

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗВ'ЯЗКУ**

**МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ**

**Методичний посібник
для самостійної роботи студентів
технічних спеціальностей
Частина 2**

Одеса 2024

Автор:

Мірошніченко О.І., ст. викладач кафедри фізико-математичних наук ДУІТЗ.

За загальною редакцією В.І. Ірхи.

Рецензенти:

Воробйова О.М., в.о. зав. кафедрою автоматики та комп'ютерно-інтегрованих технологій, кандидат технічних наук, доцент ДУІТЗ;

Маслєєва Н.В., доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та астрономії ОНУ ім. І.І. Мечникова.

*Рекомендовано до друку Навчально-методичною радою
Державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку.
Протокол № 7 від 30 травня 2024 р.*

Мірошніченко О.І. Методика розв'язування фізичних задач: метод. посіб. для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей. Ч. 2 / за заг. ред. Ірхи В.І. – Одеса: ДУІТЗ, 2024. – 72 с.

В методичному посібнику «Методика розв'язування фізичних задач» представлено теоретичний матеріал для самостійної роботи студентів спеціальностей 171 – Електроніка; 174 – Автоматизація комп'ютерно-інтегрованих технологій та роботехніка; 175 – Інформаційно-вимірювальні технології; 176 – Мікро- та наносистемна техніка; 275 – Транспортні технології (на автомобільному транспорті). Даний посібник містить теоретичний матеріал з теми «Молекулярна фізика та термодинаміка», а також приклади розв'язування задач з даної теми. Призначений для студентів 1 курсу всіх технічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ.....	5
2. МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ТА ТЕРМОДИНАМІКИ.....	5
ДОДАТОК.....	67
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	71

ВСТУП

Фізика є однією з найбільш фундаментальних наук, яка глибоко впливає на інші науки та різні розділи техніки. Саме тому вивчення основ фізики є принциповим для можливості оволодіння спеціалізованими дисциплінами. Щоб покращити своє розуміння фізичних явищ необхідно, крім теоретичної підготовки, ще й вміння розв'язувати задачі. Уміння правильно розв'язати та провести аналіз задачі є чи не найвищим критерієм при оцінюванні глибини вивченого в фізиці матеріалу. В даному посібнику розглянуті основи теорії, а також різноманітні приклади розв'язування задач з молекулярно-кінетичної теорії та основ термодинаміки.

1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ТА ТЕРМОДИНАМІКИ

Коли ми переходимо до більш детального вивчення матерії, то стикаємося з неабиякими складнощами. Фізика матеріальної точки досить проста – достатньо лише знати початкові координати і швидкості – і рівняння динаміки дозволять нам визначити стан цієї точки в наступні моменти часу. Все значно ускладнюється якщо ми маємо справу з великою кількістю подібних матеріальних точок. Наприклад для числа 10^{23} матеріальних точок необхідно задати ту ж кількість початкових умов для координат та швидкостей і розв'язати стільки ж рівнянь. Саме тому для вивчення систем з великою кількістю частинок (гази, рідини, тверді тіла, плазма) є необхідним зовсім інші підходи. Наприклад для газів використовується молекулярно-кінетична теорія, яка дозволяє досить прийнятно описати властивості газів.

Найпростіша молекулярно-кінетична теорія газів має в своїй основі наступні положення. Газ – це сукупність однакових частинок, які хаотично рухаються в просторі, а також не взаємодіють одна з одною. Розміри цих частинок (молекул чи атомів) досить малі по зрівнянню з тим об'ємом посудини, де вони перебувають, тому їх сумарним об'ємом можна знехтувати. Більшу частину часу частинки рухаються вільно, іноді відбуваються зіткнення зі стінками посудини, або іншими частинками. Це так звана модель ідеального газу.

У реальних газів частинки мають деякі розміри, а також взаємодіють одне з одним не тільки за допомогою зіткнень. Але при зменшенні густини газу, відстань між молекулами (атомами) буде настільки велика, що даною силою взаємодії можна знехтувати. З цього слідує, що будь-який газ при певних умовах буде близьким за властивостями до ідеального.

Розглянемо наступне. При зіткненні частинки газу зі стінкою вона буде передавати їй імпульс, який чисельно дорівнює змінні імпульсу цієї частинки. Кожний елемент стінки постійно буде отримувати деякий імпульс від великої кількості подібних частинок. В результаті цього за деякий час Δt кожний елемент стінки отримає деякий сумарний імпульс ΔP . Частинки рухаються хаотично, всі напрями руху мають однакову ймовірність. Одним із доказів подібного твердження є та обставина, що тиск газу на стінки всюди однаковий. Якщо ж в одному з напрямів кількість молекул (атомів) переважало то очевидно тиск в цьому напрямі був би більшим. Швидкості частинок не мають якоїсь однієї визначеної величини. Більш того, швидкість частинок повинна змінюватися після кожного зіткнення одна з одною, причому вона може як зменшуватися так і збільшуватися (ймовірність обох випадків однакова).

Щоб спростити задачу знову розглянемо деякі припущення. По-перше, нехай молекули рухаються тільки вздовж трьох взаємно перпендикулярних прямих. Якщо, наприклад, газ містить N частинок, то одночасно вздовж однієї прямої буде рухатися $N/3$, причому половина $N/6$ буде рухатися в одному напрямі, а інша половина – в протилежному. Використовуючи дане

припущення можемо вважати, що кількість частинок, які рухаються в заданому напрямі, дорівнює величині $N/6$. Також припустимо, що всі частинки мають однакову швидкість.

Розрахуємо імпульс, який передає частинка при зіткненні зі стінкою посудини. До зіткнення молекула газу мала імпульс, який був направлений по нормалі до поверхні, дорівнював mv . В результаті взаємодії імпульс змінить свій знак на протилежний (вважаємо зіткнення абсолютно пружними). Таким чином, повна зміна імпульсу частинки буде дорівнювати:

$$(-mv) - mv = -2mv. \quad (1.1)$$

Згідно третьому закону Ньютона стінка отримає імпульс $2mv$, який матиме напрям вздовж нормалі. За час Δt до елемента стінки ΔS долетять усі частинки, які знаходяться в об'ємові циліндра с площею основи ΔS і висотою $v\Delta t$. Число цих молекул буде дорівнювати:

$$\Delta N = \frac{1}{6}nv\Delta t\Delta S. \quad (1.2)$$

Тут n – концентрація, тобто число частинок в одиниці об'єму. Необхідно зауважити, що деяка кількість частинок по дорозі до стінки матимуть зіткнення з іншими частинками, внаслідок чого змінять свій напрям та не зможуть досягти елемента ΔS . Але це нічого не змінює в наших розрахунках. Подібні зіткнення не порушують хаотичність руху: перехід частини молекул з групи, яка рухається до стінки, в групу іншого напрямку супроводжується одночасним переходом такого ж числа молекул із інших груп до групи, що рухається в напрямку елемента стінки. Згідно з (1.2) кількість ударів об елемент стінки за одиницю часу буде дорівнювати:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{6}nv\Delta S,$$

а число зіткнень об елемент стінки одиничної площадки ($\Delta S=1$) дорівнює:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{6}nv. \quad (1.3)$$

Помноживши кількість зіткнень на величину імпульсу (1.1), отримаємо зміну імпульсу стінки, а саме:

$$\Delta P = 2mv\frac{1}{6}nv\Delta t\Delta S = \frac{1}{3}mnv^2\Delta t\Delta S.$$

І нарешті, розділивши даний вираз на $\Delta t\Delta S$ отримаємо формулу для тиску:

$$p = \frac{1}{3}mnv^2 \quad (1.4)$$

або, враховуючи те, що кінетична енергія дорівнює $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, можемо переписати формулу (1.4) у наступному вигляді:

$$p = \frac{2}{3}nE_k. \quad (1.5)$$

При отриманні формул (1.4) та (1.5) ми не враховували той факт, що насправді швидкості у частинок неоднакові. Але, як покаже подальший аналіз це фактично не впливає на результат, якщо в (1.4) та (1.5) швидкість та кінетичну енергію замінити на середні величини. Тобто будемо мати:

$$p = \frac{2}{3}n\bar{E}_k. \quad (1.6)$$

Рівняння (1.6) є основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії. Із нього слідує те, що при постійному значенні n тиск прямо пропорційний середній кінетичній енергії поступального руху молекул (атомів). З іншого боку, з експериментальних даних відомий взаємозв'язок між тиском, об'ємом та температурою (рівняння Клапейрона-Менделєєва):

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (1.7)$$

Тут R – газова константа, M – молярна маса (маса молекул в одному молі, один моль – кількість молекул, яка дорівнює величині $6,022 \cdot 10^{23}$) m – маса газу, T - термодинамічна температура. Порівняння (1.7) та (1.6) приводить нас до висновку, що температура пропорційна середній кінетичній енергії. Для того щоб вивести коефіцієнт пропорційності проробимо наступне. Помножимо рівняння (1.6) на молярний об'єм:

$$pV_M = \frac{2}{3} n \bar{E}_k V_M.$$

Величина nV_M фактично дорівнює постійній Авогадро. Тоді рівняння може переписати у вигляді:

$$pV_M = \frac{2}{3} N_a \bar{E}_k.$$

Враховуючи те, що рівняння Клапейрона-Менделєєва для одного мольо має вигляд $pV_M = RT$ отримуємо наступне:

$$\frac{2}{3} N_a \bar{E}_k = RT$$

звідси:

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT, \quad (1.8)$$

тут $k = \frac{R}{N_a}$ – постійна Больцмана ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К). Таким чином приходимо до важливого висновку – температура пропорційна середній кінетичній енергії руху однієї молекули (атому).

Якщо у нас буде суміш декількох газів, то різні за масою молекули будуть мати різну середню швидкість, але середня кінетична енергія у них буде однакова. В цьому випадку тиск можна записати у вигляді:

$$p = nkT = (n_1 + n_2 + \dots)kT.$$

Тут $n_1, n_2, \dots$ – кількість частинок кожного типу, які містяться в одиниці об'єму. Даний вираз можна переписати у наступному вигляді:

$$p = n_1 kT + n_2 kT + \dots.$$

Але $n_1 kT$ – це тиск першого газу, який був би в посудині, якщо там знаходились би тільки частинки першого сорту, $n_2 kT$ – тиск газу, якщо в посудині знаходились тільки молекули другого сорту. Такий тиск, який зумовлений знаходженням частинок одного сорту в даній посудині при тій умові, що вони присутні в тій кількості в якій знаходяться в суміші, називається *парціальним тиском*. Фактично дане рівняння можна переписати в наступному вигляді:

$$p = p_1 + p_2 + \dots = \sum_i p_i. \quad (1.9)$$

Даний вираз є законом Дальтона. Він звучить наступним чином: тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, що входять до суміші.

