

Міністерство освіти і науки України
Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку

Кафедра вищої математики

РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

**Методичні вказівки до самостійної роботи
студентів всіх технічних спеціальностей**

Одеса 2023

УДК 517.962

Рецензент: кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського Болдарєва О. М.

РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ: Методичні вказівки до самостійної роботи студентів всіх технічних спеціальностей / Укладачі: Волкова М.Г., Козін О. Б., Тарасенко І.В., Одеса, 2023. 32 с.

В методичних вказівках розглядається елементарна теорія лінійних різницевих рівнянь, наводяться приклади розв'язання задач, а також пропонуються завдання для самостійного розв'язання.

Методичні вказівки призначені, в першу чергу, для студентів технічних спеціальностей. Передбачається, що студент ознайомлений з основами лінійної алгебри та диференційних рівнянь. Метою написання вказівок є навчання студентів розв'язанню лінійних різницевих рівнянь 1-го та 2-го порядків.

Ухвалено і рекомендовано до друку кафедрою вищої математики.
Протокол № 2 від 26.09.2022

Затверджено методичною радою ДУІТЗ.
Протокол № 2 від 08.02.2023

© Волкова М.Г., 2023
Козін О. Б., 2023
Тарасенко І.В., 2023

© ДУІТЗ, 2023

Зміст

1. Кінцеві різниці	4
2. Лінійні різницеві рівняння 1-го порядку	7
3. Розв'язання лінійних різницевих рівнянь 1-го порядку	8
4. Лінійні різницеві рівняння довільного порядку	13
5. Властивості розв'язків лінійних різницевих рівнянь 2-го порядку	15
6. Розв'язок однорідних лінійних різницевих рівнянь 2-го порядку	17
7. Розв'язок неоднорідних лінійних різницевих рівнянь 2-го порядку	21
8. Лінійні різницеві рівняння зі сталими дійсними коефіцієнтами довільного порядку	23
Завдання для самостійного розв'язання	34
Література	36
Позначення	36

1. Кінцеві різниці

Означення 1. Функція $y(t)$ дискретного аргументу t називається сітковою функцією.

Наведені в подальшому сіткові функції визначені на множині Z_+ цілих невід'ємних чисел або на підмножині множини Z_+ .

Приклад 1. Записати множину значень сіткової функції:

а) $y(t) = 1$.

Розв'язання: 1; 1; 1;

б) $y(t) = t$.

Розв'язання: 0; 1; 2; 3;

с) $y(t) = 3t + 5$.

Розв'язання: 5; 8; 11; 14;

д) $y(t) = t^2$.

Розв'язання: 0; 1; 4; 9;

Означення 2. Кінцевою (або правою кінцевою) різницею 1-го порядку сіткової функції $y(t)$ називається різниця вигляду

$$\Delta y(t) = y(t + 1) - y(t).$$

Розглядається також ліва кінцева різниця 1-го порядку сіткової функції $y(t)$

$$\nabla y(t) = y(t) - y(t - 1).$$

В подальшому будемо вживати скорочення КР для позначення кінцевої різниці й будемо розглядати лише праві КР.

Приклад 2. Знайдіть $\Delta y(t)$, якщо:

а) $y(t) = 1$.

Розв'язання: $\Delta y(t) = y(t + 1) - y(t) = 1 - 1 = 0$;

б) $y(t) = 2t$.

Розв'язання: $\Delta y(t) = y(t + 1) - y(t) = 2(t + 1) - 2t = 2$.

в) $y(t) = t^2$.

Розв'язання:

$$\Delta y(t) = y(t + 1) - y(t) = (t + 1)^2 - t^2 = 2t + 1.$$

Означення 3. КР 2-го порядку сіткової функції $y(t)$ називається КР від КР

1-го порядку цієї ж сіткової функції:

$$\Delta^2 y(t) = \Delta(\Delta y(t)) = \Delta(y(t + 1) - y(t)) = (y(t + 2) - y(t + 1)) - (y(t + 1) - y(t)) = y(t + 2) - 2y(t + 1) + y(t).$$

Отже,

$$\Delta^2 y(t) = y(t + 2) - 2y(t + 1) + y(t).$$

Означення 4. КР 3-го порядку сіткової функції $y(t)$ називається КР від КР 2-го порядку цієї ж сіткової функції:

$$\begin{aligned}\Delta^3 y(t) &= \Delta(\Delta^2 y(t)) = \Delta(y(t + 2) - 2y(t + 1) + y(t)) = \\ &= (y(t + 3) - 2y(t + 2) + y(t + 1) - (y(t + 2) - 2y(t + 1) + y(t))) = \\ &= y(t + 3) - 3y(t + 2) + 3y(t + 1) - y(t).\end{aligned}$$

Отже,

$$\Delta^3 y(t) = y(t + 3) - 3y(t + 2) + 3y(t + 1) - y(t).$$

Приклад 3. Знайти $\Delta^2 y(t)$, $\Delta^3 y(t)$, якщо:

а) $y(t) = t^3 + 3t^2$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned}\Delta y(t) &= (t + 1)^3 + 3(t + 1)^2 - t^3 - 3t^2 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1 + 3t^2 + \\ &+ 6t + 3 - t^3 - 3t^2 = 3t^2 + 9t + 4;\end{aligned}$$

$$\Delta^2 y(t) = 3(t + 1)^2 + 9(t + 1) + 4 - 3t^2 - 9t - 4 = 6t + 12;$$

$$\Delta^3 y(t) = 6(t + 1) + 12 - 6t - 12 = 6.$$

б) $y(t) = 2^t$.

Розв'язання:

$$\Delta y(t) = 2^{t+1} - 2^t = 2^t (2 - 1) = 2^t;$$

$$\Delta^2 y(t) = 2^{t+1} - 2^t = 2^t;$$

$$\Delta^3 y(t) = 2^{t+1} - 2^t = 2^t.$$

Означення 5. КР n -го порядку сіткової функції $y(t)$ називається КР від КР $(n - 1)$ -го порядку цієї ж сіткової функції:

$$\Delta^n y(t) = \Delta(\Delta^{n-1} y(t)). \quad (1)$$

Приклад 4. Знайти $\Delta^n y(t)$, якщо $y(t) = e^t$.

Розв'язання: Використаємо формулу (1), отримаємо:

$$\Delta y(t) = e^{t+1} - e^t = e^t (e - 1);$$

$$\Delta^2 y(t) = e^{t+1} (e - 1) - e^t (e - 1) = e^t (e - 1)^2;$$

$$\Delta^3 y(t) = e^{t+1} (e - 1)^2 - e^t (e - 1)^2 = e^t (e - 1)^3;$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$\Delta^n y(t) = e^t (e - 1)^n.$$

Зауваження. Неважко довести, що КР n -го порядку сіткової функції $y(t)$ можна подати у вигляді:

$$\Delta^n y(t) = y(t+n) - C_n^1 y(t+n-1) + C_n^2 y(t+n-2) + \dots + (-1)^l C_n^l y(t+n-l) + \dots + (-1)^n y(t),$$

де $C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!}$ - біноміальні коефіцієнти.

Цей факт доводиться за допомогою методу математичної функції.

