

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку
Факультет електроніки, автоматизації та метрології
Кафедра вищої математики

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
Частина 3
Системи диференціальних рівнянь

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи
студентів усіх спеціальностей

Одеса – 2023

УДК 517.92

Рецензент: доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» Урум Г. Д.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. Частина 3. Системи диференціальних рівнянь: Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів усіх технічних спеціальностей / Укладач: М. Г. Волкова, О. І. Третьяк. Одеса: ДУІТЗ, 2023. 25 с.

Запропоновані методичні вказівки призначено для студентів усіх технічних спеціальностей і містять теми, що розглядаються під час вивчення курсу «Вища математика».

Ухвалено на засіданні кафедри вищої математики і рекомендовано до друку.

Протокол № 6 від 27 січня 2023 р.

Затверджено методичною радою ДУІТЗ.

Протокол № 2 від 08.02.2023 р.

© Волкова М. Г., Третьяк О. І. 2023

© ДУІТЗ, 2023

ЗМІСТ

1. Загальні питання теорії систем у нормальній і симетричній Формах	4
2. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь	9
3. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами	12
4. Лінійні неоднорідні системи	20
Література	24

1. Загальні питання теорії систем у нормальній і симетричній формах

Систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

називають *системою в нормальній формі*, або *системою, розв'язаною відносно похідних шуканих функцій* $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Розв'язком системи рівнянь (1) на проміжку $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$ називають сукупність неперервно диференційованих на I функцій $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, таких що

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = f_i(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \in I.$$

Рівність $\psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, де ψ – неперервно диференційована в області визначення системи (1) функція, C – довільна стала, називають *першим інтегралом* цієї системи, якщо справедлива рівність

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Якщо відомо n незалежних перших інтегралів $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = C_2$, ..., $\psi_n = C_n$, то сукупність

$$\psi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

де C_i , $i = 1, 2, \dots, n$, – довільні сталі, визначає загальний інтеграл системи (1).

Із загального інтеграла, розв'язуючи рівності (2) відносно $x_1, x_2, \dots, x_n$, можна знайти практично будь-який розв'язок системи (1).

Якщо відомий відмінний від сталої один перший інтеграл $\Psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, то, розв'язуючи це рівняння відносно однієї зі змінних, наприклад відносно x_n ,

$$x_n = \Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, C), \quad (3)$$

і підставляючи вираз (3) у перші $n - 1$ рівняння системи (1), дістанемо систему рівнянь, в якій число невідомих функцій на одиницю менше, ніж у системі (1).

Розглянемо два методи розв'язування систем диференціальних рівнянь у нормальній формі.

Метод виключення полягає у зведенні системи рівнянь до одного рівняння n -го порядку або до кількох рівнянь порядку, меншого від n .

Загальна схема методу виключення така. Диференціюючи, наприклад, перше з рівнянь (1) послідовно $n - 1$ разів і підставляючи щоразу замість похідних $\frac{dx_i}{dt}$, $i = 1, 2, \dots, n$, їхні значення $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, із рівнянь системи, дістаємо

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} &= F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{d^nx_1}{dt^n} &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Знайшовши $x_2, x_3, \dots, x_n$ із перших $n-1$ рівнянь системи (4) і підставивши в останнє, матимемо диференціальне рівняння n -го порядку

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}\right).$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо розв'язки системи (1).

Метод інтегровних комбінацій полягає в тому, що за допомогою арифметичних операцій із рівнянь системи (1) утворюють так звані *інтегровні комбінації*, тобто рівняння відносно деякої нової функції $u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, які легко інтегруються.

Зазначені методи розв'язання системи рівнянь (1) можна застосувати також до системи диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (5)$$

Розв'язуючи системи вигляду (5), доцільно використовувати властивість рівних дробів: якщо

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

і $k_1, k_2, \dots, k_n$ — довільні числа, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n}.$$

Задача 1. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = x \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = x e^{\cos t}.$$

Розв'язання. Перше з рівнянь не залежить від y . Тому, відокремлюючи змінні, маємо $x = C_1 e^{-\cos t}$. Підставимо в друге рівняння: $\frac{dy}{dt} = C_1$. Звідси $y = C_1 t + C_2$. Отже,

$$x = C_1 e^{-\cos t}, \quad y = C_1 t + C_2. \blacksquare$$

Задача 2. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + ay.$$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини першого з рівнянь, маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}. \quad (6)$$