Вираз (1.8) для середньої енергії враховує тільки поступальну енергію частинок. Але крім поступального руху також у частинок можуть наступні види руху – обертальних та коливальний. Ці види руху несуть деякий запас енергії величину якої можна визначити, якщо скористатися положенням статистичної фізики о рівному розподілу енергії по ступеням свободи. Ступень свободи механічної системи – це кількість незалежних величин за допомогою яких можна задати опис руху системи. Наприклад, для положення в просторі матеріальної точки необхідно задати величини трьох координат (декартових, або сферичних чи інших). У відповідності з цим матеріальна точка матиме три ступені свободи. Положення в просторі абсолютно твердого тіла можна визначити, якщо задати три координати центру його інерції, та два кута θ, φ , які показують напрямок деякої вісі, яка пов'язана з даним твердим тілом, та проходить через центр його інерції, а також ще одним кутом ψ , який визначає напрям вісі, яка також пов'язана з тілом, та є перпендикулярною до першої вісі. Таким чином, абсолютно тверде тіло матиме шість ступенів свободи. Зміна координат без зміни напряму двох заданих координатних прямих, пов'язаних з тілом, буде зумовлюватися поступальним рухом даного тіла. Зміни кутів θ, φ та ψ при незмінному положенні центру інерції будуть зумовлені обертальним рухом. Таким чином, із шести ступенів свободи три є поступальними, а три – обертальними.

Якщо маємо систему із N точок, між якими відсутні жорсткі зв'язки, то будемо мати $3N$ ступенів свободи (положення кожної точки буде визначатися трьома координатами). Будь-який жорсткий зв'язок між точками буде приводити до зменшення ступенів свободи на одиницю. Наприклад, якщо система матиме дві матеріальні точки, відстань між якими є постійною величиною, то число ступенів свободи буде дорівнювати п'яти. І справді, в цьому випадку між координатами буде наступний взаємозв'язок:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.$$

Через це координати вже не будуть незалежними. Достатньо задати п'ять координат і шоста буде визначатися за допомогою попереднього виразу. Для того щоб кваліфікувати ці п'ять ступенів свободи, відмітимо, що положення системи із двох жорстко зв'язаних матеріальних точок можна визначити наступним чином: задати три координати центру інерції, а також два кути θ та ψ , які визначають напрям в просторі вісі даної системи. Звідси слідує, що три ступені свободи – поступальні, а два – обертальні.

Якщо дві матеріальні точки зв'язані не жорстким зв'язком, а пружним (тобто зміна відстані між точками приводить до виникнення сил, які намагаються повернути точки в початкові положення відносно один одної), то число ступенів свободи буде дорівнювати шести. Положення системи в цьому випадку можна задати трьома координатами центру інерції, двома кутами θ та ψ , а також відстанню між цими точками r . Зміна r відповідає коливанням в системі, тому цю ступінь свободи називають коливальною. Таким чином

система матиме наступні ступені свободи: три поступальні, дві обертальні, та одна коливальна.

Тепер розглянемо систему, яка складається з N матеріальних точок, які пружно пов'язанні одна з одною. Така система буде мати $3N$ ступенів свободи. Існує рівноважна конфігурація цієї системи, при якій потенціальна енергія системи буде мати мінімум. Рівноважна конфігурація буде характеризуватися визначеними взаємними відстанями між точками даної системи. Якщо систему вивести із рівноважної конфігурації, то почнуться коливальні рухи. Положення системи можна визначити, якщо задати положення рівноважної конфігурації та величини, яка характеризує зміщення матеріальних точок відносно рівноважних положень. Ці величини будуть відповідати коливальним ступеням свободи.

Положення рівноважної конфігурації, так як і положення абсолютно твердого тіла, можна задати за допомогою шести величин, які включають в себе три поступальні та три обертальні ступені свободи. Таким чином кількість коливальних ступенів свободи буде дорівнювати $3N - 6$. Тут ми скористалися припущенням, що рівноважні центри матеріальних точок не лежать на одній прямій. Інакше число обертальних ступенів свободи буде дорівнювати двом, і тоді кількість коливальних ступенів свободи буде дорівнювати $3N - 5$.

Одноатомна молекула газу буде мати 3 ступеня свободи, двоатомна – в залежності від типу зв'язку між атомами (жорсткий чи пружний) буде мати або 5 ступенів свободи – три поступальні та дві обертальні, або шість – три поступальні, дві обертальні та одна коливальна, трьохатомна з жорстким зв'язком між атомами – шість ступенів свободи і т.д..

Необхідно відмітити, що число поступальних ступенів свободи завжди однакова – воно дорівнює трьом. Так як всі напрямки руху ми вважаємо однаковими, то на кожен ступінь свободи молекули повинна приходиться одна і та ж кількість енергії. Із рівняння (1.8) слідує, що ця енергія дорівнює $\frac{1}{2}kT$. Також можна припустити, що ні один з видів руху не має переваги над іншими, а значить і будь-яка ступінь свободи – поступальна, обертальна, коливальна, повинна мати однакову енергію. Тобто енергія кожного ступеня свободи буде дорівнювати $\frac{1}{2}kT$.

Згідно положенню о рівномірному розподілу енергії по всім ступеням свободи середнє значення енергії однієї молекули (при одній і тій же температурі) буде тим більша чим складніша сама молекула. Необхідно також врахувати, що коливальна степінь свободи матиме вдвоє більшу енергетичну ємність по зрівнянню з обертальною та поступальною ступенями свободи. Це пов'язано з тим що поступальний та обертальний рух мають тільки кінетичну енергію, в той же час коливальний пов'язаний як з кінетичною енергією так із потенціальною, при чому для гармонічного осцилятора ці енергії будуть дорівнювати один одному. Саме тому на кожен ступінь свободи коливального необхідно дві половини від kT – одна на кінетичну енергію, друга – на потенціальну. Таким чином енергія складної молекули буде дорівнювати:

$$\bar{E} = \frac{i}{2}kT,$$

тут i – сума кінетичних, обертальних та подвійного числа коливальних ступенів свободи, а саме:

$$i = i_{\text{п}} + i_{\text{об}} + 2i_k.$$

Внаслідок того, що для ідеального газу молекули не взаємодіють одна із одним, внутрішня енергія молю такого газу буде дорівнювати добутку числа Авогадро на енергію однієї молекули:

$$U = N_a * \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} RT. \quad (1.10)$$

Для довільної маси газу внутрішня енергія буде визначатися за наступною формулою:

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT. \quad (1.11)$$

А тепер введемо нове поняття – теплоємність. Теплоємність – це величина, яка дорівнює кількості теплоти, яку необхідно надати тілу для нагрівання його на один градус. Згідно цьому визначенню запишемо:

$$C_{\text{тіла}} = \frac{\delta Q}{\delta T} \quad (1.12)$$

теплоємність одиниці маси називають питомою теплоємністю. Між звичайною теплоємністю та питомою очевидний взаємозв'язок:

$$c = \frac{C}{m}$$

також використовують теплоємність одного молю речовини, яка буде даватися виразом:

$$C_{\mu} = M * c. \quad (1.13)$$

Величина теплоємності залежить від умов, при яких відбувається нагрівання (охолодження) тіла. Найчастіше розглядають теплоємність при постійному тиску, або постійному об'єму.

Якщо нагрівання відбувається при постійному об'ємі, то тіло не здійснює ніякої роботи над зовнішніми тілами, тому вся надана теплота буде йти на зміну внутрішньої енергії:

$$dQ = dU.$$

Звідси витікає що теплоємність можна записати наступним чином:

$$C_V = \frac{dU}{dT}. \quad (1.14)$$

Тут C_V – теплоємність при постійному об'ємі. Таким чином для того щоб отримати теплоємність одного моля газу необхідно продиференціювати (1.10) за температурою:

$$C_V = \frac{d}{dT} \left(\frac{i}{2} RT \right) = \frac{i}{2} R, \quad (1.15)$$

тобто в даному випадку теплоємність є постійною величиною, яка не залежить від зовнішніх умов.

Якщо ж нагрівання здійснюється при постійному тиску, то газ буде розширяться, виконуючи деяку роботу проти зовнішніх сил. Зрозуміло, що в цьому випадку для зміни температури тіла на один градус необхідно буде надати тілу більше тепла ніж при постійному об'ємі – частина теплоти піде на здійснення роботи. Запишемо рівняння для цього випадку:

$$dQ = dU + pdV.$$

Якщо розділити даний вираз на зміну температури, то отримаємо:

$$C_p = \frac{dU}{dT} + p \left(\frac{dV}{dT} \right)_p, \quad (1.16)$$

тут $\left(\frac{dV}{dT} \right)_p$ – зміна об'єму при постійному тиску. Складова $\frac{dU}{dT}$ як видно із (1.14) дає теплоємність при постійному об'ємі. Тому рівняння (1.16) можна привести до наступного вигляду:

$$C_p = C_V + p \left(\frac{dV}{dT} \right)_p. \quad (1.17)$$

Якщо використати рівняння (1.7) то $\left(\frac{dV}{dT} \right)_p$ можна переписати у вигляді:

$$\left(\frac{dV}{dT} \right)_p = \frac{d}{dT} \left(\frac{RT}{p} \right) = \frac{R}{p},$$

таким чином отримаємо рівняння:

$$C_p = C_V + R. \quad (1.18)$$

Як бачимо з (1.18) робота, яку здійснює один моль ідеального газу дорівнює універсальній газовій константі. Також, якщо використати рівняння (1.15) можемо записати:

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (1.19)$$

Якщо розділити (1.19) на (1.15), то зможемо знайти співвідношення двох типів теплоємності для ідеальних газів:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

Насправді теплоємності реальних газів (особливо для складних молекул) не відповідають в повній мірі даній моделі. Особливо це помітно, якщо розглянути температурну залежність теплоємності. На рис. 1.1 показана температурна залежність теплоємності C_V для молекул водню, яка була отримана експериментальним шляхом.

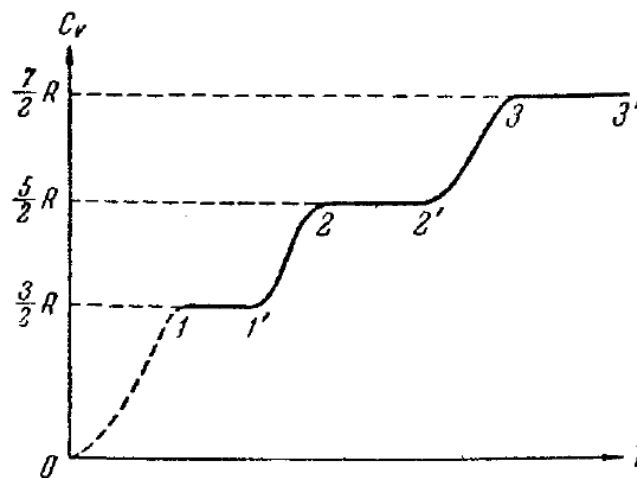


Рис. 1.1. Температурна залежність теплоємності для молекул водню

Згідно (1.15) теплоємність не повинна залежати від температури. Але як видно з рис. 1.1 це справедливо тільки в межах декількох температурних інтервалів, причому на різних ділянках теплоємність відповідає молекулам з різними ступенями свободи. Наприклад для 1-1' C_V дорівнює $\frac{3}{2}R$. Це відповідає молекулі, яка поводить себе як система у якій присутні тільки поступальні ступені свободи.