2. Лінійні різницеві рівняння 1-го порядку

Означення 6. Рівняння вигляду

$$\Delta y(t) + P(t)y(t) = Q(t). \quad (2)$$

де $P(t)$ та $Q(t)$ – відомі сіткові функції, а $y(t)$ – невідома сіткова функція, називається *лінійним різницевим рівнянням (ЛРР) 1-го порядку*.

Якщо $Q(t) \equiv 0$, то дане ЛРР називається *однорідним (ОЛРР)*, якщо $Q(t) \neq 0$, то ЛРР називається *неоднорідним (НЛРР)*.

Означення 7. Розв'язком різницевого рівняння називається така сіткова функція $y(t)$, яка при підстановці в дане різницеве рівняння перетворює його в тотожність при $t = 0, 1, 2, \dots$.

Приклад 5. Показати, що сіткова функція $y(t) = 2^t$, є розв'язком різницевого рівняння $\Delta y(t) - y(t) = 0$.

Розв'язання. Оскільки $\Delta y(t) = 2^{t+1} - 2^t = 2^t(2 - 1) = 2^t$, то підставляючи в дане рівняння, отримаємо :

$$2^t - 2^t \equiv 0$$

за будь-якого значення t .

Означення 8. Нехай $y(0) = y_0$, де y_0 – дане число. Задача знаходження розв'язку рівняння (2), що задовольняє умову $y(0) = y_0$, називається задачею Коші.

Розв'язок задачі Коші називається частинним розв'язком рівняння (2).

3. Розв'язання лінійних різницьових рівнянь 1-го порядку

Згідно означення 2 маємо

$$\Delta y(t) = y(t + 1) - y(t),$$

отже, рівняння (2) можна переписати наступним чином

$$\begin{aligned} y(t + 1) - y(t) + P(t)y(t) &= Q(t), \\ y(t + 1) &= y(t)(1 - P(t)) + Q(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Рівність (3) можна розглядати як повторне (рекурентне) співвідношення для розв'язку задачі Коші. Такий метод розв'язку задачі Коші називається методом послідовних змін (підставлень).

Приклад 6. Знайти частинний розв'язок ЛРР :

$$\Delta y(t) + 3 y(t) = 2,$$

що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язання. З цього рівняння отримуємо

$$\begin{aligned} y(t + 1) - y(t) + 3 y(t) &= 2, \\ y(t + 1) &= 2 - 2y(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Враховуючи початкову умову $y(0) = 1$, з рівняння (4) випливає, що

$$\begin{aligned} y(0 + 1) &= y(1) = 2 - 2y(0) = 2 - 2 \cdot 1 = 0, \\ y(1 + 1) &= y(2) = 2 - 2y(1) = 2 - 2 \cdot 0 = 2, \\ y(2 + 1) &= y(3) = 2 - 2y(2) = 2 - 2 \cdot 2 = -2, \\ y(3 + 1) &= y(4) = 2 - 2y(3) = 2 - 2 \cdot (-2) = 6, \\ y(4 + 1) &= y(5) = 2 - 2y(4) = 2 - 2 \cdot 6 = -10, \\ y(5 + 1) &= y(6) = 2 - 2y(5) = 2 - 2 \cdot (-10) = 22, \\ y(6 + 1) &= y(7) = 2 - 2y(6) = 2 - 2 \cdot 22 = -42, \text{ і т.д.} \end{aligned}$$

Отримаємо частинний розв'язок $y(t) = \{1; 0; 2; -2; 6; -10; 22; -42; \dots\}$.

Відповідь: $y(t) = \{1; 0; 2; -2; 6; -10; 22; -42; \dots\}$.

Розглянемо НЛРР 1-го порядку вигляду

$$a \cdot y(t + 1) + b \cdot y(t) = f(t), \quad (5)$$

де a, b ($b \neq 0$) – сталі коефіцієнти, $f(t)$ – відома функція. Таке рівняння будемо називати НЛРР 1-го порядку з постійними коефіцієнтами.

Означення 9. Загальним розв'язком НЛРР 1-го порядку

$$a \cdot y(t + 1) + b \cdot y(t) = f(t),$$

називається така сукупність функцій $y = y(C, t)$, де C – довільна стала, що будь-який частинний розв'язок даного НЛРР можна отримати з цієї формули за певного значення C .

Відомо, що загальний розв'язок НЛРР (5) можна знайти у вигляді

$$y = y_0 + y^*, \quad (5a)$$

де y_0 – загальний розв’язок відповідного ОЛРР

$$a \cdot y(t + 1) + b \cdot y(t) = 0, \quad (5б)$$

й y^* – будь-який частинний розв’язок НЛРР (5).

Рівняння

$$a\lambda + b = 0 \quad (5в)$$

називається характеристичним рівнянням відповідного ОЛРР (5б), а значення

$$\lambda = -\frac{b}{a}$$

- характеристичним коренем рівняння (5в).

Загальний розв’язок y_0 відповідного ОЛРР можна знайти у вигляді

$$y_0 = C \cdot \lambda^t,$$

де λ – корінь характеристичного рівняння (5в), або

$$y_0 = C \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^t. \quad (6)$$

Якщо права частина рівняння (5) має вигляд

$$f(t) = A \cdot \alpha^t, \quad (7)$$

то частинний розв’язок y^* шукається у вигляді

$$y^* = B \cdot t^m \alpha^t, \quad (8)$$

де число B – невідомий коефіцієнт, який визначається при підстановці y^* в початкове рівняння, m – кратність числа α як кореня рівняння характеристичного рівняння $a\lambda + b = 0$. Очевидно, m набуває значень тільки 0 та 1, тобто частинний розв’язок y^* може приймати вигляд:

$$y^* = B \cdot t \alpha^t, \quad (8a)$$

у разі коли α є коренем характеристичного рівняння ($m = 1$),

$$y^* = B \cdot \alpha^t, \quad (8б)$$

у разі коли α не є коренем характеристичного рівняння ($m = 0$).

Приклад 7. Знайти загальний розв’язок ОЛРР

$$2y(t + 1) + 5y(t) = 0.$$

Розв’язання. Маємо $a = 2, b = 5$, використаємо формулу (6), отримаємо

$$y_0 = C \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^t,$$

де C – довільна стала.

Відповідь: $y_0 = C \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^t$, де C – довільна стала.

Приклад 8. Знайти загальний розв’язок НЛРР

$$3y(t+1) - 4y(t) = 2^t.$$

Розв’язання. Тут $a = 3, b = -4, f(t) = 2^t$, тобто $\alpha = 2$.

Коренем характеристичного рівняння відповідного ОЛРР

$$3\lambda - 4 = 0,$$

буде $\lambda = \frac{4}{3}$, тому за формулою (6) знаходимо загальний розв’язок відповідного ОЛРР :

$$y_0 = C \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t,$$

де C – довільна стала. Оскільки $\lambda = \frac{4}{3} \neq 2$, тобто число $\alpha = 2$ має кратність $m = 0$, то частинний розв’язок y^* згідно (8б) матиме вигляд:

$$y^*(t) = B \cdot 2^t,$$

тоді

$$y^*(t+1) = B \cdot 2^{t+1},$$

Підставимо $y^*(t), y^*(t+1)$ у вихідне рівняння

$$3B \cdot 2^{t+1} - 4B \cdot 2^t = 2^t,$$

отримаємо

$$6B - 4 = 1 \Rightarrow B = \frac{5}{6}.$$

Тому $y^* = \frac{5}{6} \cdot 2^t$. Остаточний загальний розв’язок даного ЛНРР матиме вигляд

$$y(t) = C \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t + \frac{5}{6} \cdot 2^t,$$

де C – довільна стала.

