - C) = 0. +$$

Задача 4. Розв'язати рівняння

$$(y')^2 - 1 = 0$$

і зобразити його інтегральні криві. З'ясувати, чи порушується в яких-небудь точках площини xOy єдиність розв'язку цього рівняння.

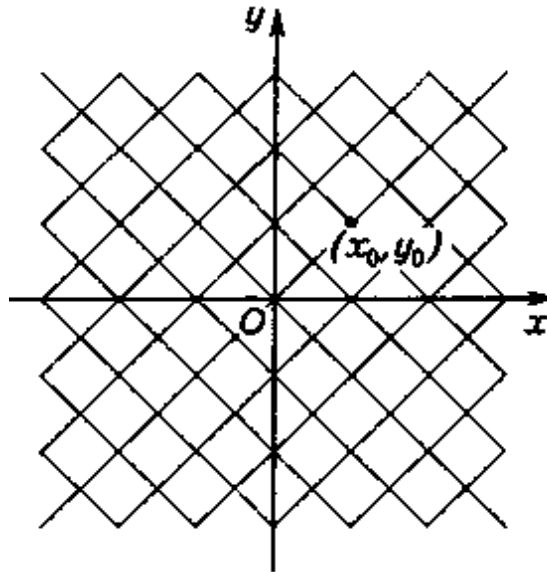


Рисунок 6.1.

Розв'язання. Дане рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь

$$y' = 1 \quad \text{й} \quad y' = -1.$$

Розв'язками цих рівнянь є функції

$$y = x + C \quad \text{й} \quad y = -x + C$$

відповідно. Через кожну точку (x_0, y_0) площини xOy проходять дві інтегральні криві заданого рівняння:

$$y - y_0 = x - x_0 \quad \text{й} \quad y - y_0 = -x + x_0.$$

Оскільки ці інтегральні криві перетинаються під прямим кутом, то єдиність розв'язку не порушується (рис. 6.1).

Задача 5. Визначити, в яких точках площини xOy порушується єдиність розв'язків рівняння

$$(y')^2 - (y + x^2)y' + x^2y = 0.$$

Записати по три різних розв'язки даного рівняння, які проходять через точки $(0, 0)$ і $(1, 1)$.

Розв'язання. Дане рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$y' = y \quad \text{й} \quad y' = x^2. \quad (6.3)$$

Через кожну точку площини xOy проходить по одній інтегральній кривій кожного з цих рівнянь. Єдиність розв'язків заданого рівняння порушується в тих точках площини, в яких дотичні до інтегральних кривих рівнянь (3) збігаються, тобто в точках, в яких однакові праві частини рівнянь (3). Це точки параболи $y = x^2$.

Щоб знайти відповідь на друге питання задачі, розв'яжемо рівняння (3). Інтегруючи ці рівняння, дістаємо

$$y = Ce^x \quad \text{й} \quad y = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Запишемо розв'язки вихідного рівняння, які проходять через вказані точки. Через точку $(0, 0)$ проходять, наприклад, розв'язки

$$y_1(x) \equiv 0, \quad y_2(x) = \frac{1}{3}x^3, \quad y_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{3}x^3 & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

а через точку $(1, 1)$ - розв'язки

$$y_1(x) = e^{x-1}, \quad y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}, \quad y_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3} & \text{при } x < 1, \\ e^{x-1} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Задача 6 (для самостійного розв'язання).

Розв'язати рівняння:

- 1) $y'^2 - y^2 = 0$;
- 2) $8y'^3 = 27y$;
- 3) $(y' + 1)^3 = 27(x + y)^2$;
- 4) $y^2(y'^2 + 1) = 1$.

Відповідь: 1) $y = Ce^{\pm x}$;

$$2) \quad y^2 = (x + C)^3, \quad y = 0;$$

$$3) \quad y + x = (x + C)^3, \quad y = -x;$$

$$4) \quad (x + C)^2 + y^2 = 1, \quad y = \pm 1.$$

6.2. Метод введення параметра

Проте рівняння (6.1) не завжди можна розв'язати відносно y' в явному вигляді. На практиці його найчастіше розв'язують *методом введення параметра*. Розглянемо найпростіший варіант цього методу.