А вже на інтервалі 2-2' теплоємність має вже величину $\frac{5}{2}R$. Відповідно на цьому інтервалі у молекулі, крім трьох поступальних ступенів свободи з'являються ще й дві обертальні. І нарешті при досить великих температурах теплоємність прийме значення яке дорівнює $\frac{7}{2}RT$. Це буде свідчити о наявності температурних коливань. В проміжках між постійним значеннями теплоємність монотонно зростає, що відповідає як би нецілим значенням ступенів свободи.

Таким чином число ступенів свободи залежить від температури. При низьких температурах присутні лише поступальні ступені свободи. При більш високих температурах з'являється також і обертання молекул. І нарешті, при ще більш високих температурах з'являються і коливальні рухи молекул. Причому, як це слідує з монотонного зростання теплоємності за температурою, обертання, та коливання з'являється не відразу у всіх молекул. Спочатку, наприклад обертання, спостерігається тільки у невеликої частини молекул. Потім, з підвищенням температури доля молекул, які мають обертальний рух, зростає і наприкінці при досягненні певної температури усі молекули будуть мати обертальний рух. Такий ж самий процес відбувається і для коливального руху.

Така поведінка молекул не має пояснення в рамках класичної механіки. Пояснення дає квантова механіка. Згідно з нею, коливальна та обертальна енергія молекул є квантованою. Це означає, що дані види енергії можуть мати не будь-яку величину, а тільки дискретні значення (значення, які відмінні один від одного на деяку скінчену величину). Це значить, що енергія коливального та обертального руху молекул може змінюватися тільки ривками. Для енергії поступального руху такого обмеження не існує.

Так як взагалі молекули мають неоднакову енергію, то для того щоб значна кількість цих молекул прийняла участь в коливальному та обертальному русі, необхідно що саме середня їх енергія мали величину, яка значно більша ніж відстань між дозволеними рівнями енергії. Якщо взяти досить низьку температуру, то середня енергія буде менше, наприклад, першого дозволеного рівня температур для обертального руху. Тоді тільки незначна кількість молекул буде мати достатню енергію для того, щоб прийняти участь в обертальному русі, основна частина молекул буде рухатися поступально. Незначні зміни температури приведуть тільки к збільшенню енергії поступального руху, тому теплоємність газу і буде дорівнювати $\frac{3}{2}RT$.

Підвищення температури буде призводити до збільшенню середньої енергії, тому все більша кількість молекул матиме змогу прийняти участь в обертальному русі. Цьому процесу відповідає інтервал 1'-2 (див. рис. 1.1). Після того як усі молекули матимуть обертальний рух теплоємність знову не буде змінюватися –

цьому відповідає горизонтальна частина 2-2'. Наступне збільшення температури буде призводити до того, що все більша частина молекул буде приймати участь в коливальному русі, чому відповідає 2'-3 на температурній кривій. І нарешті, при достатньо високій температурі усі молекули матимуть коливальний рух, що відповідає горизонтальному інтервалу 3-3'.

Необхідно розглянути ще один процес ідеального газу, який називається адіабатним. Адіабатним називається процес при якому відсутній теплообмін з навколишнім середовищем. Використаємо закон збереження енергії для ідеального газу. Згідно йому:

$$dQ = \frac{m}{M} C_V dT + p dV$$

виходячи з означення адіабатного процесу можемо записати, що $dQ = 0$. Тоді попереднє рівняння переписеться у наступному вигляді:

$$\frac{m}{M} C_V dT + p dV = 0. \quad (1.20)$$

Тепер використаємо рівняння ідеального газу и представимо тиск через температуру та об'єм:

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}.$$

Підставмо даний вираз в (1.20). Якщо також скоротити на $\frac{m}{M}$, то отримаємо:

$$C_V dT + \frac{RT}{V} dV = 0.$$

Перетворимо цей вираз наступним чином:

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0.$$

І нарешті останній вираз можемо записати як:

$$d \left(\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V \right) = 0 \rightarrow \ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{const}. \quad (1.21)$$

Враховуючи те, що для ідеального газу $C_p - C_V = R$, відношення $\frac{R}{C_V}$ можна замінити через деяку величину $\gamma - 1$ тут $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$. Підставивши це в (1.21), отримаємо наступний вираз:

$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{const}.$$

Якщо тепер ліву та праву частину підвести в степінь експоненти, то ми отримаємо:

$$e^{\ln T + (\gamma - 1) \ln V} = e^{\text{const}} \rightarrow TV^{\gamma - 1} = \text{const}. \quad (1.22)$$

Дане співвідношення - це рівняння адіабати в координатах температури та об'єму. Це рівняння можна переписати в інших координатах. Використаємо закон Клапейрона-Менделєєва. З нього можемо записати для температури:

$$T = \nu \frac{pV}{RT},$$

тут ν – кількість молів речовини. Тоді рівняння (1.22) можна переписати у вигляді:

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (1.23)$$

Адіабата, як це слідує з (1.23), хоч і схожа на ізотерму, але має інший нахил. Розрахуємо відношення $\frac{dp}{dV}$ для ізотерми, та адіабати в одній і тій ж точці. Для ізотерми:

$$pdV + Vdp = 0 \rightarrow \frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}.$$

Для адіабати на необхідно взяти диференціал від (1.23):

$$p\gamma V^{\gamma-1}dV + V^{\gamma}dp = 0 \rightarrow \frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

Бачимо, що нахил двох кривих відрізняється в γ раз.

При виводі даних рівнянь, ми вважали що стан газу в кожен момент часу характеризується визначеними параметрами тиску та об'єму, температури, тобто адіабатний процес розглядали як рівноважний. Рівноважним процес може бути тільки при його повільному протіканні. разом з цим, так як речовин, які зовсім не проводять тепло в природі не існує, кількість теплоти, що передається системі, буде тем менше чим менше час взаємодії. Таким чином процеси, які найбільш наближенні до адіабатичного процесу – це процеси, які мають швидке протікання. Прикладом такого процесу можуть розширення та стиснення газу, яке відбувається в кожній точці газу через який проходить звукова хвиля. Незважаючи на те, що взагалі в межах досить великого об'єму стан газу не є рівноважним (тиск та температура в різних точках неоднакові), поведінка газу при малих об'ємах досить задовільно описується формулами (1.22) та (1.23).

Барометрична формула

Атмосферний тиск на деякій висоті h зумовлений вагою газів, які лежать зверху. Позначимо через p тиск на висоті h . Тоді можемо записати, що тиск на висоті $h + dh$ буде дорівнювати $p + dp$, причому знаки dh та dp протилежні, тобто якщо $dh > 0$, то $dp < 0$. Це пов'язано з тим, що вага газів, що лежить вище висоти h буде зменшуватися, а значить й тиск також буде падати. Різниця між двома тисками p та $p + dp$ буде дорівнювати вазі газу, який знаходиться в циліндрі з площею основи, що дорівнює одиниці, та висотою dh :

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

тут ρ – густина газу на висоті h . З цього рівняння слідує наступне:

$$dp = -\rho g dh.$$

Ми знову скористаємося рівнянням Клапейрона-Менделєєва для того що виразити густину через тиск та температуру. Також будемо вважати, що поведінка газу не відрізняється від ідеального. Тому можемо записати наступне:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Таким чином отримаємо:

$$dp = -\frac{pMg}{RT} dh \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh. \quad (1.24)$$

Температура є деякою функцією від висоти. Якщо вид цієї функції відомий то можна про інтегрувавши рівняння (1.24) отримати відповідь. У

випадку незмінної з висотою температури інтегрування (1.24) дає наступне рівняння:

$$\ln p = -\frac{Mg}{RT}h + \ln C,$$

тут C – деяка постійна. Тепер ліву та праву частину підставимо у степінь експоненти:

$$p = Ce^{-\frac{Mg}{RT}h}.$$

Постійну знайдемо якщо підставимо в це рівняння висоту $h = 0$:

$$p_0 = C,$$

тут p_0 – тиск при висоті $h = 0$. Таким чином отримаємо нарешті:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h}. \quad (1.25)$$

Це барометрична формула. З неї слідує, що тиск газу падає з висотою тим більше чим важче є молекула та чим нижча температура.

Середня довжина пробігу

Молекули знаходяться в неперервному хаотичному русі постійно стикаються одна з одною. Мінімальна відстань на яку можуть зблизитися центри двох молекул називається ефективним діаметром молекули. Величина σd^2 називають ефективною площею молекули.

За час між двома зіткненнями молекули проходять деяку відстань l , яку називають довжиною вільного пробігу. Довжина вільного пробігу – величина випадкова. Вірогідність того, що молекула пройде без зіткнення можна задати наступним виразом:

$$\omega(l) = e^{-\frac{l}{\lambda}},$$

тут λ – середній шлях l , який проходить молекула між двома послідовними зіткненнями. Вона має назву середньої довжини пробігу. У відповідності з попереднім рівнянням вірогідність того, що молекулу пройде деякий шлях l без зіткнення знижується експоненціально зі збільшенням цього шляху. За одну секунду молекула пройде відстань, яка в дорівнює середній швидкості $\langle v \rangle$. Якщо за секунду вона буде мати N зіткнень то середня довжина пробігу буде дорівнювати:

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{N}.$$

Для того щоб розрахувати середнє число зіткнень молекул, припустимо, що усі молекули крім однієї припинили свій рух. Прослідкуємо за рухом цієї молекули. Вдарившись об одну з нерухомих молекул вона буде продовжувати свій прямолінійний рух до тих пір поки не зіткнеться з наступною частинкою. Це зіткнення відбудеться у тому випадку коли центр нерухомої молекули буде знаходитися на відстані від прямої, вздовж якої летить наша молекула, не більш ніж ефективний діаметр молекул. Після зіткнення частинка змінить напрям і знову буде рухатися по прямій поки не зустрине молекулу, центр якої знаходиться на відстані не більш ніж d . Таким чином частинка буде знаходитися в деякому криволінійному циліндрі з радіусом d .