Відповідь: $y(t) = C \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t + \frac{5}{6} \cdot 2^t$, де C – довільна стала.

Приклад 9. Знайти загальний розв’язок НЛРР

$$-y(t+1) + 3y(t) = 3^t.$$

Розв’язання. Тут $a = -1$, $b = 3$, $f(t) = 3^t$, тобто $\alpha = 3$.

Відповідне характеристичне рівняння має вигляд $-\lambda + 3 = 0$, отже, $\lambda = 3$ й за формулою (6):

$$y_0 = C \cdot 3^t,$$

де C – довільна стала. Оскільки число $\alpha = \lambda = 3$ співпадає з коренем характеристичного рівняння, тобто має кратність $m = 1$, то частинний розв’язок y^* згідно (8а) матиме вигляд:

$$y^*(t) = B \cdot t^1 \cdot 3^t = B \cdot t \cdot 3^t.$$

Підставляємо $y^*(t) = B \cdot t \cdot 3^t$ та $y^*(t+1) = B \cdot (t+1) \cdot 3^{t+1}$ у вихідне рівняння й отримаємо:

$$-B \cdot (t+1) \cdot 3^{t+1} + 3 \cdot B \cdot t \cdot 3^t = 3^t,$$

$$3^{t+1} \cdot (-B \cdot (t+1) + B \cdot t) = 3^t,$$

$$3^{t+1} \cdot (-B) = 3^t, \Rightarrow 3 \cdot (-B) = 1, \Rightarrow B = -\frac{1}{3}.$$

Отже, $y^*(t) = -\frac{1}{3} \cdot t \cdot 3^t = -t \cdot 3^{t-1}$ – частинний розв’язок даного НЛРР.

Остаточно загальний розв’язок даного ЛНРР матиме вигляд

$$y(t) = C \cdot 3^t - t \cdot 3^{t-1},$$

де C – довільна стала.

Виконаємо перевірку. Знаходимо $y(t+1) = C \cdot 3^{t+1} - (t+1) \cdot 3^t$,

і підставляємо $y(t)$, $y(t+1)$ в ліву частину початкового рівняння:

$$\begin{aligned} & -C \cdot 3^{t+1} + (t+1) \cdot 3^t + 3(C \cdot 3^t - t \cdot 3^{t-1}) = \\ & = -C \cdot 3^{t+1} + t \cdot 3^t + 3^t + 3C \cdot 3^t - 3t \cdot 3^{t-1} = \\ & = -C \cdot 3^{t+1} + t \cdot 3^t + 3^t + C \cdot 3^{t+1} - t \cdot 3^t = 3^t. \end{aligned}$$

Ліва частина співпадає з правою

$$3^t \equiv 3^t,$$

отже, загальний розв'язок знайдено вірно.

Відповідь: $y(t) = C \cdot 3^t - t \cdot 3^{t-1}$, де C – довільна стала.

4. Лінійні різницеві рівняння довільного порядку

Означення 10. Рівняння вигляду

$$\begin{aligned} \Delta^k y(t) + a_1(t) \Delta^{k-1} y(t) + a_2(t) \Delta^{k-2} y(t) + \dots \\ + a_{k-1}(t) \Delta y(t) + a_k(t) y(t) = Q(t), \end{aligned} \quad (9)$$

$t = 0; 1; 2; 3 \dots$ називається ЛРР k -го порядку.

Якщо застосувати тотожність

$$\Delta^m y(t) = \Delta(\Delta^{m-1} y(t)) = \Delta^{m-1} y(t+1) - \Delta^{m-1} y(t), \quad (10)$$

$$m = 1; 2; 3; \dots$$

то ЛРР можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} y(t+k) + b_1(t) \cdot y(t+k-1) + b_2(t) \cdot y(t+k-2) \dots + \\ + b_k(t) \cdot y(t) = Q(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо при цьому $b_k(t) \neq 0$, то число k називається порядком ЛРР (9) і (11) і пишуть $r = k$.

Якщо $b_k(t) = 0$, то порядком r рівняння (11) є число k , яке дорівнює різниці значення найбільшого і найменшого аргументу невідомої сіткової функції.

Приклад 10. Подати дане ЛРР

$$\Delta^3 y(t) + 2\Delta y(t) + 4y(t) = 0 \quad (12)$$

у вигляді (11)

Розв'язання. Оскільки згідно означень 2 і 4 п.1 маємо

$$\Delta^3 y(t) = y(t+3) - 3y(t+2) + 3y(t+1) - y(t),$$

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t),$$

то, підставивши це в дане ЛРР (12), отримаємо

$$y(t+3) - 3y(t+2) + 3y(t+1) - y(t) + 2y(t+1) - 2y(t) + 4y(t) = 0,$$

$$y(t+3) - 3y(t+2) + 5y(t+1) + y(t) = 0.$$

Це і є відповідь.

Приклад 11. Знайти порядок ЛРР

$$\Delta^3 y(t) + 2\Delta y(t) - C y(t) = 0.$$

Розв'язання. Спочатку представимо дане ЛРР у вигляді (11), для чого скористаємось означеннями 2 і 4 п.1:

$$\Delta^3 y(t) = y(t + 3) - 3y(t + 2) + 3y(t + 1) - y(t),$$

$$\Delta y(t) = y(t + 1) - y(t).$$

тоді

$$y(t + 3) - 3y(t + 2) + 3y(t + 1) - y(t) + 2(y(t + 1) - y(t)) - C y(t) = 0,$$

$$y(t + 3) - 3y(t + 2) + 5y(t + 1) - (3 + C)y(t) = 0.$$

Розглянемо два випадки: $C \neq -3$ та $C = -3$.

В першому випадку ($C \neq -3$) порядок даного ЛРР

$$r = (t + 3) - t = 3.$$

В другому випадку ($C = -3$) отримаємо ЛРР

$$y(t + 3) - 3y(t + 2) + 5y(t + 1) = 0,$$

Звідси випливає, що порядок r ЛРР дорівнює

$$r = (t + 3) - (t + 1) = 2.$$

Означення 11. Якщо в рівнянні (9) або (11) права частина $Q(t) \equiv 0$, то це рівняння називається *однорідним ЛРР (ОЛРР)*:

$$\Delta^k y(t) + a_1(t)\Delta^{k-1}y(t) + a_2(t)\Delta^{k-2}y(t) + \dots + a_{k-1}(t)\Delta y(t) + a_k(t)y(t) = 0, \quad (9a)$$

$$y(t + k) + b_1(t) \cdot y(t + k - 1) + b_2(t) \cdot y(t + k - 2) \dots + b_k(t) \cdot y(t) = 0. \quad (11a)$$

Якщо $Q(t) \neq 0$, то ЛРР (9) називається *неоднорідним (НЛРР)*.

5. Властивості розв'язків лінійних різницевих рівнянь n -го порядку

Означення 12. Розв'язком ОЛРР (9) називається сіткова функція $y(t)$, яка при підстановці в (9) перетворює його у вірну тотожність, $t = 0; 1; 2; \dots$.