Припустимо, що рівняння (1) можна розв'язати відносно x або y . Наприклад, його можна записати у вигляді $y = f(x, y')$. Ввівши параметр $y' = p$, дістанемо $y = f(x, p)$. Взявши повний диференціал від обох частин цієї рівності й замінивши dy на pdx , дістанемо рівняння

$$pdx = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} dp,$$

тобто

$$M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0.$$

Якщо розв'язки останнього рівняння задані формулою $x = \Phi(p, c)$, то розв'язки рівняння (1) можна записати в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \Phi(p, c), \\ y = f(x, p). \end{cases}$$

Прикладами рівнянь, які можна розв'язати зазначеним методом, є рівняння Лагранжа

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

й рівняння Клеро

$$y = xy' + \psi(y').$$

Як і рівняння, розв'язані відносно похідної, рівняння типу (6.1) можуть мати особливі розв'язки, тобто такі, відповідна інтегральна крива яких складається з точок неєдності.

Якщо функція $F(x, y, y')$ неперервна по x і неперервно диференційовна по y і y' , то особливий розв'язок (якщо він існує) задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Тому, щоб знайти особливі розв'язки рівняння (6.1), із системи рівнянь (6.4) виключають y' , внаслідок чого дістають рівняння $\Psi(x, y) = 0$ так званої *дискримінантної кривої*. Для кожної вітки дискримінантної кривої необхідно перевірити, чи є ця вітка графіком деякого розв'язку рівняння (6.1), і якщо це так, то чи є цей розв'язок особливим. Якщо сім'я інтегральних кривих $\Phi(x, y, C) = 0$ рівняння (6.1) має обвідну $y = \varphi(x)$, то ця обвідна є особливою інтегральною кривою цього самого рівняння. Якщо функція $\Phi(x, y, C)$ неперервно диференційовна, то обвідна входить до складу дискримінантної кривої

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

Деяка вітка $y = \varphi(x)$ дискримінантної кривої є обвідною, якщо

$$\frac{\partial \Phi(x, \varphi(x), C)}{\partial x} \neq 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial \Phi(x, \varphi(x), C)}{\partial y} \neq 0.$$

У загальному випадку, щоб дізнатися, чи є вітка $y = \varphi(x)$ дискримінантної кривої обвідною (особливою інтегральною кривою), слід з'ясувати, чи дотикаються до неї в кожній точці криві сім'ї $\Phi(x, y, C) = 0$. Якщо ці криві є інтегральними кривими рівняння $F(x, y, y') = 0$, то інтегральні криві рівняння

$$F\left(x, y, \frac{y' \mp k}{1 \pm ky'}\right) = 0$$

перетинають криві даної сім'ї під однаковим кутом α , для якого $\operatorname{tg} \alpha = k$. Зокрема, інтегральні криві рівняння

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

ортогональні до кривих $\Phi(x, y, C) = 0$.

Задача 7. Розв'язати рівняння

$$y = (y')^2 e^{y'}.$$

Розв'язання. Введемо параметр

$$y' = p.$$

Тоді

$$y = p^2 e^p, \quad dy = (2pe^p + p^2 e^p) dp.$$

Крім того,

$$dy = p dx,$$

тому

$$p dx = p(2 + p) e^p dp.$$

Звідси

$$p = 0,$$

або

$$x = 2e^p + e^p(p - 1) + C = e^p(p + 1) + C.$$

Задача 8. Розв'язати рівняння

$$\ln y' + \sin y' - x = 0.$$

Розв'язання. Покладемо

$$y' = p.$$

Тоді

$$x = \ln p + \sin p.$$

Оскільки

$$dy = p dx,$$

тоді

$$dy = (1 + p \cos p) dp.$$

Звідси

$$y = p + \cos p + p \sin p + C.$$

Розв'язки даного рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x = \ln p + \sin p, \\ y = p + \cos p + p \sin p + C. \end{cases}$$