За одну секунду молекула пройде шлях, який дорівнює $\langle v \rangle$. Число зіткнень за цей час дорівнює кількості молекул, які знаходяться в криволінійному циліндрі з радіусом основи d та довжини $\langle v \rangle$. Об'єм даного циліндру буде дорівнювати $\pi d^2 \langle v \rangle$. Помноживши це значення на кількість молекул в одиниці об'єму отримаємо наступне:

$$N' = \pi d^2 \langle v \rangle n.$$

Але насправді молекули рухаються, тому число зіткнень буде пропорційно середній швидкості руху молекул по відношенню одна до одної. Як показують розрахунки, середня швидкість відносного руху в $\sqrt{2}$ раз більша ніж середня швидкість молекул відносно стінок посудини. Тому середнє число зіткнень можна записати як:

$$N = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle n. \quad (1.26)$$

Для середньої довжини пробігу отримуємо:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (1.27)$$

Якщо замінити ефективний діаметр молекули через площу будемо мати:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}.$$

Оскільки концентрація молекул при постійній температурі пропорційна тиску, то середня довжина вільного пробігу буде обернено пропорційна тиску:

$$\lambda \sim \frac{1}{p}. \quad (1.28)$$

Ефективний діаметр молекул зменшується з ростом температури. Тому середня довжина пробігу з підвищенням температури буде збільшуватися. Залежність λ від дається наступною формулою

$$\lambda = \lambda_{\infty} \frac{T}{T+C}. \quad (1.29)$$

Тут C – деяка постійна, яка індивідуальна для кожного з газів, а λ_{∞} – середня довжина пробігу при температурі $T = \infty$.

При нормальних умовах середня довжина пробігу має величину приблизно 10^{-7} м, а число зіткнень досягає близько 10^9 . З падінням тиску величина середнього пробігу збільшується, а число зіткнень зменшується прямо пропорційно. Якщо довжина середнього пробігу буде тієї ж розмірності, що і розміри посудини в якій перебуває газ, то ми отримуємо так званий технічний вакуум.

Явища переносу

Ми розглядали тільки рівноважні стани газу. Такий стан характеризується однаковими величинами в усіх точках який займає даний газ. До цих величин відносять температуру, тиск, концентрацію частинок, відносну кількість молекул різного сорту та інше. Зараз ми розглянемо процеси, які виникають при відхиленні від рівноважного стану. Будемо вважати дані відхилення невеликими.

Одним із таких процесів є дифузія. Розглянемо суміш, яка складається з декількох компонент, тобто молекул різних типів. Тоді повне число молекул в одиниці об'єму буде дорівнювати:

$$n = \sum_i n_i.$$

Відносною концентрацією i -тої компоненти будемо називати величину, яка визначається співвідношенням:

$$c'_i = \frac{n_i}{n}.$$

Сума всіх відносних концентрацій буде дорівнювати одиниці. Абсолютну концентрацію якоїсь компоненти будемо визначати за допомогою наступної формули:

$$c_i = n_i m_i,$$

тут m_i – маса молекули i -тої компоненти суміші. Як ми знаємо із закону Дальтона, тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків кожної компоненти окремо:

$$p = \sum_i p_i = \sum_i n_i kT = nkT.$$

Іноді виникають такі ситуації, при яких концентрація компонент газу в різних точках простору неоднакова. В таких випадках за рахунок теплового руху відбувається поступове вирівнювання концентрації, яке супроводжується переносом маси i -ї компоненти в напрямку зменшення її концентрації. Цей процес і має назву **дифузії**.

Повне число молекул, а значить і маса газу в процесі дифузії не змінюється (це є наслідком закону о збереженні маси). Відбувається тільки перерозподіл молекул різних типів, тобто зміна величини n_i . Причому ця зміну відбувається таким чином, що збільшення n_i в одному місці для однієї компоненти супроводжується одночасною зміною n_i для інших компонент, тому сума по n_i є величиною постійною. Ми розглянемо тільки двокомпонентні суміші (для простоти викладок).

Припустимо наступне. Нехай в деякій частині простору підтримується постійний градієнт концентрації двох сортів молекул, вздовж деякої вісі z (нехай $n_1 > n_2$ при $z = 0$). Тиск всюди однаковий. Тоді і сума концентрацій $n_1 + n_2$ в кожному січенні також буде однаковою. В цьому випадку через площадку, яка перпендикулярна до вісі z встановиться потік молекул першого сорту, який можна охарактеризувати величиною маси M_1 , що переноситься через площину S за одну секунду. Тоді, як показує дослід, ця величина буде розраховуватися за формулою:

$$M_1 = -D \frac{dc_1}{dz} S,$$

тут D – деякий коефіцієнт пропорційності, який називають коефіцієнтом дифузії, $\frac{dc_1}{dz}$ – градієнт абсолютної концентрації в тій точці де ми розташували нашу площину S .

Маса, яка переноситься через дану площину за час t , буде дорівнювати:

$$M_1 t = -D \frac{dc_1}{dz} S t. \quad (1.30)$$

Одночасно буде існувати потік молекул іншого сорту, який направлений в протилежну сторону:

$$M_2 t = -D \frac{dc_2}{dz} S t.$$

Рівняння (1.30) отримано за допомогою даних досліду. Знак мінус показує те, що маса переноситься у напрямку спаду концентрації.

А тепер отримаємо рівняння дифузії, використовуючи молекулярно-кінетичну теорію. Припустимо, що маси молекул відрізняються на незначну величину $m_1 \approx m_2 \approx m$, а також ефективні січення цих молекул майже однакові $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma$. Тоді для цих молекул можна приписати однакову середню швидкість теплового руху, а середню відстань вільного пробігу можемо записати:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n},$$

тут $n = n_1 + n_2$.

Нехай зміна концентрації молекул першого сорту є деякою функцією від відстані вздовж вісі z $c_1 = c_1(z)$. Кожна молекула переносить через площину масу m . Позначимо кількість молекул першого сорту, що проходять скрізь площину S за одну секунду, через N'_1 , ті же молекули які рухаються в протилежному напрямку через N''_1 . Тоді маса першої компоненти газу, яка переноситься за одну секунду вздовж z буде дорівнювати:

$$M_1 = (N'_1 - N''_1)m. \quad (1.31)$$

можемо вважати, що молекули, які проходять через площину S , приходять з відстані, яка дорівнює середній довжині вільного пробігу. Тоді кількість молекул, що пролітають через нашу площадку в напрямку вісі, буде визначатися значенням числа молекул в одиниці об'єму n'_1 , яке відповідає координаті $z - \lambda$, а числу молекул, що летить в протилежному напрямку буде відповідати значення n''_1 , що має координати $z + \lambda$. Таким чином числа N'_1 та N''_1 будуть визначатися за формулою:

$$N_1 = n_1 \langle v \rangle S,$$

тут для N'_1 необхідно взяти число $n'_1 = n_1(z - \lambda)$, а для N''_1 — число $n''_1 = n_1(z + \lambda)$. Підставляючи ці значення в рівняння (1.31) будемо мати:

$$M_1 = -\frac{1}{6} \langle v \rangle S \frac{dn_1}{dz} 2\lambda m,$$

так як маса m є постійною величиною вираз $m \frac{dn_1}{dz}$ можна переписати наступним чином $\frac{d(mn_1)}{dz}$. Ця величина представляє собою градієнт концентрації $\frac{dc_1}{dz}$. Тоді останнє рівняння можемо записати у наступному вигляді:

$$M_1 = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \frac{dc_1}{dz} S. \quad (1.32)$$

Порівнюючи (1.32) та (1.30) отримаємо для коефіцієнту дифузії:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle. \quad (1.33)$$

Наші міркування можна з однаковим успіхом використовувати для обох компонент газу в суміші. Звідси слідує, що коефіцієнт дифузії однаковий для обох компонент.

Якщо у вираз (1.33) підставити вирази для λ та $\langle v \rangle$ то отримаємо:

$$D \sim \frac{1}{n\sigma\sqrt{m}}\sqrt{T}.$$

Тобто маємо залежність коефіцієнту від температури. Також з даного рівняння можемо отримати і залежність дифузії від тиску:

$$D \sim \frac{1}{p}.$$

Термодинаміка

Цей розділ фізики виник для пояснення перетворення теплоти в роботу. Закони, які є основою термодинаміки, мають загальний характер і їх можна використовувати в різноманітних областях фізики та хімії. При вивченні властивостей речовини термодинаміка не розглядає мікроскопічну картину явища. Вона базується на деяких основних законах, які отримані за допомогою дослідів. Тому висновки, до яких приходить термодинаміка, мають ту ж ступень достовірності, що і закони, на яких вона ґрунтується.

За основу термодинаміки беруть два закони (начала). Розглянемо їх. Перший закон формулюється наступним чином: вся теплота, що була передана системі, витрачається на зміну внутрішньої енергії та роботу проти зовнішніх сил:

$$Q = \Delta U + A. \quad (1.34)$$

Дане рівняння є наслідком закону збереження енергії. Необхідно відмітити, що не завжди передана теплота буде призводити до підвищення внутрішньої енергії (а значить і температури). Можлива ситуація коли внутрішня енергія буде зменшуватися. В цьому випадку, згідно з (1.34), $A > Q$, тобто система здійснює роботу як за рахунок отриманої зовні енергії, так і за рахунок внутрішньої енергії. При розрахунку роботи, яку здійснила система, чи теплоти, яку вона отримала, розбивають процес на ряд елементарних процесів, кожний з яких відповідає малій (як правило нескінченно малій) зміні параметрів системі. Тоді рівняння (1.34) переписеться у вигляді:

$$\delta Q = \Delta U + \delta A \quad (1.35)$$

необхідно відмітити, що δQ та δA не можна розглядати як приріст величин Q та A . Зміна Δ будь-якої величини f , що відповідає елементарному процесу, можна розглядати як приріст цієї величини тільки в тому випадку, якщо $\sum \Delta f$, що відповідає переходу системі з одного стану до іншого, не залежить від шляху вздовж якого відбувається дане переміщення, тобто величина f є функцією стану. Для роботи та теплоти ця умова не виконується, саме тому зміна цих величин позначена через інший знак ніж зміна внутрішньої енергії (яка є функцією стану системи). Тобто ΔU – це приріст внутрішньої енергії, а δQ та δA це не приріст даних величин, а елементарні кількості теплоти та роботи. Якщо проінтегрувати (1.35) ми отримуємо:

$$Q = (U_2 - U_1) + A.$$

В термодинаміці значну роль грає поняття рівноважного стану, та оборотного процесу. Оборотним називається такий процес, який може бути проведений в такий спосіб, що система буде проходити ті ж значення, що і в прямому процесі, але в оберненій послідовності. Оборотним може бути тільки рівноважний процес.

Оборотний процес має наступні властивості: якщо при прямому напрямі на якомусь елементарному інтервалі система отримує тепло δQ та здійснює деяку роботу δA , то при оборотному напрямі система віддає тепло $\delta Q' = \delta Q$ і над нею здійснюється робота $\delta A' = \delta A$. Саме тому після протіканні оборотного процесу в одному, а потім в протилежному напрямі не повинно приводити до зміни стану навколишнього середовища (звичайно, якщо система знову прийде в те ж положення з якого стартувала). Також при вивченні термодинамічних явищ вводять поняття кругового процесу. Круговим процесом називають такий процес при якому система, після деяких змін, повертається у початкове положення. Робота, яка здійснюється в такому випадку, численно дорівнює площі, яку обмежує крива, що описує даний процес (найчастіше вона дана в координатах тиск-об'єм).