Означення 13. Сіткові функції $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ називаються *лінійно незалежними* (ЛЗ), якщо існують такі числа $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, не всі одночасно рівні нулю, тобто

$$C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 \neq 0,$$

такі, що виконується рівність

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t) = 0, \quad (13)$$

при $t = 0; 1; 2; \dots$

Якщо рівність (13) виконується тільки за умови $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$, то сіткові функції $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ називаються *лінійно залежними* (ЛЗ).

Теорема 1. Якщо $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ є розв'язками ОЛРР (9а)

$$\Delta^k y(t) + a_1(t) \Delta^{k-1} y(t) + a_2(t) \Delta^{k-2} y(t) + \dots + a_{k-1}(t) \Delta y(t) + a_k(t) y(t) = 0,$$

то за будь-яких допустимих сталих $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ сіткова функція

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t) \quad (14)$$

також є розв'язком ОЛРР (9а).

Означення 14. Якщо

$$y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t) \quad (15)$$

є ЛНЗ розв'язками ОЛРР (9а) та n збігається з порядком рівняння (9а), то розв'язок вигляду (14) називається *загальним розв'язком ОЛРР (9а)*.

Аналогічне означення можна дати для рівняння (11а). При цьому сукупність функцій (15) називається *фундаментальною системою розв'язків ОЛРР(9а) або (11а)*.

Означення 15. Нехай $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ - довільна сукупність сіткових функцій. Визначник n -го порядку

$$K(t) = \begin{vmatrix} y_1(t), & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1(t+1), & y_2(t+1) & \dots & y_n(t+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1(t+n-1), & y_2(t+n-1) & \dots & y_n(t+n-1) \end{vmatrix}$$

називається визначником Казаратті сіткових функцій (15).

Приклад 12. Записати визначник Казаратті функції $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{2t}$.

$$K(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^{t+1} & e^{2(t+1)} \end{vmatrix} = e^t \cdot e^{2(t+1)} - e^{2t} \cdot e^{t+1} = e^{3t}(e^2 - e).$$

Теорема 2. Розв'язки $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ОЛРР (9а) є ЛНЗ на множині Z_+ тоді і тільки тоді, коли їх визначник Казаратті не дорівнює нулю на цій множині.

Приклад 13. Визначник Казаратті сіткових функцій $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{2t}$, (приклад 10) не дорівнює нулю. Отже, ці функції є ЛНЗ на Z_+ .

Теорема 3. Будь-яке ОЛРР n – го порядку має n ЛНЗ розв'язків $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд :

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t),$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – деякі сталі.

6. Розв'язання однорідних лінійних різницевих рівнянь 2-го порядку

Розглянемо ОЛРР 2-го порядку зі сталими дійсними коефіцієнтами :

$$a_0 y(t+2) + a_1 y(t+1) + a_2 y(t) = 0, \quad (16)$$

де $t = 0; 1; 2; \dots$; a_0, a_1, a_2 - деякі дійсні числа, до того ж $a_2 \neq 0$. Будемо шукати частинний розв'язок рівняння (16) у вигляді: $y(t) = \lambda^t$, $\lambda = \text{const} \neq 0$. Тоді $y(t+1) = \lambda^{t+1}$; $y(t+2) = \lambda^{t+2}$ й при підстановці в (16), отримаємо :

$$a_0 \lambda^{t+2} + a_1 \lambda^{t+1} + a_2 \lambda^t = 0,$$

$$\lambda^t (a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda^1 + a_2) = 0.$$

За умовою $\lambda \neq 0$, тоді матимемо

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda^1 + a_2 = 0. \quad (17)$$

Означення 16. Рівняння (17) називається *характеристичним рівнянням* рівняння (16), а корені рівняння (17) називаються *характеристичними числами* (або *характеристичними коренями*) рівняння (16).

Приклад 14. Записати характеристичне рівняння та знайти характеристичні числа ОЛРР:

$$y(t+2) + 3y(t+1) - 4y(t) = 0.$$

Розв'язання. Виконаємо перетворення:

$$y(t+2) \rightarrow \lambda^2; \quad y(t+1) \rightarrow \lambda; \quad y(t) \rightarrow 1,$$

отримаємо характеристичне рівняння даного рівняння:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0,$$

знайдемо його розв'язок

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -4.$$

Отже, характеристичними числами даного рівняння будуть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$.

При розв'язанні характеристичного рівняння (17) можливі тільки три випадки:

1. Дискримінант $D = (a_1)^2 - 4a_0 \cdot a_2 > 0$. Тоді корені $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - різні дійсні числа.

В цьому випадку $y_1(t) = \lambda_1^t$; $y_2(t) = \lambda_2^t$ – ЛНЗ розв’язки рівняння (16), тому

$$y(t) = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t \quad (18)$$

є загальним розв’язком ОЛРР (16).

2. Дискримінант $D = (a_1)^2 - 4a_0 \cdot a_2 = 0$. Тоді корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – рівні дійсні числа.

В цьому випадку $y_1(t) = \lambda^t$, $y_2(t) = t \cdot \lambda^t$ – ЛНЗ розв’язки рівняння (16), тому

$$y(t) = C_1 \lambda^t + C_2 t \lambda^t \quad (19)$$

є загальним розв’язком ОЛРР (16).

3. Дискримінант $D = (a_1)^2 - 4a_0 \cdot a_2 < 0$. Тоді корені λ_1, λ_2 – комплексно спряжені числа.

В цьому випадку корені $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, й частинними ЛНЗ розв’язками будуть

$$y_1 = r^t \cos t\varphi, \quad y_2 = r^t \sin t\varphi,$$

де $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ – модуль, φ – аргумент характеристичного числа $\lambda_1 = \alpha + \beta i$. В цьому випадку загальний розв’язок рівняння (16) матиме вигляд:

$$y(t) = C_1 r^t \cos t\varphi + C_2 r^t \sin t\varphi, \quad (20)$$

або

$$y(t) = r^t (C_1 \cos t\varphi + C_2 \sin t\varphi).$$

У формулах (18) - (20) C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 15. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y(t+2) + 4y(t+1) - 5y(t) = 0.$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0,$$

його корені: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$, тобто маємо випадок, коли характеристичні числа різні й дійсні. Використаємо формулу (18), отримаємо

$$y(t) = C_1 + C_2 \cdot (-5)^t,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Відповідь: $y(t) = C_1 + C_2 \cdot (-5)^t$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y(t+2) - 9y(t) = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

має два різних дійсних характеристичних корені $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$, тому загальний розв'язок має вигляд

$$y(t) = C_1 \cdot 3^t + C_2 \cdot (-3)^t,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Відповідь: $y(t) = C_1 \cdot 3^t + C_2 \cdot (-3)^t$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 17. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y(t+2) + 4y(t+1) + 4y(t) = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0,$$

має два рівних дійсних корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, тобто $\lambda = -2$ є коренем кратності 2 характеристичного рівняння. Використовуємо формулу (19) для отримання загального розв'язку даного рівняння:

$$y(t) = C_1 \cdot (-2)^t + C_2 \cdot t \cdot (-2)^t,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Відповідь: $y(t) = C_1 \cdot (-2)^t + C_2 \cdot t \cdot (-2)^t$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 18. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y(t+2) + y(t+1) + y(t) = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

має комплексно спряжені корені $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, тоді

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Частинні розв'язки даного рівняння матимуть вигляд

$$y_1(t) = 1^t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} t = \cos \frac{2\pi}{3} t; \quad y_2(t) = 1^t \cdot \sin \frac{2\pi}{3} t = \sin \frac{2\pi}{3} t,$$