Із другого рівняння знаходимо

$$\frac{dy}{dt} = -x + ay = -x + a \left(\frac{dx}{dt} - ax \right) = a \frac{dx}{dt} - (1 + a^2)x.$$

Підставивши цей вираз у (6), дістанемо рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a \frac{dx}{dt} + (1 + a^2)x = 0.$$

Корені відповідного характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Тому $x = e^{at} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Із першого рівняння даної системи знаходимо

$$y = \frac{dx}{dt} - ax = ae^{at} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{at} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) -$$

$$-ae^{at} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{at} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

Отже,

$$x = e^{at} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \quad y = e^{at} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t). \blacksquare$$

Задача 3. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{zy} = \frac{dz}{xy}.$$

Розв'язання. З рівняння $yzdx = xzdy$ знаходимо

$$x = C_1 y. \quad (7)$$

Складемо інтегровну комбінацію:

$$\frac{ydx + xdy}{yxz + xyz} = \frac{dz}{xy}, \quad \frac{d(xy)}{2xyz} = \frac{dz}{xy}.$$

Скорочуючи обидві частини цього рівняння на $\frac{1}{xy}$ та інтегруючи його, дістаємо

$$xy - z^2 = C_2. \quad (8)$$

Оскільки перші інтеграли (7) і (8) незалежні, то всі розв'язки даної системи визначаються зі співвідношень

$$x = C_1 y, \quad xy - z^2 = C_2. \blacksquare$$

2. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь

Лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь називають систему типу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in I, \quad (9)$$

де $A(t)$ — квадратна матриця порядку n , елементи якої $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, — неперервні на інтервалі I функції. Будь-який розв'язок системи (9) можна продовжити на весь інтервал I .

Множина $\mathcal{X}$ усіх розв'язків системи (9), визначених на I , є лінійним простором. Лінійний простір $\mathcal{X}$ усіх розв'язків лінійної однорідної системи ізоморфний фазовому просторові $\mathbf{R}^n$ цієї системи.

Фундаментальною системою розв'язків лінійної однорідної системи рівнянь називають базис лінійного простору розв'язків $\mathcal{X}$, тобто n лінійно незалежних розв'язків цієї системи.

Матрицю $X(t)$, стовпцями якої є розв'язки, що утворюють фундаментальну систему, називають *фундаментальною*.

Якщо $X(t_0) = E$, де E — одинична матриця, то фундаментальну матрицю $X(t)$ називають *матрицантом системи* (9).

Якщо $X(t)$ — фундаментальна матриця, а C — стала неособлива матриця порядку n , то $X(t)C$ є також фундаментальною матрицею системи (9).

Будь-яка система типу (9) завжди має фундаментальну матрицю $X(t)$. Будь-який розв'язок $x(t)$ системи (9) можна записати у вигляді

$$x(t) = X(t)c, \quad c = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ — сталі, тобто $x(t)$ є лінійною комбінацією розв'язків фундаментальної системи.

Будь-які $n + 1$ розв'язків системи (9) лінійно залежні.

Визначником Вронського системи вектор-функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ називають числову функцію

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{n1}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1n}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}, \quad \varphi_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{k1}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{kn}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Розв'язки $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ системи утворюють фундаментальну систему тоді й лише тоді, коли їх визначник Вронського $W(t)$ відмінний від нуля при деякому $t \in I$.

Якщо визначник Вронського розв'язків системи (0) дорівнює нулю в одній точці, то він тотожно дорівнює нулю при всіх $t \in I$.

Для визначника Вронського розв'язків системи (9) справедлива формула Ліувілля — Остроградського:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t a(r) dr},$$

$$\text{де } a(t) = \operatorname{tr} A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t).$$

Задача 4. Відомо, що $x_1 = -\sin t, y_1 = \cos t$ — розв'язок системи

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \cos^2 t - (1 - \sin t \cos t) y, \\ \frac{dy}{dt} &= (1 + \sin t \cos t) x + y \sin^2 t. \end{aligned}$$

Знайти всі розв'язки цієї системи.

Розв'язання. Нехай $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — розв'язок даної системи, для якого $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$.