Другий початок термодинаміка може бути сформульований декількома способами. В найбільш очевидній формі його можна представити наступним чином: неможливий самовільний процес переходу від менш нагрітого тіла до більш нагрітого. Більш точно – неможливі такі процеси, єдиним результатом яких є перехід теплоти від менш нагрітого тіла до більш нагрітого. Другий закон термодинаміки зовсім не стверджує, що взагалі неможливий такий процес. Він лише накладає обмеження на здійснення такого процесу. Також другий початок термодинаміки можна сформулювати і інакше: неможливі такі процеси, при яких єдиним результатом є перетворення теплоти, що відняли від деякого тіла, в еквівалентну їй роботу.

Насправді, твердження, що містить в собі друге формулювання закону можна вивести з першого формулювання. Наприклад, всю роботу можна перетворити у тепло за допомогою тертя. Тому, перетворивши за допомогою процесу, що забороняється другим формулюванням закону, теплоту, яке було віднято від деякого тіла, повністю в роботу, а потім перетворивши цю роботу у теплоту завдяки тертю, яке перейде до іншого більш нагрітого тіла, ми отримаємо процес, який забороняється першим формулюванням другого закону термодинаміки.

Використовуючи процеси, які заборонені другим початком, можна було створювати двигуни, які здійснювали роботу за рахунок теплоти, яка могла би отримуватися із океану. Практично такий двигун був би рівнозначним вічному. Тому іноді другий початок записують наступним чином: неможливий вічний двигун другого роду, тобто той, що здійснює роботу за рахунок теплоти отриманої із одного резервуару.

Цикл Карно

Припустимо, що деяке тіло може контактувати з двома тепловими резервуарами, що мають температури T_1 і T_2 , та володіють нескінченною теплоємністю. Це значить, що при отриманні або втраті теплоти ці резервуари практично не змінюють свою температуру. Розглянемо, який оборотний цикл тіло може здійснювати при таких умовах.

Даний цикл може бути представлений як процесами обміну теплоти з резервуарами, так і процесами при яких теплообмін з навколишнім середовищем відсутній (адіабатними). Процес, який відбувається при взаємодії тіла та теплового резервуару, буде оборотним тільки в тому випадку, коли температура даного тіла і відповідного резервуару будуть рівними. Інакше температура при прямому та оборотному ходу процесу будуть відмінні і тіло пройде через різні послідовності станів і процес буде необоротним. Таким чином, процес, який супроводжується передачею теплоти, повинен бути ізотермічним.

Звідси приходимо до висновку, що замкнутий оборотний цикл повинен складатися з двох ізотерм (так як теплових резервуарів два) та двох адіабат (які будуть переводити систему від температури T_1 до T_2 і навпаки). Такий цикл вперше був розглянутий французьким інженером Саді Карно і має назву цикл Карно.

Розглянемо, яким чином може бути реалізований цикл Карно при використанні ідеального газу в якості робочого тіла. Розмістимо газ в циліндр, який закритий поршнем. Стінки циліндру та поршню зробимо із матеріалу, який не проводить теплоту, а дно циліндру навпаки – із матеріалу який дуже добре проводить теплоту. Нехай спочатку поршень займає положення при якому об'єм дорівнює V_1 а температура газу T_1 . Поставимо циліндр на резервуар, який має температуру T_1 і нехай він повільно розширюється до об'єму V_2 . При цьому газ отримує від резервуару деяку теплоту Q_1 . Потім від'єднуємо циліндр від резервуару та закриваємо дно матеріалом, що не проводить теплоту. Газ буде розширюватися до тих пір поки його температура не впаде до T_2 . Об'єм газу буде тоді дорівнювати V_3 . Заберемо матеріал з дна циліндру і поставимо його на резервуар, який має температуру T_2 . Будемо стискати газ до тих пір поки він не матиме деякий об'єм V_4 , який дозволить нам при наступному адіабатичному стисканні при досягненні температури T_1 повернутися до об'єму V_1 (це необхідно для того щоб замкнути наш цикл).

Знімаємо циліндр з резервуару, знову закриваємо його дно, та адіабатично стискаємо, і повертаємо його в початковий стан (як вже відмічалось до температури T_1 та об'єму V_1). Таким чином отримуємо цикл Карно (рис. 1.2). Його можна зобразити графічно через координати p та V . Коефіцієнт корисної дії (ККД) для оборотної теплової машини не залежить від природи робочої речовини, а також від конструкції даної машини (ми ще повернемося до цього факту пізніше і спробуємо його доказати). ККД залежить тільки від температури нагрівача та холодильника. Знайдемо вид залежності ККД від значень цих двох температур. Для простоти розгляду візьмемо в якості робочої речовини ідеальний газ.

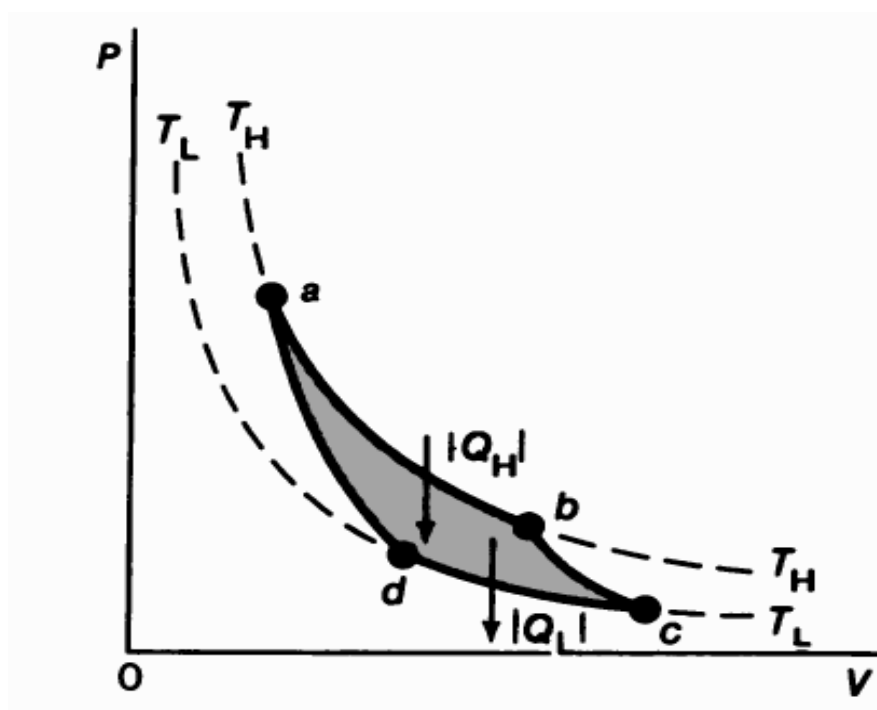


Рис. 1.2. Цикл Карно

Розглянемо цикл Карно для ідеального газу. Якщо ми зможемо знайти ККД такого циклу як функцію від температури нагрівача та холодильника, то фактично знайдемо вираз для всіх оборотних теплових машин. ККД теплової машини дорівнює:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1},$$

тут Q_1 – теплота, що отримується за цикл від нагрівача, а Q'_2 - теплота, що передається за цикл холодильнику. При ізотермічному процесі внутрішня

енергія газу є величиною постійною. Тому кількість отриманого тепла Q_1 дорівнює роботі, що здійснює газ при переході зі стану 1 до стану 2. Ця робота дорівнює:

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1.37)$$

кількість теплоти, що передається холодильнику, чисельно дорівнює роботі, яку здійснюють над газом при його стисненні. Ця робота дорівнює:

$$Q'_2 = A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (1.38)$$

Для того щоб цикл був замкнутий необхідно, щоб точки 1 та 4 знаходилися на одній адіабаті. Звідси витікає наступна умова, яка пов'язує ці стани газу:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (1.39)$$

Така ж залежність виконується і для точок 2 та 3:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (1.40)$$

Розділивши (1.40) на (1.39) отримуємо умову замкнутості циклу:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (1.41)$$

Підставивши вирази (1.37) та (1.38) в співвідношення для внутрішньої енергії будемо мати:

$$\eta = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

І, нарешті, використовуючи (1.41) отримаємо:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (1.42)$$

Таким чином ККД для циклу Карно залежить тільки від температури нагрівача та холодильника. Це також значить, що вираз (1.42) буде однаковим для будь-якої оборотної теплової машини.

ККД необоротної машини завжди менше ніж оборотної (ми ще знайдемо доказ цьому твердженню). Аналітично це можна записати наступним чином:

$$\frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Зліва у нас вираз для ККД будь-якої теплової машини, а справа – тільки для оборотної. Знак рівності відповідає оборотній машині, а нерівності – для необоротної теплової машини.

Ентропія

Візьмемо будь-який оборотний цикл і виділимо на ньому два довільних стани 1 та 2 (див рис. 1.3). Ці стани ділять цикл на дві вітки I та II. Сума усіх приведених кількості тепла по даному циклу повинна дорівнювати нулю:

$$\sum_0 \frac{\Delta' Q}{T} = 0.$$

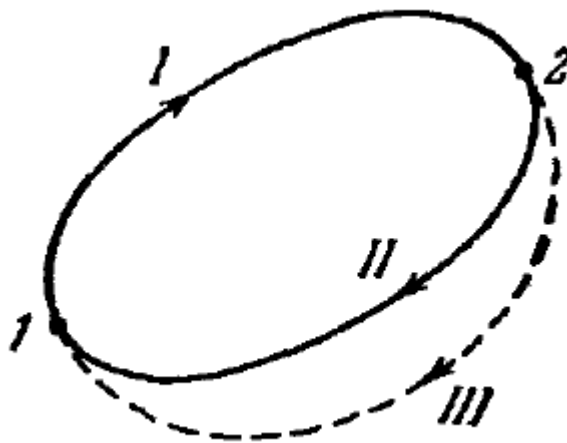


Рис. 1.3. Замкнутий оборотний цикл

Всі складові даного рівняння можна розбити на дві складові – одні можна віднести до частини I, а інші – до частини II.

Тоді даний вираз можна переписати у вигляді:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta' Q}{T} + \sum_{2 \rightarrow 1} \frac{\Delta' Q}{T} = 0.$$

Перша сума відповідає переходу зі стан 1 в стан 2 по вітці I, а друга відповідає переходу зі стану 2 в 1 по вітці II. Розглянемо першу суму

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta' Q}{T},$$

яка відповідає якомусь оборотному переході із стану 1 в стан 2. Якщо змінити напрямок обходу, то дана сума повинна змінити знак:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta' Q}{T} = - \sum_{2 \rightarrow 1} \frac{\Delta' Q}{T}.$$

Тому основне рівняння можемо переписати у вигляді:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta' Q}{T} - \sum_{2 \rightarrow 1} \frac{\Delta' Q}{T} = 0.$$

Звідси слідує те що:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta' Q}{T} = \sum_{2 \rightarrow 1} \frac{\Delta' Q}{T}.$$

Так як цикл був вибраний довільно, то це значить, що дане співвідношення повинне виконуватися для будь-якого оборотного циклу. Тобто, якщо замість циклу, який складається з I та II гілок розглянути замкнений цикл з I та III гілки, то для нього також буде виконуватися дане співвідношення.