тому з формули (20) отримаємо загальний розв'язок даного рівняння

$$y(t) = C_1 \cos \frac{2\pi}{3} t + C_2 \sin \frac{2\pi}{3} t,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Відповідь: $y(t) = C_1 \cos \frac{2\pi}{3} t + C_2 \sin \frac{2\pi}{3} t$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 19. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y(t+2) + 2y(t+1) + 2y(t) = 0.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

його характеристичні корені $\lambda = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{-4}) = -1 \pm i$ є комплексно спряженими числами. Обчислюємо

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Частинні розв'язки матимуть вигляд:

$$y_1(t) = (\sqrt{2})^t \cos \frac{3\pi}{4} t; \quad y_2(t) = (\sqrt{2})^t \sin \frac{3\pi}{4} t.$$

Отримуємо загальний розв'язок з формули (20):

$$y(t) = C_1 \cdot (\sqrt{2})^t \cdot \cos \frac{3\pi}{4} t + C_2 \cdot (\sqrt{2})^t \cdot \sin \frac{3\pi}{4} t, \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Відповідь: $y(t) = C_1(\sqrt{2})^t \cos \frac{3\pi}{4} t + C_2(\sqrt{2})^t \sin \frac{3\pi}{4} t$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

7. Розв'язання неоднорідних лінійних різницевих рівнянь 2-го порядку

Розглянемо НЛРР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 y(t+2) + a_1 y(t+1) + a_2 y(t) = f(t), \quad (21)$$

де a_0, a_1, a_2 – дійсні числа, $a_2 \neq 0$, $f(t) \neq 0$, $t = 0; 1; 2; \dots$

Теорема 4. Розв'язок НЛРР (21) являє собою суму деякого частинного розв'язку $y^*(t)$ рівняння (21), то загального розв'язку $y_0(t)$ відповідного ОЛРР

$$a_0 y(t+2) + a_1 y(t+1) + a_2 y(t) = 0.$$

Отже, загальний розв'язок $y(t)$ рівняння (21) має вигляд:

$$y(t) = y^*(t) + y_0(t). \quad (21a)$$

Теорема 5. Якщо права частина рівняння (21) дорівнює сумі двох доданків $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, то частинний розв'язок $y^*(t)$ рівняння (21) є сумою двох розв'язків $y_1^*(t)$ та $y_2^*(t)$:

$$y^*(t) = y_1^*(t) + y_2^*(t),$$

де $y_1^*(t)$ - частинний розв'язок рівняння (21) з правою частиною $f_1(t)$, тобто

$$a_0 y(t+2) + a_1 y(t+1) + a_2 y(t) = f_1(t),$$

й $y_2^*(t)$ - частинний розв'язок рівняння (21) з правою частиною $f_2(t)$, тобто

$$a_0 y(t+2) + a_1 y(t+1) + a_2 y(t) = f_2(t).$$

Ці дві теореми 4 та 5 легко узагальнюються на НЛРР будь-якого порядку.

Зауважимо, що теорема 5 інакше називається принципом суперпозиції.

Знаходження частинного розв'язку $y^*(t)$ НЛРР (21) значно спрощується, якщо права частина $f(t)$ представляє собою одну з функцій:

$$A, t, t^2, t^3, \dots, t^k, t\alpha^t, t^2\alpha^t, \dots, t^k\alpha^t$$

або їхню лінійну комбінацію.

Так, наприклад, нехай права частина рівняння (21) дорівнює сталій, тобто $f(t) = A$. Можливі наступні випадки:

- число A не є характеристичним числом. Тоді частинний розв'язок $y^*(t) = B = \text{const}$.
- число A є характеристичним числом кратності m . Тоді частинний розв'язок $y^*(t) = B \cdot t^m, B = \text{const}$.

Приклад 20. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y(t+2) - 6y(t+1) + 9y(t) = 2. \quad (22)$$

Розв'язання. Складаємо спочатку характеристичне рівняння відповідного ОЛРР:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

яке має корінь $\lambda = 3$ кратності 2, тоді згідно (19):

$$y_0(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot 3^t.$$

Оскільки права частина $f(t) = 2 = \text{const}$ й число 2 не є характеристичним числом, то частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$y^*(t) = B.$$

Для знаходження B , підставимо $y^*(t)$ в дане рівняння:

$$B - 6B + 9B = 2, \Rightarrow 4B = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Отримаємо:

$$y(t) = \frac{1}{2} + (C_1 + C_2 t) \cdot 3^t. \quad (23)$$

$$\text{Відповідь: } y(t) = \frac{1}{2} + (C_1 + C_2 t) \cdot 3^t.$$

8. Лінійні різницеві рівняння зі сталими дійсними коефіцієнтами довільного порядку

1. Розглянемо ОЛРР n -го порядку :

$$y(t+n) + a_1 \cdot y(t+n-1) + a_2 \cdot y(t+n-2) \dots + a_n \cdot y(t) = 0, \quad (24)$$

де $a_1, a_1, \dots, a_n$ - дійсні числа, $a_n \neq 0$; $t \in Z_+$.

Загальний розв'язок рівняння (24) можна представити у вигляді

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot y_i(t), \quad (25)$$

де $y_i(t)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ - ЛНЗ розв'язки рівняння (24), C_i - довільні сталі.

Для ОЛРР (24) запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} \dots + a_n = 0$$

Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1. Усі корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ дійсні та прості (кратності 1). В цьому випадку

$$y_1(t) = \lambda_1^t, \quad y_2(t) = \lambda_2^t, \dots, y_n = \lambda_n^t$$

— ЛНЗ розв'язки рівняння (24) та згідно (25)

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot \lambda_i^t = C_1 \cdot \lambda_1^t + C_2 \cdot \lambda_2^t + \dots + C_n \cdot \lambda_n^t,$$

де C_i - довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (24).

Приклад 21. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y(t+3) + 2y(t+2) - y(t+1) - 2y(t) = 0.$$

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

$$\lambda^2(\lambda + 2) - (\lambda + 2) = 0,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 - 1) = 0,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

має корені : $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 2$.

Отримаємо три частинні розв'язки

$$y_1(t) = 1; \quad y_2(t) = (-1)^t; \quad y_3(t) = 2^t.$$

Легко можна перевірити лінійну незалежність цих розв'язків, для чого складемо визначник Казаратті

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1(t+1) & y_2(t+1) & y_3(t+1) \\ y_1(t+2) & y_2(t+2) & y_3(t+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (-1)^t & 2^t \\ 1 & (-1)^{t+1} & 2^{t+1} \\ 1 & (-1)^{t+2} & 2^{t+2} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^t 2^t \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-2)^t (-4 + 2 + 1 + 1 - 4 - 2) = (-2)^t (-6) \neq 0.$$

Отже, $y_1(t); y_2(t); y_3(t)$ – ЛНЗ. Загальний розв'язок матиме вигляд

$$y(t) = C_1 + C_2(-1)^t + C_3 2^t,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь: $y(t) = C_1 + C_2(-1)^t + C_3 2^t$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Випадок 2. Усі корені характеристичного рівняння прості (кратності 1), але серед них є комплексні.