За формулою Ліувілля — Остроградського маємо

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & -\sin t \\ \psi(t) & \cos t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^{\int_0^t (\sin^2 \tau + \cos^2 \tau) d\tau},$$

або

$$\varphi(t) \cos t + \psi(t) \sin t = e^t. \quad (10)$$

Оскільки $(\varphi(t), \psi(t))$ — розв'язок даної системи, то внаслідок (10)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\psi + \cos t \cdot (\varphi \cos t + \psi \sin t) = -\psi + e^t \cos t, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \varphi + \sin t \cdot (\varphi \cos t + \psi \sin t) = \varphi + e^t \sin t, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi - e^t \cos t) &= -(\psi - e^t \sin t), \\ \frac{d}{dt}(\psi - e^t \sin t) &= \varphi - e^t \cos t. \end{aligned}$$

Можна вибрати $\varphi = e^t \cos t$, $\psi = e^t \sin t$.

Загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \cos t - C_2 \sin t \\ C_1 e^t \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}. \blacksquare$$

3. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами

Систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (11)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — n -вимірний вектор, A — дійсна стала квадратна матриця порядку n , методом виключення можна звести до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами відносно однієї невідомої функції. Проте існують також інші методи розв'язування цих систем.

Метод Ейлера. Розв'язки системи (11) шукають у вигляді

$$x = e^{\lambda t} h, \quad h = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T. \quad (12)$$

Функція (12) є розв'язком системи (11) тоді й лише тоді, коли λ — власне значення матриці A , а h — власний вектор цієї матриці, який відповідає числу λ . Якщо власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матриці A попарно різні, а $h_1, h_2, \dots, h_n$ — відповідні власні вектори, то загальний розв'язок системи (11) має вигляд

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} h_n,$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ — довільні числа.

Якщо власному значенню λ кратністю k відповідає рівно k лінійно незалежних власних векторів $h_1, h_2, \dots, h_k$, то система (11) має k лінійно незалежних розв'язків вигляду $e^{\lambda t} h_1, e^{\lambda t} h_2, \dots, e^{\lambda t} h_k$.

Якщо власному значенню λ кратністю k відповідає m , $m < k$, лінійно незалежних власних векторів, то розв'язки, які відповідають λ , можна шукати у вигляді

$$x = (h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots + h_{k-m} t^{k-m}) e^{\lambda t}, \quad (13)$$

де $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{k-m}$ — невідомі вектори.

Щоб знайти координати невідомих векторів $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{k-m}$, треба підставити вираз (13) у систему (11). Прирівнявши коефіцієнти подібних членів у лівій і правій частинах системи, дістанемо рівняння для визначення координат невідомих векторів.

Якщо серед власних значень матриці A є комплексно-спряжені пари чисел $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, то розглянутим способом можна побудувати відповідні комплексні розв'язки типу $w = u + iv$. Виділивши дійсну й уявну частини таких розв'язків, дістанемо дійсні розв'язки, які відповідають λ .

Матричний метод інтегрування системи (11) ґрунтується на безпосередньому знаходженні її фундаментальної матриці.

Експонентою e^A матриці A називають суму ряду

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j, \quad (14)$$

де E — одинична матриця.

Властивості матричної експоненти

1. Якщо $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^{B+A}$.
2. Якщо $A = T^{-1}JT$, то $e^A = T^{-1}e^J T$.
3. Матриця $X(t) = e^{At}$ є розв'язком матричної задачі Коші: $X' = AX$, $X(0) = E$, тобто фундаментальною матрицею системи (11).

Із властивості 3 випливає, що розв'язок системи (11), який задовольняє умову $x(0) = x_0$, визначається формулою $x(t) = e^{At}x_0$.

Отже, задача інтегрування системи (11) еквівалентна задачі побудови матриці e^{At} .

Матричну експоненту e^{At} зручно будувати, використовуючи так звану жорданову форму матриці A . Як відомо, будь-яку матрицю A можна записати у вигляді

$$A = T^{-1}J(A)T, \quad J(A) = \text{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \dots, J_{m_s}(\lambda_s)),$$

де

$$J_{m_l}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad l=1, \dots, s; \quad \sum_{l=1}^s m_l = n,$$

причому власні значення $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ не обов'язково різні. Квазідіагональну матрицю $J(A)$ називають *жордановою формою матриці A* , а матрицю $J_{m_l}(\lambda)$ — *жордановою клітиною (блоком) матриці A* . Якщо $m_l = 1$, то жорданову клітину називають *простою*. Загальна кількість s жорданових клітин дорівнює кількості лінійно незалежних власних векторів матриці A . Власному значенню λ відповідає $r = n - \text{rang}(A - \lambda E)$ жорданових клітин.