Таким чином приходимо к наступному: сума приведеної кількості теплоти, що отримана системою при переході з одного стану до іншого, не залежить від шляху вздовж якого даний перехід відбувається, а залежить тільки від початкового та кінцевого стану.

Такі ж властивості має, наприклад, внутрішня енергія. Внаслідок того, що внутрішня енергія є функцією стану, сума приростів внутрішньої енергії при будь-якому переході зі стану 1 в стан 2 буде дорівнювати різності значень енергії в цих станах:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \Delta U = U_2 - U_1.$$

Це справедливо для будь-якої функції стану, тобто величини, яка однозначно визначається станом системи. Якщо ж величина не є функцією стану, то сума її елементарних частин буде залежати від шляху по якому система буде переходити з одного стану до іншого. До таких величин належить, наприклад, робота, яка залежить від площі, яку відсікає крива, що зображує процес. Те саме вірно і для передачі теплоти:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{12} + A_{12}$$

перший доданок даної суми не залежить від шляху переходу, другий – залежить. А це значить, що сума також буде залежати від шляху переходу системи між різними станами.

Незалежність суми:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta' Q}{T}$$

від шляху переходу системи між двома різними станами, дає можливість стверджувати, що при оборотному процесі величина $\frac{\Delta' Q}{T}$ є деякою функцією стану. Ця функція носить назву **ентропія**. Зазвичай її позначають буквою S . Таким чином:

$$\Delta S = \frac{\Delta' Q}{T}, \quad (1.43)$$

так як ентропія є функцією стану то можемо для загального випадку записати, що зміна ентропії буде даватися рівнянням:

$$\int_1^2 dS = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\Delta' Q}{T}.$$

Ентропія – адитивна величина.

З'ясуємо, що відбувається при необоротному процесі. Для цього розглянемо цикл, який складається з двох гілок – одна відповідає оборотному циклу, інша - необоротному. Даний цикл в цілому буде необоротним, саме тому сума приведеної кількості теплоти, яка взята по всьому циклу, повинна бути меншою за нуль:

$$\sum_0 \frac{\Delta' Q}{T} < 0.$$

Розіб'ємо цю суму на дві частини, кожену з яких будемо відносити до відповідної гілки процесу (оборотної та необоротної):

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ \text{необ}}} \frac{\Delta' Q}{T} + \sum_{\substack{2 \rightarrow 1 \\ \text{обор}}} \frac{\Delta' Q}{T} < 0.$$

Друга з цих сум згідно (1.43) – це різниця ентропій. Саме тому рівняння можна переписати у вигляді:

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ \text{необ}}} \frac{\Delta' Q}{T} + (S_2 - S_1) < 0.$$

Звідси слідує, що:

$$S_2 - S_1 \geq \sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ \text{необ}}} \frac{\Delta' Q}{T},$$

тут знак рівності відповідає будь-якому оборотному процесу при переході системи з стану 1 в стан 2, а знак нерівності – будь-якому необоротному процесу при переході системи з стану 1 в стан 2. Температура T – це температура того тіла від якого система отримує тепло $\Delta' Q$. При оборотному процесі ця температура співпадає з температурою системи.

Таким чином ентропія замкнутої системи завжди може тільки зростати (вона зростає при необоротному процесі і залишається незмінною при оборотному процесі). Зменшуватися ентропія в ізольованій системі не може.

Процес, який протікає без теплообміну з навколишнім середовищем, носить назву адіабатичного процесу. Значить при оборотному адіабатичному процесі ентропія буде незмінною величиною.

Формула (1.43) визначає не саму ентропію, а її різницю в двох станах системи. Нернст довів теорему, яка дає можливість визначити стан системи в двох будь-яких станах. Теорема Нернста: при досягненні абсолютної температури абсолютного нуля, величина ентропії також досягає нуля:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0,$$

тобто ентропія будь-якого тіла при нулю абсолютної температури дорівнює нулю. Тому величину ентропію можна представити у вигляді:

$$S = \int_0^T \frac{d'Q}{T}.$$

Крім цього ентропія має також і іншу інтерпретацію, а саме статистичне представлення. Ентропія ізольованої системи не може зменшуватися. З іншого боку система, яка представлена сама собі, буде намагатися перейти від менш вірогідних станів до більш вірогідних. Потрапивши в найбільш вірогідний стан система може перебувати в ньому нескінченно довго. Якщо ж найбільшою вірогідністю володіють декілька станів, то система може вільно переходити між

ними. Таким чином вірогідність та ентропія схожі: вони не зменшуються в ізольованих системах.

Із представлених міркувань слідує, що між ентропією та вірогідністю стану системи повинний бути взаємозв'язок. Больцман показав, що він має вигляд:

$$S = k \ln W, \quad (1.44)$$

тут k – постійна Больцмана, W – так звана термодинамічна вірогідність станів, яка представляє собою число станів, які може реалізувати дана система.

2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Розглянемо декілька задач з даної теми.

Задача 1. Знайти, яку роботу виконує ідеальний газ при різних ізопроесах.

Розв'язування. Ми розглянемо наступні процеси: ізохорний, ізобарний, ізотермічний та адіабатичний. Як відомо ізохорний процес – це процес, який відбувається при постійному об'ємові. Розглянемо його для початку. Ми знаємо з механіки визначення роботи:

$$dA = fdr. \quad (1)$$

Нехай наш газ замкнений у деяку посудину циліндричної форми з рухомим поршнем. Тоді елементарна робота, яка виконується при переміщенні поршню на величину dh буде дорівнювати:

$$dA = f dh. \quad (2)$$

Тепер замінимо силу через тиск, а саме $f = pS$. В результаті ми отримаємо наступне рівняння:

$$dA = pSdh. \quad (3)$$

Величина Sdh – це зміна об'єму нашого газу. Тому:

$$dA = pdV \rightarrow A = \int pdV. \quad (4)$$

Для ізохорного процесу об'єм не змінюється і робота газом (або над газом) не виконується, тобто дорівнює нулю. Якщо система отримує при цьому деяку теплоту, то ми можемо записати:

$$Q = \Delta U, \quad (5)$$

тобто вся теплота перейде у внутрішню енергію (висновок – якщо хочете нагріти газ при мінімальних витратах енергії, використовуйте ізохорний процес).

Для ізобарного процесу робота буде дорівнювати:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V. \quad (6)$$

Тут $\Delta V = V_2 - V_1$. Тут вже вся теплота буде витрачатися на дві компоненти – саме роботу та зміну внутрішньої енергії:

$$Q = p\Delta V + \Delta U. \quad (7)$$

Перейдемо до ізотермічного процесу. Ми будемо використовувати ту ж саму формулу для роботи, але тепер для того щоб ми мали можливість вчислити наш інтеграл необхідно буде зробити деяку заміну змінних. А саме, скористаємося рівнянням Клапейрона-Менделєєва для одного молю газу і отримаємо наступне співвідношення:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8)$$

Також, якщо знову скористатися тим самим рівнянням Клапейрона-Менделєєва можемо переписати дане рівняння в наступному вигляді:

$$A = RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (9)$$

І нарешті адіабатний процес. Для нього скористаємося наступним співвідношенням:

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (10)$$

Припустимо, що газ переходить із початкового стану з відомими величинами тиску та об'єму p_1, V_1 до деякого довільного стану, який має p, V . Тоді, використовуючи попереднє рівняння будемо мати наступне:

$$p = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}. \quad (11)$$

Для роботи газу:

$$dA = p dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV \rightarrow A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_1}{\gamma - 1} \left(\frac{V_1^\gamma}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{V_1^\gamma}{V_2^{\gamma-1}} \right). \quad (12)$$

Зробивши нескладні перетворення отримаємо для роботи газу:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (13)$$

Так як при адіабатному процесі теплообмін відсутній, то робота виконується за рахунок зміни внутрішньої енергії газу (і навпаки зміна внутрішньої енергії відбувається при виконанні даним газом роботи).

Задача 2. Показати, що внутрішня енергію повітря в кімнаті не залежить від температури, якщо зовнішній тиск має постійне значення. Розрахувати внутрішню енергію, якщо p дорівнює нормальному атмосферному тиску, а об'єм кімнати $V = 40 \text{ м}^3$.

Розв'язування. Здається, що в задачі якась помилка – як це внутрішня енергія не залежить від температури? Адже ми точно знаємо, що $U = \nu \frac{i}{2} RT$, тобто вона прямо пропорційна температурі. Але тут ми не урахували, що крім температури внутрішня енергія також залежить ще й від кількості моль газу. Тому якщо кількість молей буде змінюватися обернено пропорційно до температури, то сама внутрішня енергія буде незмінною. Таким чином, ми знаємо нашу основну ціль – знайти, як кількість молей залежить від температури. Якщо $\nu \sim \frac{1}{T}$, то фактично це буде значить що ми на правильному шляху (але це ще не значить що розв'язали задачу. Для повної перевірки розв'язку нам необхідно буде підставити залежність $\nu(T)$ до внутрішньої енергії та розглянути її зміну). Для цього скористаємося наступними міркуваннями. Так як процес ізобарний (будемо вважати, що теплота подається досить повільно) то можемо записати:

$$\begin{cases} pV_1 = \nu RT_1, \\ pV_2 = \nu RT_2, \end{cases} \quad (1)$$

тут V_1 – об'єм кімнати а V_2 – об'єм газу, який раніше повністю знаходився у кімнаті. Тобто частина газу $\Delta V = V_2 - V_1$ при змінні температури на

$\Delta T = T_2 - T_1$ вийде за межі кімнати. У кімнаті буде справедливим наступне співвідношення:

$$pV_1 = \nu_1 RT_2. \quad (2)$$

Тут ν_1 – кількість молей після зміни температури. Використовуючи попередні рівняння ми можемо записати:

$$\nu_1 = \frac{pV_1}{RT_2}; \nu = \frac{pV_1}{RT_1} \rightarrow \Delta \nu = \nu - \nu_1 = \frac{pV_1}{RT_1} - \frac{pV_1}{RT_2} = \frac{pV_1}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right). \quad (3)$$

Що ж так, як зміна кількості молів обернено до зміни температури, то ми, ймовірно отримали правильне співвідношення. Для того щоб все ж доказати незалежність внутрішньої енергії від температури розглянемо наступне:

$$U_1 = \nu \frac{i}{2} RT_1; U_2 = \nu_1 \frac{i}{2} RT_2. \quad (4)$$

Для незалежності внутрішньої енергії від температури необхідно щоб $U_1 - U_2 = 0$, а значить:

$$\begin{aligned} \nu \frac{i}{2} RT_1 - \nu_1 \frac{i}{2} RT_2 &= 0 \rightarrow \nu T_1 - \nu_1 T_2 = \\ &= 0 \rightarrow \frac{pV_1}{RT_1} T_1 - \frac{pV_1}{RT_2} T_2 = 0 \rightarrow \frac{pV_1}{R} - \frac{pV_1}{R} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

що й необхідно були потрібно довести.