Тоді, кожній парі комплексно-спряжених характеристичних чисел $\alpha \pm \beta i$ відповідають два ЛНЗ розв'язки

$$y_1 = r^t \cos t\varphi, \quad y_2 = r^t \sin t\varphi,$$

$$\text{де } r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha},$$

й загальний розв'язок знаходиться за формулою (25).

Приклад 22. Знайти частинний розв'язок ОЛРР

$$y(t+3) - 2y(t+2) + 4y(t+1) - 8y(t) = 0,$$

що задовольняє умови:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Розв'язання. Складемо та розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0;$$

$$\lambda^2(\lambda - 2) + 4(\lambda - 2) = 0;$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 4) = 0;$$

$$\lambda - 2 = 0, \text{ або } \lambda^2 + 4 = 0;$$

$$\lambda_1 = 2, \Rightarrow y_1 = 2^t;$$

$$\lambda^2 = -4, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i \Rightarrow y_2 = r^t \cos t\varphi, \quad y_3 = r^t \sin t\varphi,$$

де $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$, $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, отже,

$$y_2 = 2^t \cos \frac{\pi}{2}t, \quad y_3 = 2^t \sin \frac{\pi}{2}t.$$

Згідно (25) загальний розв'язок матиме вигляд:

$$y(t) = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot 2^t \cos \frac{\pi}{2}t + C_3 \cdot 2^t \sin \frac{\pi}{2}t,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Знайдемо C_1, C_2, C_3 з початкових умов $y(0) = 0, y(1) = 0, y(2) = 1$:

$$y(0) = C_1 + C_2 \cos 0 + C_3 \sin 0 = C_1 + C_2,$$

$$y(1) = 2C_1 + 2C_2 \cos \frac{\pi}{2} + 2C_3 \sin \frac{\pi}{2} = 2C_1 + 2C_3,$$

$$y(2) = 4C_1 + 4C_2 \cos \pi + 4C_3 \sin \pi = 4C_1 - 4C_2,$$

тоді,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + 2C_3 = 0, \\ 4C_1 - 4C_2 = 1. \end{cases}$$

Знаходимо:

$$C_1 = \frac{1}{8}; \quad C_2 = C_3 = -\frac{1}{8}.$$

Підставляємо знайдені значення $C_1 = \frac{1}{8}; \quad C_2 = C_3 = -\frac{1}{8}$ у загальний розв'язок й отримаємо частинний розв'язок:

$$y_0(t) = \frac{2^t}{8} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}t - \sin \frac{\pi}{2}t \right).$$

Відповідь: $y_0(t) = \frac{2^t}{8} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} t - \sin \frac{\pi}{2} t \right).$

Випадок 3. Серед характеристичних чисел є кратні. Кожному характеристичному числу λ кратності m відповідають m ЛНЗ частинних розв'язків:

$$y_1 = \lambda^t ; y_2 = t \cdot \lambda^t ; y_3 = t^2 \cdot \lambda^t , \dots , y_m = t^{m-1} \cdot \lambda^t .$$

Приклад 23. Знайти загальний розв'язок РР:

$$y(t+3) + 3y(t+2) + 3y(t+1) + y(t) = 0.$$

Розв'язання. Складаємо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0,$$

$$(\lambda + 1)^3 = 0,$$

де $\lambda = -1$ характеристичне число кратності 3. Частинний розв'язок матиме вигляд:

$$y_1 = (-1)^t , y_2 = t \cdot (-1)^t , y_3 = t^2 \cdot (-1)^t .$$

За формулою (25) отримаємо загальний розв'язок

$$y(t) = C_1(-1)^t + C_2 t(-1)^t + C_3 t^2(-1)^t ,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь: $y(t) = C_1(-1)^t + C_2 t(-1)^t + C_3 t^2(-1)^t$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Приклад 24. Знайти загальний розв'язок РР:

$$y(t+4) - y(t+3) - 3y(t+2) + 5y(t+1) - 2y(t) = 0.$$

Розв'язання. Запишемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0,$$

$$\lambda^3(\lambda - 1) - (3\lambda^2 - 5\lambda + 2) = 0,$$

$$\lambda^3(\lambda - 1) - (3\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0,$$

тоді

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)^3 = 0,$$

$$\lambda_1 = -2 \Rightarrow y_1 = (-2)^t,$$

$$\lambda_2 = 1 - \text{корінь кратності } 3 \Rightarrow y_2 = 1^t = 1; y_3 = t \cdot 1^t = t; y_4 = t^2 \cdot 1^t = t^2.$$

Згідно (25) загальний розв'язок має вигляд:

$$y(t) = C_1(-2)^t + C_2 + C_3t + C_4t^2,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні сталі.

Відповідь: $y(t) = C_1(-2)^t + C_2 + C_3t + C_4t^2$, де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні сталі.

Приклад 25. Знайти частинний розв'язок РР:

$$y(t + 3) - 9y(t + 2) + 27y(t + 1) - 27y(t) = 0,$$

що задовольняє умови:

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 3.$$

Розв'язання. Складемо й розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = 0;$$

$$(\lambda - 3)^3 = 0;$$

$\lambda = 3$ – характеристичний корінь кратності 3.

Отже, отримаємо:

$$y_1 = 3^t; y_2 = t \cdot 3^t; y_3 = t^2 \cdot 3^t.$$

Загальний розв'язок матиме вигляд:

$$y(t) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + C_3 \cdot y_3,$$

$$y(t) = C_1 \cdot 3^t + C_2 \cdot t \cdot 3^t + C_3 \cdot t^2 \cdot 3^t,$$

$$y(t) = 3^t \cdot (C_1 + C_2t + C_3t^2),$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Знайдемо значення C_1, C_2, C_3 , з початкових умов:

$$y(0) = C_1 = 1,$$

$$y(1) = 3(C_1 + C_2 + C_3) = 0,$$

$$y(2) = 9(C_1 + 2C_2 + 4C_3) = 3.$$

Тоді:

$$\begin{cases} 1 + C_2 + C_3 = 0, \\ 3(1 + 2C_2 + 4C_3) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -1 - C_2, \\ 3(1 + 2C_2 - 4(1 + C_2)) = 1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$3(1 + 2C_2 - 4 - 4C_2) = 1, \Rightarrow 3(-3 - 2C_2) = 1, \Rightarrow -3 - 2C_2 = \frac{1}{3}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2C_2 = -\frac{1}{3} - 3 \Rightarrow 2C_2 = -\frac{10}{3} \Rightarrow C_2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow C_3 = -1 + \frac{5}{3} \Rightarrow C_3 = \frac{2}{3}.$$

$y_0(t) = 3^t \left(1 - \frac{5}{3}t + \frac{2}{3}t^2\right)$ – частинний розв’язок даного рівняння.

$$\text{Відповідь: } y_0(t) = 3^t \left(1 - \frac{5}{3}t + \frac{2}{3}t^2\right).$$

2. Розв’язання НЛРР будемо розглядати на прикладах РР 3-го порядку:

$$y(t+3) + a \cdot y(t+2) + b \cdot y(t+1) + c \cdot y(t) = f(t), \quad c \neq 0. \quad (26)$$

Структура загального розв’язку НЛРР має вигляд:

$$y(t) = y_0(t) + y^*(t), \quad (26 \text{ а})$$

де $y_0(t)$ – загальний розв’язок відповідного ОЛРР:

$$y(t+3) + a \cdot y(t+2) + b \cdot y(t+1) + c \cdot y(t) = 0,$$

$y^*(t)$ – частинний розв’язок рівняння (26).