Із властивості 2 випливає, що $e^{At} = T^{-1} e^{J(A)t} T$, де

$$e^{J(A)t} = \text{diag} \left[e^{J_{m_1}(\lambda_1)t}, \dots, e^{J_{m_s}(\lambda_s)t} \right].$$

Записавши матрицю $J_{m_l}(\lambda_l)$ у вигляді $J_{m_l}(\lambda_l) = \lambda_l E + I$, де

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

дістанемо, що $e^{J_{m_l}(\lambda_l)t} = e^{\lambda_l t} e^{It}$.

Матрицю e^{It} легко побудувати за допомогою ряду (14), оскільки $I^{m_l} = 0$, де m_l — порядок клітини $J_{m_l}(\lambda_l)$.

Задача 5. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = 5x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -4x - y.$$

Розв'язання. Застосовуємо метод Ейлера. Частинні розв'язки системи шукаємо у вигляді

$$x = \alpha e^{\lambda t}, \quad y = \beta e^{\lambda t}.$$

Підставивши в систему, дістанемо рівняння для визначення α і β :

$$(5 - \lambda)\alpha + 2\beta = 0, \quad -4\alpha + (-1 - \lambda)\beta = 0. \quad (15)$$

Це лінійна однорідна система. Вона має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ -4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

При $\lambda = 1$ система рівнянь (15) еквівалентна рівнянню $4\alpha + 2\beta = 0$, одним із розв'язків якого є $\alpha = 1$, $\beta = -2$. Тому

$$x_1 = e^t, \quad y_1 = -2e^t$$

— розв'язок даної системи рівнянь.

При $\lambda = 3$ система (15) еквівалентна рівнянню $2\alpha + 2\beta = 0$, яке задовольняє, наприклад, $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Отже, побудовано ще один розв'язок даної системи:

$$x_2 = e^{3t}, \quad y_2 = -e^{3t}.$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{3t} \\ -2e^t & -e^{3t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0,$$

то побудовані розв'язки лінійно незалежні й утворюють фундаментальну систему.

Загальний розв'язок системи виражається формулою

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -2e^t & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ -2C_1 e^t - C_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ — власні значення, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ — власні вектори матриці даної системи. ■

Задача 6. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + y, & x(0) &= 1, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y, & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язання. Застосовуємо метод Ейлера. Власні значення матриці даної системи знаходимо з характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Оскільки власні числа матриці рівні між собою, то розв'язки даної системи шукаємо у вигляді

$$x = (\alpha + \gamma t)e^{2t}, \quad y = (\beta + \delta t)e^{2t}.$$

Підставивши ці вирази в дану систему, дістанемо

$$\begin{aligned}\gamma + 2(\alpha + \gamma t) &= 3(\alpha + \gamma t) + \beta + \delta t, \\ \delta + 2(\beta + \delta t) &= -\alpha - \gamma t + \beta + \delta t.\end{aligned}$$

Ці рівності виконуються тотожно тоді й лише тоді, коли $\alpha - \gamma + \beta = 0$, $\gamma + \delta = 0$. Звідси дістаємо два лінійно незалежних розв'язки, наприклад: $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = \delta = 0$ і $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -1$. Отже, маємо два лінійно незалежних розв'язки системи:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{2t}, & x_2(t) &= (1+t)e^{2t}, \\ y_1(t) &= -e^{2t}; & y_2(t) &= -te^{2t}.\end{aligned}$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 (1+t)e^{2t}, \quad y = -C_1 e^{2t} - C_2 t e^{2t}.$$