Задача 3. Розрахувати адіабатичну константу γ для суміші газу, яка складається із суміші $\nu_1 = 2$ моля кисню, та $\nu_2 = 3$ моля вуглекислого газу. Гази вважати ідеальними.

Розв’язування. Спочатку згадаємо, що являє собою адіабатична константа. Як нам відомо $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Тобто ми вже маємо напрям наших роздумів – ми повинні встановити значення теплоємності нашої суміші для ізохорного та ізобарного процесу. Для цього скористаємося першим законом термодинаміки:

$$Q = A + \Delta U. \quad (1)$$

Внутрішня енергія є адитивною величиною, тобто можемо записати $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$. Тут ΔU_1 – зміна внутрішньої енергії кисню, а ΔU_2 – зміна внутрішньої енергії вуглекислого газу. Згідно визначенню ці енергії будуть дорівнювати:

$$\begin{cases} \Delta U_1 = \nu_1 \frac{i_1}{2} R \Delta T; \\ \Delta U_2 = \nu_2 \frac{i_2}{2} R \Delta T. \end{cases} \quad (2)$$

Робота суміші газів буде дорівнювати:

$$A = \int p dV = \int (p_1 + p_2) dV, \quad (3)$$

тут p_1 та p_2 – парціальні тиски кисню та вуглекислого газу.

І тепер розглянемо два процеси – ізохорний та ізобарний. При ізохорному процесі робота дорівнює нулю, а значить вся енергія перейде у внутрішню, тому теплоємність запишемо у наступному вигляді:

$$\nu C_v = \frac{\nu_1 \frac{i_1}{2} R \Delta T + \nu_2 \frac{i_2}{2} R \Delta T}{\Delta T} = \nu_1 \frac{i_1}{2} R + \nu_2 \frac{i_2}{2} R. \quad (4)$$

При ізобарному крім зміни внутрішньої енергії газом виконується деяка робота, тому ізобарна теплоємність буде мати більш складний вираз:

$$\begin{aligned} \nu C_p &= \frac{\nu_1 \frac{i_1}{2} R \Delta T + \nu_2 \frac{i_2}{2} R \Delta T}{\Delta T} + \frac{\int (p_1 + p_2) dV}{\Delta T}, \\ \nu C_p &= \nu_1 \frac{i_1}{2} R + \nu_2 \frac{i_2}{2} R + \frac{p_1 \Delta V + p_2 \Delta V}{\Delta T} = \\ &= \nu_1 \frac{i_1}{2} R + \nu_2 \frac{i_2}{2} R + \frac{\nu_1 R \Delta T + \nu_2 R \Delta T}{\Delta T}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином отримаємо для ізобарної теплоємності:

$$\nu C_p = \nu_1 \frac{i_1}{2} R + \nu_2 \frac{i_2}{2} R + \nu_1 R + \nu_2 R. \quad (6)$$

Для адіабатної постійної суміші газів матимемо:

$$\gamma = \frac{\nu_1 \frac{i_1}{2} R + \nu_2 \frac{i_2}{2} R + \nu_1 R + \nu_2 R}{\nu_1 \frac{i_1}{2} R + \nu_2 \frac{i_2}{2} R} = \frac{\nu_1 \frac{i_1}{2} + \nu_2 \frac{i_2}{2} + \nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \frac{i_1}{2} + \nu_2 \frac{i_2}{2}} \approx 1.36. \quad (7)$$

Дану задачу можна розв'язати трохи інакше. Ізохорну теплоємність суміші можна виразити через теплоємності кисню та вуглекислого газу наступним чином:

$$\nu C_v = \nu_1 C_{v1} + \nu_2 C_{v2}. \quad (8)$$

З (1.15) ми знаємо, що $C_v = \frac{i}{2} R$ також є взаємозв'язок і між постійною адіабати і ступенями свободи $\gamma = \frac{i+2}{i}$, або $i = \frac{2}{\gamma-1}$. Використовуючи ці співвідношення запишемо для ізохорної теплоємності суміші:

$$C_v = \frac{\nu_1 \frac{R}{\gamma_1 - 1} + \nu_2 \frac{R}{\gamma_2 - 1}}{\nu}. \quad (9)$$

Аналогічно ми запишемо і ізобарну теплоємність:

$$\nu C_p = \nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2}. \quad (10)$$

Так як $C_p = \gamma C_v$ то:

$$C_p = \frac{\nu_1 \gamma_1 C_{v1} + \nu_2 \gamma_2 C_{v2}}{\nu} = \frac{\nu_1 \frac{\gamma_1 R}{\gamma_1 - 1} + \nu_2 \frac{\gamma_2 R}{\gamma_2 - 1}}{\nu}. \quad (11)$$

Тоді для нашої адіабатичного показнику отримуємо:

$$\gamma = \frac{\frac{\nu_1 \frac{\gamma_1 R}{\gamma_1 - 1} + \nu_2 \frac{\gamma_2 R}{\gamma_2 - 1}}{\nu}}{\frac{\nu_1 \frac{R}{\gamma_1 - 1} + \nu_2 \frac{R}{\gamma_2 - 1}}{\nu}} = \frac{\nu_1 \frac{\gamma_1 R}{\gamma_1 - 1} + \nu_2 \frac{\gamma_2 R}{\gamma_2 - 1}}{\nu_1 \frac{R}{\gamma_1 - 1} + \nu_2 \frac{R}{\gamma_2 - 1}}. \quad (12)$$

Після деяких перетворень отримаємо:

$$\gamma = \frac{\nu_1 \gamma_1 (\gamma_2 - 1) + \nu_2 \gamma_2 (\gamma_1 - 1)}{\nu_1 (\gamma_2 - 1) + \nu_2 (\gamma_1 - 1)} \approx 1,36. \quad (13)$$

Тут ми врахували що молекула кисню двоатомна, а значить $\gamma_1 = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5}$, а молекула вуглекислого газу – трьохатомна і відповідно $\gamma_2 = \frac{6+2}{6} = \frac{8}{6}$ (ми також вважали що атоми в молекулах зв'язані жорстко, тобто відсутні коливальні ступені свободи).

Задача 4. У вертикальному циліндрі під невагомим поршнем знаходиться один моль ідеального газу при деякій температурі T . Простір над поршнем зв'язаний з атмосферою. Яку роботу необхідно надати, щоб повільно піднімаючи поршень, ізотермічно збільшити об'єм газу в циліндрі в n раз? Тертям знехтувати.

Розв'язування. Припустимо, що площа поршня дорівнює деякій величині S і розглянемо які сили будуть діяти на нього при даному процесі. Проти руху на нього буде діяти сила, яка пов'язана з атмосферним тиском, яку ми позначимо $p_0 S$. Вздовж руху будуть діяти дві сили – сила тиску зі сторони газу pS і деяка сила F . Так як процес є повільним, то у кожен момент часу буде виконуватися співвідношення:

$$F + pS = p_0 S, \quad (1)$$

тут ми можемо скористатися визначенням роботи:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx, \quad (2)$$

тут x_1 та x_2 – початкове та кінцеве положення поршню. Так як наша сила дорівнює $F = p_0 S - pS$, то рівняння перепишеться у вигляді:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} p_0 S - pS dx = \int_{x_1}^{x_2} (p_0 - p) S dx, \quad (3)$$

тут ми маємо можливість замінити зміну інтегрування. Очевидно, що $S dx = dV$. Також змінимо межі інтегрування $x_1 \rightarrow V_1$; $x_2 \rightarrow nV_1$, тут V_1 – початковий об'єм газу. Тоді наше рівняння:

$$A = \int_{V_1}^{nV_1} (p_0 - p) dV = \int_{V_1}^{nV_1} p_0 dV - \int_{V_1}^{nV_1} p dV, \quad (4)$$

так як p_0 – це постійна величина, то перший інтеграл є елементарним $\int_{V_1}^{nV_1} p_0 dV = p_0 V_1 (n - 1)$. Другий інтеграл – це робота при ізотермічному процесі і ми вже знаємо чому він дорівнює (див. задачу №1):

$$\int_{V_1}^{nV_1} p dV = RT \int_{V_1}^{nV_1} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{nV_1}{V_1} = RT \ln n. \quad (5)$$

Нарешті можемо записати нашу відповідь:

$$A = p_0 V_1 (n - 1) - RT \ln n. \quad (6)$$

Задача 5. Всередині горизонтального циліндру, який закритий з двох сторін, знаходиться невагомий поршень. Спочатку поршень ділить циліндр на дві однакові частини, кожна з яких мала об'єм V_0 , в яких знаходився газ при однакових температурах та однакових тисках. Яку роботу необхідно здійснити, щоб повільно здвигаючи поршень, ізотермічно збільшити об'єм однієї частини в n раз по відношенню до об'єму іншої частини.

Розв'язування. Маємо ізотермічний процес. Розглянемо, які сили будуть діяти на поршень в результаті його переміщення. З одного боку тиск, в результаті розширення буде спадати, з іншого – навпаки буде збільшуватися. Сила яка діє на поршень – це різниця цих тисків (ми пам'ятаємо що поршень невагомий) тобто $F = (p_1 - p_2)S$, тут S – площа поршню. Об'єми двох частин обернено пропорційні – поки один збільшується інший на ту ж величину зменшується. Ми можемо використати це при розрахунку роботи. Так як процеси ізотермічні (тобто $pV = \text{const}$), можемо записати, що $p_2(V_0 + xS) = p_0V_0$ і також $p_1(V_0 - xS)$. Із цих рівнянь отримуємо наступне співвідношення:

$$p_1 - p_2 = \frac{p_0V_02Sx}{V_0^2 - S^2x^2} = \frac{2p_0V_0V}{V_0^2 - V^2}, \quad (1)$$

тут ми використали $Sx = V$ (це поточна зміна об'єму однієї з частин. Причому ця зміна для однієї частини додатна, для іншої – від'ємна). Ми знаємо, що наприкінці процесу об'єм однієї з частин повинен бути в n разів більше за об'єм другої частини. Це приводить нас до рівняння:

$$(V_0 + V') = n(V_0 - V') \rightarrow V' = \frac{n-1}{n+1}V_0. \quad (2)$$

Тут V' – кінцева зміну об'єму. Таким чином з визначення роботи при ізотермічному процесі можемо записати:

$$A = \int_0^{V'} \frac{2p_0V_0V}{V_0^2 - V^2} dV. \quad (3)$$

Зробивши деякі перетворення прийдемо до виразу:

$$A = -p_0V_0 [\ln(V_0^2 - V'^2) - \ln V_0^2]. \quad (4)$$

Тепер ми підставимо, значення V' , яке ми знайшли раніше:

$$\begin{aligned} A &= -p_0V_0 \left[\ln \left(V_0^2 - \left(\frac{n-1}{n+1}V_0 \right)^2 \right) - \ln V_0^2 \right] = \\ &= -p_0V_0 \ln \frac{4n}{(n+1)^2} = p_0V_0 \ln \frac{(n+1)^2}{4n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Це і є наша відповідь.