Знаходження $y_0(t)$ розглянуто в 1-ій частині цього параграфа.

Приклад 26. Знайти загальний розв’язок НЛРР

$$y(t+3) + 3y(t+2) + 3y(t+1) + 3y(t) = 2^t,$$

якщо відомо, що його частинний розв’язок має вигляд $y^*(t) = \frac{1}{27} \cdot 2^t$.

Розв’язання. З прикладу 23 отримаємо, що $y_0(t)$ має вигляд:

$$y_0(t) = C_1(-1)^t + C_2 t(-1)^t + C_3 t^2(-1)^t.$$

З формули (26 а) знаходимо загальний розв'язок:

$$y(t) = (-1)^t(C_1 + C_2 t + C_3 t^2) + \frac{2^t}{27}.$$

$$\text{Відповідь: } y(t) = (-1)^t(C_1 + C_2 t + C_3 t^2) + \frac{2^t}{27}.$$

Тепер розглянемо випадок, коли права частина РР (26) має спеціальний вигляд

$$f(t) = |\lambda|^t(P(t) \cos t\varphi + H(t) \sin t\varphi), \quad (27)$$

де $P(t)$ та $H(t)$ - дані многочлени степені n з дійсними коефіцієнтами, $|\lambda| = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Має місце наступна теорема:

Теорема 6. Якщо права частина РР (26) має вигляд (27)

$$f(t) = |\lambda|^t(P(t) \cos t\varphi + H(t) \sin t\varphi),$$

де $P(t)$ та $H(t)$ - дані многочлени степені n з дійсними коефіцієнтами, $|\lambda| = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, й число $\lambda = |\lambda|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ є m -кратним коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $y^*(t)$ рівняння (26) матиме вигляд:

$$y^*(t) = t^m |\lambda|^t(\bar{P}(t) \cos t\varphi + \bar{H}(t) \sin t\varphi),$$

де $\bar{P}(t)$ та $\bar{H}(t)$ - многочлени степені не вище за n з невідомими коефіцієнтами.

Коефіцієнти многочленів обчислюються методом невизначених коефіцієнтів.

Зауваження 1. Якщо права частина РР (26) має вигляд (27) й число $\lambda = |\lambda|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ не є коренем характеристичного рівняння, тобто його кратність $m = 0$, то частинний розв'язок $y^*(t)$ рівняння (26) має вигляд:

$$y^*(t) = |\lambda|^t(\bar{P}(t) \cos t\varphi + \bar{H}(t) \sin t\varphi),$$

де $\bar{P}(t)$ та $\bar{H}(t)$ - многочлени степені не вище n з невідомими коефіцієнтами.

Зауваження 2. Якщо права частина має вигляд $f(t) = \lambda^t P(t)$, де λ – дійсне число й λ - характеристичний корінь кратності m , то частинний розв'язок $y^*(t)$ шукають у вигляді:

$$y^*(t) = t^m \lambda^t \bar{P}(t).$$

Якщо права частина має вигляд $f(t) = \lambda^t P(t)$, де λ – дійсне число й число λ не є характеристичним коренем ($m = 0$), то частинний розв’язок $y^*(t)$ шукають у вигляді:

$$y^*(t) = \lambda^t \bar{P}(t).$$

Приклад 27. Записати вигляд частинного розв’язку НЛРР:

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = t.$$

Розв’язання. Тут права частина має вигляд $f(t) = t = t \cdot 1^t$, тобто $\lambda = 1$ – дійсне число, $P(t) = t$ – многочлен 1-го степеня. Розв’яжемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Відзначимо, що $\lambda = 1$ – простий корінь ($m = 1$) характеристичного рівняння, тому

$$y^*(t) = t \cdot 1^t (\underbrace{At + B}_{\text{многочлен 1-го степеня}}) = At^2 + Bt$$

многочлен 1-го степеня

- частинний розв’язок даного рівняння. Знайдемо A, B методом невизначених коефіцієнтів. Для цього знаходимо

$$y^*(t+1) = (t+1) \cdot (A(t+1) + B) = A(t+1)^2 + B(t+1),$$

$$y^*(t+2) = (t+2) \cdot (A(t+2) + B) = A(t+2)^2 + B(t+2),$$

й підставляємо в умову:

$$A(t+2)^2 + B(t+2) - 3 \cdot (A(t+1)^2 + B(t+1)) + 2 \cdot (At^2 + Bt) = t,$$

$$-2At + A - B = t,$$

звідки отримаємо:

$$\begin{cases} -2A = 1, \\ A - B = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = A = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, частинний розв’язок матиме вигляд:

$$y^*(t) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Відповідь: $y^*(t) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t.$

Приклад 28. Знайти загальний розв'язок НЛРР

$$y(t+3) - 4y(t+2) - 3y(t+1) + 6y(t) = 3 \cdot 2^t.$$

Розв'язання. Тут права частина має спеціальний вигляд $f(t) = 3 \cdot 2^t$, тобто $\lambda = 2$ – дійсне число, $P(t) = 3$ – многочлен 0-го степеня.

Спочатку знаходимо загальний розв'язок $y_0(t)$ відповідного ОЛРР, для чого складаємо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0,$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 6\lambda + 6 = 0,$$

$$\lambda^2(\lambda - 1) - 3\lambda(\lambda - 1) - 6(\lambda - 1) = 0;$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda - 6) = 0;$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{33}).$$

Загальний розв'язок $y_0(t)$ відповідного ОЛРР:

$$y_0 = C_1 \cdot 1^t + C_2 \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right)^t + C_3 \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{2} \right)^t,$$

або

$$y_0 = C_1 + C_2 \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right)^t + C_3 \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{2} \right)^t,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Тепер знайдемо частинний розв'язок $y^*(t)$. Оскільки $\lambda = 2$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок матиме вигляд:

$$y^*(t) = A \cdot 2^t.$$

Для знаходження числа A підставимо $y^*(t), y^*(t+1), y^*(t+2), y^*(t+3)$ в дане НЛРР:

$$A \cdot 2^{t+3} - 4A \cdot 2^{t+2} - 3A \cdot 2^{t+1} + 6A \cdot 2^t = 3 \cdot 2^t;$$

$$A \cdot 2^3 - 4A \cdot 2^2 - 3A \cdot 2 + 6A = 3;$$

$$8A - 16A - 6A + 6A = 3;$$

$$-8A = 3, \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{8}.$$

Отже,

$$y^*(t) = -\frac{3}{8} \cdot 2^t = -3 \cdot 2^{t-3}$$

є частинним розв'язком.

Згідно формули (26а) загальний розв'язок НЛРР матиме вигляд:

$$y(t) = C_1 + C_2 \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right)^t + C_3 \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{2} \right)^t - 3 \cdot 2^{t-3},$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь: $y(t) = C_1 + C_2 \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right)^t + C_3 \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{2} \right)^t - 3 \cdot 2^{t-3}$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Приклад 29. Знайти загальний розв'язок НЛРР

$$y(t+3) - 6y(t+2) + 11y(t+1) - 6y(t) = 4t.$$

Розв'язання. Тут права частина має спеціальний вигляд $f(t) = 4t$, або $f(t) = 4t \cdot 1^t$, тобто $\lambda = 1$ – дійсне число, $P(t) = 4t$ – многочлен 1-го степеня.