Сталі C_1 і C_2 знайдемо з умов $x(0) = 1, y(0) = 0$:

$$1 = C_1 + C_2, \quad 0 = -C_1.$$

Звідси

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

Отже,

$$x = (1+t)e^{2t}, \quad y = -te^{2t}. \blacksquare$$

Задача 7. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + y.$$

Розв'язання. Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Відшукаємо розв'язок $x = \alpha e^{\lambda_1 t}$, $y = \beta e^{\lambda_1 t}$ даної системи, який відповідає кореню $\lambda_1 = 2 - i$. Підставивши ці вирази в систему, дістанемо рівняння для α і β :

$$(1+i)\alpha + 2\beta = 0, \quad -\alpha + (i-1)\beta = 0.$$

Одним із розв'язків цього рівняння є $\alpha = 1 - i$, $\beta = -1$; тому

$$x = (1-i)e^{(2-i)t}, \quad y = -e^{(2-i)t}$$

— комплексний розв'язок даної системи, який запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x &= (1-i)e^{2t}(\cos t - i \sin t) = e^{2t}(\cos t - \sin t - i(\cos t + \sin t)), \\ y &= -e^{2t}(\cos t - i \sin t). \end{aligned}$$

Оскільки коефіцієнтами даної системи є дійсні числа, то дійсна й уявна частини цього розв'язку окремо є також розв'язками системи.

Отже, маємо два дійсних розв'язки:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{2t}(\cos t - \sin t), & x_2(t) &= e^{2t}(\cos t + \sin t), \\ y_1(t) &= -e^{2t} \cos t; & y_2(t) &= -e^{2t} \sin t. \end{aligned}$$

Можна показати, що ці розв'язки лінійно незалежні, тому загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} x &= e^{2t}((C_1 - C_2)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t), \\ y &= -e^{2t}(C_1 \cos t - C_2 \sin t). \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 8. Знайшовши матрицю e^{At} , розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Власними значеннями матриці A є $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Знайдемо таку матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, щоб $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Перемноживши матриці в лівій і правій частинах цієї рівності, дістанемо систему для визначення сталих a , b , c , d :

$$-a + 2b = 0, \quad -c + d = 0.$$

Розв'язками цієї системи є, наприклад: $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$. Тому

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ураховуючи, що $A = T^{-1}JT$, дістаємо

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -e^{2t} \\ -1 & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & -1 + 2e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тому

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} 2 - 2e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & -1 + 2e^{2t} \end{pmatrix} x_0,$$

де x_0 — початкове (при $t = 0$) значення розв'язку $x(t)$. ■

4. Лінійні неоднорідні системи

Лінійною неоднорідною називають систему типу

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \dots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

або у векторно-матричній формі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (16)$$

де x — вектор із компонентами $x_1, \dots, x_n$; $A(t)$ — матриця, елементами якої є функції $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $f(t)$ — вектор-функція з компонентами $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Якщо відома фундаментальна матриця $X(t)$ лінійної однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (17)$$

то систему (16) завжди можна розв'язати за допомогою **методу варіації довільних сталих (методу Лагранжа)**. Згідно з цим методом загальний розв'язок системи (16) шукаємо у вигляді $x = X(t)c(t)$. Компоненти $c_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, вектора $c(t)$ визначаються із системи рівнянь

$$X(t) \frac{dc}{dt} = f(t),$$

яка має єдиний розв'язок відносно $\frac{dc}{dt}$ ($\det X(t) \neq 0$): $\frac{dc}{dt} = X^{-1}(t) f(t)$.

Систему (16) можна розв'язувати також за допомогою методів виключення та інтегровних комбінацій.

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (16) складається із загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи (17) та якогонебудь частинного розв'язку неоднорідної системи.

Якщо в системі (16) матриця $A(t) = A$ стала, а функції $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, мають вигляд

$$f_i(t) = e^{\alpha t} (P_{m_i}(t) \cos \beta t + R_{k_i}(t) \sin \beta t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де $P_{m_i}(t)$ і $R_{k_i}(t)$ — многочлени степенів m_i і k_i відповідно, то частинний розв'язок неоднорідної системи (16) можна знайти за **методом невизначених коефіцієнтів**. Згідно з цим методом частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_i = e^{\alpha t} (Q_{m+s}^i(t) \cos \beta t + T_{m+s}^i(t) \sin \beta t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

де $Q_{m+s}^i(t)$, $T_{m+s}^i(t)$ — многочлени степеня $m + s$ із невизначеними коефіцієнтами; $m = \max_i \{m_i, k_i\}$, $s = 0$, якщо контрольне число $\sigma = \alpha + i\beta$ не є

власним значенням матриці A ; якщо ж σ є власним значенням матриці A , то S можна вибрати таким, що дорівнює кратності цього числа (точніше S дорівнює порядку найбільшої клітини Жордана матриці A , яка відповідає власному значенню σ).