Задача 9. Розв'язати рівняння

$$y' \sin y' + \cos y' - y = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння можна розв'язати відносно y , тому, поклавши

$$y' = p,$$

маємо

$$y = p \sin p + \cos p.$$

Диференціюючи цю рівність по x , дістаємо

$$p = \frac{dp}{dx} \sin p + p \cos p \frac{dp}{dx} - \sin p \frac{dp}{dx}, \quad p = p \cos p \frac{dp}{dx}.$$

Із цього рівняння знаходимо

$$p = 0 \quad \text{й} \quad x = \sin p + C.$$

Отже,

$$y = 1 \quad \text{й} \quad \begin{cases} x = \sin p + C, \\ y = p \sin p + \cos p. \end{cases} +$$

Задача 10. Розв'язати рівняння

$$(y')^2 + (x + a)y' - y = 0.$$

Розв'язання. Уведемо параметр

$$y' = p.$$

Тоді

$$y = p^2 + (x + a)p.$$

Із рівностей

$$dy = p dx \quad \text{й} \quad dy = 2p dp + (x + a)dp + p dx$$

маємо

$$p dx = 2p dp + (x + a)dp + p dx, \quad (2p + x + a)dp = 0.$$

Звідси

$$p = C,$$

або

$$2p + x + a = 0.$$

Тому розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$y = (x + a)C + C^2 \quad \text{й} \quad \begin{cases} y = p^2 + (x + a)p, \\ 2p + x + a = 0. \end{cases}$$

Виключивши з останніх двох рівностей параметр p , дістанемо

$$y = (x + a)C + C^2 \quad \text{й} \quad y = -\frac{(x + a)^2}{4}.$$

Задача 11. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{(y')^2 + 1} + xy' - y = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння Клеро. Покладемо

$$y' = p.$$

Тоді

$$y = xp + \sqrt{1 + p^2}.$$

Диференціюючи останню рівність по x , дістаємо

$$\frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{p \frac{dp}{dx}}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Звідси

$$\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) \frac{dp}{dx} = 0, \quad x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

або

$$p = C.$$

Отже,

$$y = Cx + \sqrt{1+C^2} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y = xp + \sqrt{1+p^2}. \end{cases}$$

Виключивши з останніх двох рівностей параметр p , дістанемо

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

Задача 12. Розв'язати рівняння

$$(y')^2 - 2xy' + y = 0.$$

З'ясувати, чи має це рівняння особливі розв'язки.

Розв'язання. Покладемо

$$y' = p.$$

Тоді

$$y = 2xp - p^2.$$

Із рівностей

$$dy = p dx \quad \text{й} \quad dy = 2p dx + 2x dp - 2p dp$$

матимемо

$$p dx + 2(x - p) dp = 0.$$

Звідси

$$p = 0,$$

або

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 2.$$

Це лінійне рівняння. Розв'язавши його, отримаємо

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}.$$

Розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}, \\ y = \frac{1}{3}p^2 + \frac{2C}{p}. \end{cases}$$

Дослідимо, чи має це рівняння особливі розв'язки. Для визначення дискримінантної кривої складемо систему

$$\begin{cases} (y')^2 - 2xy' + y = 0, \\ 2y' - 2x = 0. \end{cases}$$

Виключивши з цих рівнянь y' , знайдемо дискримінантну криву $y = x^2$.

Безпосередньо перевіркою переконуємося, що функція $y = x^2$ не є розв'язком заданого рівняння, а отже, і його особливим розв'язком.

Таким чином, дане рівняння особливих розв'язків не має. +

Задача 13. Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y = x + 2y' - (y')^2.$$

Розв'язання. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} y - x - 2y' + (y')^2 = 0, \\ 2 - 2y' = 0 \end{cases}$$

знаходимо дискримінантну криву

$$y = x + 1.$$

Підставивши цю функцію в рівняння, дістанемо, що $y = x + 1$ є розв'язком.