Спочатку знаходимо загальний розв'язок $y_0(t)$ відповідного ОЛРР, для чого складаємо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0,$$

коренями якого будуть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Отриманим характеристичним числам відповідають частинні розв'язки $y_1(t) = 1^t = 1$; $y_2(t) = 2^t$; $y_3(t) = 3^t$. Тоді загальний розв'язок $y_0(t)$ відповідного ОЛРР матиме вигляд:

$$y_0(t) = C_1 + C_2 2^t + C_3 3^t.$$

Зауважимо, що $y_1(t) = 1$; $y_2(t) = 2^t$; $y_3(t) = 3^t$ є ЛНЗ. Перевіримо це за допомогою визначника Казаратті:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2^t & 3^t \\ 1 & 2^{t+1} & 3^{t+1} \\ 1 & 2^{t+2} & 3^{t+2} \end{vmatrix} = 6^t(18 + 3 + 4 - 2 - 12 - 9) = 2 \cdot 6^t \neq 0.$$

Далі шукатиме частинний розв'язок $y^*(t)$. Оскільки, $\lambda_1 = 1$ - характеристичне число кратності $m = 1$, то частинний розв'язок $y^*(t)$ знаходимо у вигляді:

$$y^*(t) = t \cdot (At + B) = At^2 + Bt,$$

звідки

$$y^*(t + 1) = A(t + 1)^2 + B(t + 1);$$

$$y^*(t + 2) = A(t + 2)^2 + B(t + 2);$$

$$y^*(t + 3) = A(t + 3)^2 + B(t + 3).$$

Підставимо останні рівності у дане НЛРР:

$$\begin{aligned} & A(t + 3)^2 + B(t + 3) - 6 \cdot (A(t + 2)^2 + B(t + 2)) + \\ & + 11 \cdot (A(t + 1)^2 + B(t + 1)) - 6 \cdot (At^2 + Bt) = 4t. \end{aligned}$$

Застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів, знайдемо

$$A = 1, \quad B = 2.$$

Таким чином, частинний розв'язок $y^*(t)$ має вигляд

$$y^*(t) = t^2 + 2t.$$

Тоді за формулою (26а) знаходимо загальний розв'язок НЛРР:

$$y(t) = C_1 + C_2 \cdot 2^t + C_3 \cdot 3^t + t^2 + 2t,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь: $y(t) = C_1 + C_2 \cdot 2^t + C_3 \cdot 3^t + t^2 + 2t$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Завдання для самостійного розв'язання.

Завдання 1. Обчисліть порядок ЛРР:

- 1) $\Delta^3 y(t) - 24\Delta y(t) - 3y(t) = 2;$
- 2) $\Delta^2 y(t) + 15\Delta y(t) - 2y(t) = 0;$
- 3) $\Delta^3 y(t) + 10\Delta^2 y(t) - y(t) = 1;$
- 4) $\Delta^2 y(t) + 8\Delta y(t) + 3y(t) = 3;$
- 5) $\Delta^3 y(t) - 3\Delta^2 y(t) + 6y(t) = 1;$
- 6) $\Delta^2 y(t) + 6\Delta y(t) + 2y(t) = 4;$
- 7) $\Delta^3 y(t) - 3\Delta^2 y(t) - 6y(t) = 1;$
- 8) $\Delta^2 y(t) - 5\Delta y(t) - 7y(t) = 2;$
- 9) $\Delta^3 y(t) + 5\Delta^2 y(t) - 3\Delta y(t) = 5;$
- 10) $\Delta^4 y(t) + 2\Delta y(t) + 3y(t) = 8;$
- 11) $\Delta^2 y(t) + 8y(t) = 2;$
- 12) $\Delta^3 y(t) - 5\Delta^2 y(t) + y(t) = 6;$
- 13) $\Delta^2 y(t) + 6\Delta y(t) - 4y(t) = 4;$
- 14) $\Delta^4 y(t) - 3\Delta^3 y(t) = 2;$
- 15) $\Delta^3 y(t) = 7\Delta^2 y(t) + 4;$
- 16) $\Delta^2 y(t) + 3\Delta y(t) - 7y(t) = 0;$
- 17) $\Delta^3 y(t) - 4\Delta^2 y(t) = 6;$
- 18) $\Delta^3 y(t) + 2\Delta^2 y(t) + 5y(t) = 0;$
- 19) $\Delta^3 y(t) + 4\Delta^2 y(t) - 3\Delta y(t) + 2y(t) = 1;$
- 20) $\Delta^3 y(t) + 6\Delta^2 y(t) - 4y(t) = 2;$
- 21) $\Delta^2 y(t) + 4\Delta y(t) - 5y(t) = 2;$
- 22) $\Delta^3 y(t) + 2\Delta y(t) = 0;$
- 23) $\Delta^3 y(t) - 4\Delta^2 y(t) + 2y(t) = 0;$
- 24) $\Delta^3 y(t) + 2\Delta^2 y(t) = 2;$
- 25) $\Delta^3 y(t) - 5\Delta y(t) = 4.$

Завдання 2. Знайти КР $\Delta y(t)$, $\Delta^2 y(t)$, $\Delta^3 y(t)$, якщо

- 1) $y(t) = t^3 + 2t + 1;$
- 2) $y(t) = t^4 + 3t^2 + 2t;$
- 3) $y(t) = e^t + 2t + 3.$

Завдання 3. Знайти частинний розв'язок РР

- 1) $\Delta y(t) + 2y(t) = 3; y(0) = 2;$
- 2) $2\Delta y(t) + y(t) = 2; y(0) = 4;$

3) $\Delta y(t) - 3y(t) = 5; y(0) = 1;$

Завдання 4. Знайти загальний розв'язок ОЛРР

1) $y(t + 2) + 3y(t + 1) - 4y(t) = 0;$

2) $y(t + 3) + 3y(t + 2) + 3y(t + 1) + y(t) = 0;$

3) $y(t + 4) + 2y(t + 2) + y(t) = 0.$

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок НЛРР

1) $y(t + 2) - 3y(t + 1) + 2y(t) = 2t + 1;$

2) $y(t + 2) - y(t) = t + 2;$

3) $y(t + 2) + 2y(t + 1) + y(t) = 2.$

Література

1. Волков Ю. І., Войналович Н. М. Елементи дискретної математики: навчальний посібник. Кіровоград: РВЦ КДПУ ім.. В. Винниченка, 1999. 178 с.
2. Годунов С. К., Рябенський В. С. Разностные схемы. Введение в теорію. М. : Наука, 1977. 440 с.
3. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика, часть 5 Мн. : Выш.шк 1984. 223 с.

Позначення

1. КР – кінцева різниця.
2. Z_+ – множина цілих невід’ємних чисел.
3. ЛРР – лінійне різницеве рівняння.
4. ОЛРР – однорідне лінійне різницеве рівняння.
5. НЛРР – неоднорідне лінійне різницеве рівняння.
6. ЛЗ – лінійно залежні.
7. ЛНЗ – лінійно незалежні.

Навчальне видання

Волкова Марія Георгіївна
Тарасенко Ірина Вікторівна

РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

**Методичні вказівки до самостійної роботи
студентів всіх технічних спеціальностей**

ДУІТЗ

65023, Одеса, вул. Ковальська, 1
Обсяг 1,0 д.а., електронна версія