Невідомі коефіцієнти многочленів $Q_{m+s}^i(t)$, $T_{m+s}^i(t)$ знаходять підстановкою (18) в дану систему й прирівнюванням коефіцієнтів подібних членів.

Метод невизначених коефіцієнтів для побудови частинного розв'язку застосовний і тоді, коли компоненти $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, вектора $f(t)$ є лінійними комбінаціями функцій типу (18). Для цього слід скористатися принципом суперпозиції розв'язків, який полягає в тому, що коли x^i є розв'язком

лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f^i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, то $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$ є розв'я-

зком лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{i=1}^m \alpha_i f^i(t)$, де $\alpha_i = \text{const}$,
 $i = 1, 2, \dots, m$.

ЗАДАЧА 9. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідної однорідної системи є

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \quad y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$$

($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ — власні значення матриці однорідної системи). Одне з контрольних чисел $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 4$ дорівнює власному значенню $\lambda_1 = 1$.

Користуючись методом невизначених коефіцієнтів і принципом суперпозиції, частинний розв'язок даної системи шукаємо у вигляді

$$x = (A_1 + A_2 t) e^t + A_3 e^{4t}, \quad y = (B_1 + B_2 t) e^t + B_3 e^{4t}.$$

Підставивши ці вирази в систему, дістанемо

$$\begin{aligned} -A_1 + A_2 - B_1 &= 2, & A_1 + B_1 - B_2 &= 0, \\ A_2 + B_2 &= 0, & 2A_3 - B_3 &= 0, & 2B_3 - A_3 &= -3, \end{aligned}$$

звідки

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = -1, \quad B_1 = -1, \quad B_2 = -1, \quad B_3 = -2.$$

Тому загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t e^t - e^{4t}, \\ y &= -C_1 e^t + C_2 e^{3t} - (t+1) e^t - 2e^{4t}. \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 10. Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{t^2} + \ln t.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідної однорідної системи є

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Загальний розв'язок даної системи шукаємо у вигляді

$$x = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{-t}, \quad y = C_1(t) e^t - C_2(t) e^{-t}. \quad (19)$$

Функції $C_1(t)$ і $C_2(t)$ знаходимо із системи

$$C_1'(t) e^t + C_2'(t) e^{-t} = 0, \quad C_1'(t) e^t - C_2'(t) e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t.$$

Маємо:

$$C_1'(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{1}{t^2} + \ln t \right), \quad C_2'(t) = -\frac{1}{2} e^t \left(\frac{1}{t^2} + \ln t \right).$$

Звідси

$$C_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) + C_1^0, \quad C_2(t) = \frac{1}{2} e^t \left(\frac{1}{t} - \ln t \right) + C_2^0,$$

де C_1^0, C_2^0 — довільні сталі. Підставивши в (19), дістанемо шуканий загальний розв'язок:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \ln t, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{t}. \blacksquare$$

Література

1. Гаращенко Ф. Г. Диференціальні рівняння для інформатиків: підручник / Ф. Г. Гаращенко, В. Т. Матвієнко, І. І. Харченко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 352 с.
2. Герасимчук В. С. Вища математика. Невизначений, визначений та не-власні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов – К.: Книги України ЛТД, 2010. – 470 с.
3. Гой Т. П. Диференціальні рівняння / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.
4. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ: Ігнатекс – Україна, 2011. – 648 с.
5. Івасишен С. Д. Диференціальні рівняння: методи та застосування / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 288 с.
6. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. К.: Либідь, 2004. 408 с.
7. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К.: Вища шк., 1994. – 454 с.
8. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння в задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К.: Либідь, 2003. – 504 с.
9. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
10. Шкіль М. І. Диференціальні рівняння / М. В. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко. К.: Техніка, 2003. 368 с.

Навчальне видання

Волкова Марія Георгіївна
Третяк Олександр Іванович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Частина 3

Системи диференціальних рівнянь

Методичні вказівки до практичних
занять та самостійної роботи
студентів усіх технічних спеціальностей

Видається в авторській редакції

ДУІТЗ

65023, Одеса, вул. Кузнечна, 1

Обсяг 1.5, елект. версія