Перевіримо, чи дотикаються до прямої $y = x + 1$ в кожній її точці інші інтегральні криві даного рівняння. Для цього розв'яжемо це рівняння. Поклавши

$$y' = p, \quad y = x + 2p - p^2,$$

зі співвідношень

$$dy = p dx \quad \text{й} \quad dy = dx + (2 - 2p) dp$$

дістанемо

$$(p-1)dx + 2(p-1)dp = 0.$$

Звідси

$$p = 1$$

або

$$x = -2p + C.$$

Тому розв'язками заданого рівняння є функції

$$y = x + 1 \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = -2p + C, \\ y = C - p^2. \end{cases}$$

Виключивши параметр p , дістанемо

$$y = x + 1, \quad y = C - \frac{(C - x)^2}{4}.$$

Умови дотику кривих $y = \varphi(x)$ і $y = \psi(x)$ у точці з абсцисою $x = x_0$ такі:

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0), \quad \varphi'(x_0) = \psi'(x_0).$$

Для розв'язків

$$y = x + 1 \quad \text{і} \quad y = C - \frac{(C - x)^2}{4}$$

ці умови запишемо у вигляді

$$x_0 + 1 = C - \frac{(C - x_0)^2}{4}, \quad 1 = \frac{C - x_0}{2}.$$

Із другої рівності знаходимо $C = 2 + x_0$. Підставивши значення C у перше рівняння, дістанемо

$$x_0 + 1 = 2 + x_0 - \frac{2^2}{4}, \quad x_0 + 1 = x_0 + 1.$$

Ця рівність справджується при всіх x_0 . Таким чином, при кожному x_0 пряма $y = x + 1$ у точці з абсцисою x_0 дотикається до однієї з парабол

$$y = C - \frac{(C - x)^2}{4},$$

а саме до тієї параболи, для якої $C = 2 + x_0$.

Отже, $y = x + 1$ — особливий розв'язок.

Задача 14. Розв'язати рівняння

$$8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x).$$

Виділити особливі розв'язки, якщо вони існують.

Розв'язання. Дане рівняння розв'яжемо відносно y :

$$y = \frac{8}{27}(y')^3 - \frac{4}{9}(y')^2 + x.$$

Введемо параметр

$$y' = p,$$

тобто

$$dy = p dx.$$

Тоді

$$y = \frac{8}{27}p^3 - \frac{4}{9}p^2 + x, \quad dy = \frac{8}{9}(p^2 - p)dp + dx.$$

Із рівностей

$$dy = p dx \quad \text{й} \quad dy = \frac{8}{9}(p^2 - p)dp + dx$$

дістаємо

$$\frac{8}{9}(p^2 - p)dp + (1 - p)dx = 0, \quad (p - 1)\left(\frac{8}{9}pdp - dx\right) = 0.$$

Звідси

$$p = 1$$

або

$$x = \frac{4}{9}p^2 + C.$$

Розв'язки даного рівняння мають вигляд

$$y = x - \frac{4}{27} \quad \text{й} \quad \begin{cases} x = \frac{4}{9}p^2 + C, \\ y = \frac{8}{27}p^3 + C. \end{cases}$$

Виключивши параметр p , остаточно знайдемо

$$y = x - \frac{4}{27} \quad \text{й} \quad y = (x - C)^{\frac{3}{2}} + C. \quad (6.5)$$

Дослідимо, чи є серед функцій (6.5) особливі розв'язки заданого рівняння. Складемо систему рівнянь для визначення дискримінантної кривої:

$$\begin{cases} 8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x), \\ 24(y')^2 - 24y' = 0. \end{cases}$$

Виключивши з цих рівнянь y' , знайдемо дискримінантну криву:

$$y = x \quad \text{й} \quad y = x - \frac{4}{27}.$$

Вітка $y = x$ дискримінантної кривої не є інтегральною кривою. Функція $y = x - \frac{4}{27}$ є розв'язком заданого рівняння. Перевіримо, чи дотикаються в кожній точці до прямої $y = x - \frac{4}{27}$ інші інтегральні криві. Умови дотику в цьому разі набирають вигляду

$$x_0 - \frac{4}{27} = (x_0 - C)^{\frac{2}{3}} + C, \quad 1 = \frac{3}{2}(x_0 - C)^{\frac{1}{2}}.$$

Ці умови задовольняють всі пари чисел (x_0, C) такі, що $x_0 - C = \frac{4}{9}$. Це означає, що в будь-якій точці (x_0, y_0) прямої $y = x - \frac{4}{27}$ до неї дотикається одна з кривих сім'ї $y = (x - C)^{\frac{3}{2}} + C$, а саме та, для якої $C = x_0 - \frac{4}{9}$.

Отже, пряма $y = x - \frac{4}{27}$ складається з точок неєдиності і є особливою інтегральною кривою.

Задача 15 (для самостійного розв'язання).

Розв'язати рівняння методом введення параметра:

- 1) $x = (y')^3 + y'$;
- 2) $x((y')^2 - 1) = 2y'$;
- 3) $x = y'\sqrt{(y')^2 + 1}$;

$$4) y'(x - \ln y') = 1;$$

$$5) y = (y')^2 + 2(y')^3.$$

Відповідь: 1) $x = p^3 + p, \quad 4y = 3p^4 + 2p^2 + C;$

$$2) x = \frac{2p}{p^2 - 1}, \quad y = \frac{2}{p^2 - 1} - \ln|p^2 - 1| + C;$$

$$3) x = p\sqrt{p^2 + 1}, \quad 3y = (2p^2 - 1)\sqrt{p^2 + 1} + C;$$

$$4) x = \ln p + \frac{1}{p}, \quad y = p - \ln p + C;$$

$$5) x = 3p^2 + 2p + C, \quad y = 2p^3 + p^2; \quad y = 0. +$$

Задача 16 (для самостійного розв'язання).

Розв'язати рівняння Лагранжа і Клеро:

$$1) 2yy' = x((y')^2 + 4);$$

$$2) y = x(1 + y') + (y')^2;$$

$$3) y = -xy' + (y')^2;$$

$$4) 2y(y' + 2) = x(y')^2;$$

$$5) y = xy' - (y')^2.$$

Відповідь: 1) $y = Cx^2 + \frac{1}{C}; \quad y \pm 2x;$

$$2) x = Ce^{-p} - 2p + 2, \quad y = (1 + p)Ce^{-p} - p^2 + 2;$$

$$3) x = \frac{C}{\sqrt{p}} + \frac{2}{3}p, \quad y = \frac{1}{3}p^2 - \sqrt{p}C;$$

$$4) y = \frac{1}{C}(x - C)^2 \quad (C \neq 0); \quad y = 0, \quad y = -4x;$$

$$5) y = Cx - C^2; \quad y = \frac{1}{4}x^2. +$$

Література

1. Стрелковська І.В., Буслаєв А. Г., Паскаленко В. М. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч IV. Одеса 2010. 591 с.
2. Гой Т. П. , Махней О. В. Диференціальні рівняння: навчальний посібник. Тернопіль : Навчальна книга - Богдан, 2014. 360 с.
3. Гой Т. П. , Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння: навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 356 с.
4. Диференціальні рівняння: навчальний посібник/ Каленюк П. І. та ін. Львів : Вид-во «Львівська політехніка», 2014. 380 с.
5. Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Настасієв П. П., Дрінь І. І. Диференціальні рівняння: методи та застосування. Навчальний посібник .Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. 288 с.
6. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: підручник. Київ: Либідь, 2004. 408 с.
7. Лавренюк С. П. Курс диференціальних рівнянь: навчальний посібник. Львів : Вид-во наук.-техн. літ., 1997. 216с.
8. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: підручник. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
9. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння: навчальний посібник. Київ: Техніка, 2003. 368 с.
10. Шкіль М. І., Сотніченко М. А. Звичайні диференціальні рівняння: навчальний посібник. Київ: Вища школа, 1992. 303 с.
11. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь: навчальний посібник. Київ: Техніка, 1997. 288 с.
12. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у задачах: навчальний посібник. Київ: Либідь, 2003. 504 с.

Навчальне видання

Волкова Марія Георгіївна
Третяк Олександр Іванович
Козін Олександр Борисович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Частина 1

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Методичні вказівки до практичних
занять та самостійної роботи
студентів усіх технічних спеціальностей

Видається в авторській редакції

ДУІТЗ

65023, Одеса, вул. Кузнечна, 1

Обсяг 5.0, елект. версія