Задача 6. Один моль кисню, який знаходився при температурі 290 К адіабатно стисли так, що його тиск збільшився в $n = 10$ раз. Знайти температуру газу після стиснення, та роботу яку здійснили при цьому процесі.

Розв'язування. Так як процес адіабатичний можемо скористатися рівнянням (1.23), а саме:

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (1)$$

Але в даному випадку у нас немає ніякої інформації про об'єм газу. Тому доцільніше знайти рівняння адіабати в координатах T, p . Це можна зробити, використавши рівняння Клапейрона-Менделєєва. Тоді, так як $V = \frac{RT}{p}$, то (1.23) можемо переписати у вигляді наступного співвідношення:

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const} \rightarrow T^\gamma = \text{const} * p^{\gamma-1} \quad (2)$$

використовуючи дане співвідношення можемо записати для нашого випадку:

$$\begin{cases} T_1^\gamma = \text{const} * p_1^{\gamma-1} \\ T_2^\gamma = \text{const} * p_2^{\gamma-1} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\gamma = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\gamma-1}. \quad (3)$$

Так як тиск p_2 в $n = 10$ разів більший за p_1 то $\frac{p_2}{p_1} = \frac{np_1}{p_1} = n$ і наше рівняння матиме наступний вигляд:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\gamma = n^{\gamma-1} \rightarrow T_2 = T_1 n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 290 * 10^{\frac{1,4-1}{1,4}} \approx 560. \quad (4)$$

Тут $\gamma = 1,4$ ми отримаємо, якщо використаємо співвідношення $\gamma = \frac{i+2}{i}$. Так як молекула кисню двохатомна, то $i = 5$ (ми знову нехтуємо коливальними рухами, вважаючи зв'язок між молекулами жорстким).

Тепер перейдемо до пошуку роботи. Як ми пам'ятаємо (див. зад. 1) робота при адіабатичному процесі задається наступним виразом:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right), \quad (5)$$

так як зміна об'єму невідома то скориставшись рівнянням Клапейрона-Менделєєва отримаємо:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (6)$$

Так як $p_2 = np_1$, а $T_2 = T_1 n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ то матимемо:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(n * n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right)^{\gamma-1} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} (1 - n^{\gamma-1} n^\gamma). \quad (7)$$

Це і буде відповіддю на поставлене питання.

Задача 7. Деяку масу азоту стисли в 5 раз, один раз адіабатно, інший – ізотермічно. Початковий стан в обох випадках однаковий. Необхідно знайти відношення робіт, які були витрачені на стиснення даного газу.

Розв'язування. Азот – двохатомний газ тому, адіабатичний показник нам відомий – $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$. Для розв'язання даної задачі нам достатньо розглянути вирази стосовно робіт для двох вказаних процесів – адіабатного та ізотермічного:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right) \\ A_2 = RT \ln \frac{V_2}{V_1} \end{cases} \quad (1)$$

Так як $p_1 V_1 = RT$ (тут T – початкова температура газу яка незмінна для ізотермічного процесу), то відношення двох робіт буде мати наступний вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{RT}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right)}{RT \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{1 - (5)^{\gamma - 1}}{(\gamma - 1) \ln 5} \approx 1,4. \quad (2)$$

Тобто, як бачимо роботи для ізотермічного стиснення необхідно менше, ніж для адіабатного.

Задача 8. Всередині деякого теплоізолюваного циліндру знаходиться поршень, який проводить тепло. При рівновазі даний поршень ділить циліндр на дві однакові частини, в яких газ має температуру T_0 . Поршень почали повільно зміщувати. Необхідно знайти залежність температури газу від відношення об'єму більшої частини до меншої. Показник адіабати дорівнює γ .

Розв'язування. Так як поршень проводить тепло, а його рух досить повільний, то можна вважати що температура в обох частинах однакова (теплопровідністю газу знехтуємо). Наступний крок – це вияснити за рахунок чого буде змінюватися температура. Так як процес адіабатний то вся робота, яка була виконана по переміщенню поршню перейде до внутрішньої енергії (ми вважаємо поршень невагомим). Робота в нашому випадку запишеться через вираз $dA = (p_2 - p_1)dV$. Позначимо через x зміну положення поршню відносно точки рівноваги. Тоді, згідно основному рівнянню МКТ ми можемо записати для наших частин циліндру наступні рівняння:

$$\begin{cases} p_1(V_0 + Sx) = \nu RT; \\ p_2(V_0 - Sx) = \nu RT \end{cases} \quad (1)$$

відніmemo від другого тиску перший:

$$p_2 - p_1 = \frac{\nu RT 2Sx}{V_0^2 - S^2 x^2} = \nu RT \frac{2V}{V_0^2 - S^2 x^2}. \quad (2)$$

Таким чином для роботи отримаємо наступний вираз:

$$dA = \nu RT \frac{2V}{V_0^2 - V^2} dV. \quad (3)$$

Ця робота буде дорівнювати зміні внутрішньої енергії $dA = -dU$ тому отримаємо наступну рівність:

$$dA = -dU = -d\left(\frac{i}{2} \nu RT\right) = -\frac{i}{2} \nu R dT = -2\nu \frac{R}{\gamma - 1} dT. \quad (4)$$

Тут ми скористалися взаємозв'язком між ступенями свободи та показником адіабати, а саме $\gamma = \frac{i+2}{i} \rightarrow i = \frac{2}{\gamma - 1}$ (двійка в рівності, що зверху виникає через те, що ми розглядаємо зміну внутрішньої енергії обох частин циліндру). Приходимо до рівності:

$$\nu RT \frac{2V}{V_0^2 - V^2} dV = -2\nu \frac{R}{\gamma - 1} dT. \quad (5)$$

Скоротивши постійні величини, та розділивши змінні отримаємо:

$$\frac{dT}{T} = \gamma - 1 \frac{VdV}{V_0^2 - V^2} \quad (6)$$

Проінтегруємо даний вираз:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = \int_0^V \gamma - 1 \frac{VdV}{V_0^2 - V^2} \rightarrow \ln \frac{T}{T_0} = (\gamma - 1) \left[-\frac{1}{2} \ln(V_0^2 - V^2) \right]_0^V. \quad (7)$$

$$\ln \frac{T}{T_0} = -\frac{\gamma - 1}{2} [\ln V_0^2 - \ln(V_0^2 - V^2)].$$

Так як нам необхідно визначити залежність температури від співвідношення об'ємів правої та лівої частини циліндру зробимо наступну заміну змінних. Нехай $V_1 = V_0 + V$ та частина циліндру, об'єм якої збільшується а $V_2 = V_0 - V$ – об'єм іншої частини циліндру. Згідно умові задачі $V_1 = nV_2 \rightarrow V_0 + V = n(V_0 - V)$ звідси отримаємо $V = V_0 \frac{n-1}{n+1}$. Якщо тепер підставимо останній вираз в наше рівняння матимемо:

$$\ln \frac{T}{T_0} = -\frac{\gamma - 1}{2} \left[\ln V_0^2 - \ln \left(V_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \right\} \right) \right] = \frac{\gamma - 1}{2} \ln \frac{(n+1)^2}{4n}. \quad (8)$$

І нарешті, після експоненціювання отримаємо відповідь:

$$T = T_0 \left(\frac{(n+1)^2}{4n} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}. \quad (10)$$

Задача 9. Показати, що процес при якому робота ідеального газу пропорційна відповідному зростанню внутрішньої енергії, можна описати рівнянням $pV^n = \text{const.}$, де n – деяка постійна.

Розв'язування. Згідно умові задачі повинна виконуватися наступна рівність $dA = \alpha dU$, де α – деяка стала. Використовуючи визначення роботи та внутрішньої енергії запишемо:

$$pdV = \frac{i}{2} \alpha \nu R dT \quad (1)$$

Також використаємо наступну рівність. Візьмемо рівняння ідеального газу $pV = \nu RT$ та продиференціюємо його:

$$pdV + Vdp = \nu R dT. \quad (2)$$

Порівнюючи ці два рівняння отримаємо:

$$pdV = \frac{i}{2} \alpha (pdV + Vdp) \rightarrow pdV \left(1 - \frac{i}{2} \alpha \right) - \frac{i}{2} \alpha Vdp = 0. \quad (3)$$

Замінімо $\frac{i}{2} \alpha$ на деяку константу k та помножимо отримане рівняння на -1 і будемо мати після деяких перетворень:

$$pdV(k - 1) + kVdp = 0 \rightarrow pdV \frac{k - 1}{k} + Vdp = 0. \quad (4)$$

Знову зробимо заміну. Нехай $\frac{k-1}{k} = n$. Тоді рівняння:

$$pdVn + Vdp = 0. \quad (5)$$

Розділимо це рівняння на величину pV :

$$\frac{dV}{V}n + \frac{dp}{p} = 0 \rightarrow \int \frac{dV}{V}n + \int \frac{dp}{p} = n \ln V + \ln p = \text{const}, \quad (6)$$

так як інтегрування є оберненою операцією до диференціювання, то інтеграл від нуля буде дорівнювати деякій константі. Нарешті після експоненціювання матимемо:

$$pV^n = e^{\text{const}} = \text{const}, \quad (7)$$

що і було необхідно довести.

Задача 10. Є деякий ідеальний газ, молярна теплоємність якого при постійному об'ємі дорівнює C_V . Знайти молярну теплоємність даного газу, як функцію від об'єму, якщо газ здійснює деякий процес по закону $T = T_0 e^{\alpha V}$.

Розв'язування. Скористаємося першим законом термодинаміки:

$$dQ = dU + dA = \nu C_V dT + p dV. \quad (1)$$

Також скористаємося визначенням молярної теплоємності:

$$c = \frac{dQ}{\nu dT}. \quad (2)$$

Поєднуючи ці два рівняння отримаємо:

$$c = \frac{\nu C_V dT + p dV}{\nu dT}. \quad (3)$$

Використовуючи рівняння ідеального газу отримаємо для нашого рівняння:

$$c = C_V + \frac{\frac{\nu RT}{V} dV}{\nu dT} = C_V + \frac{RT}{V} \frac{dV}{dT} \quad (4)$$

температура змінюється по закону $T = T_0 e^{\alpha V}$. Розглянемо диференціал цього рівняння $dT = T_0 e^{\alpha V} \alpha dV$, звідси будемо мати:

$$\frac{dV}{dT} = \frac{1}{T_0 e^{\alpha V} \alpha}. \quad (5)$$

Таким чином отримаємо:

$$c = C_V + \frac{RT}{V} \frac{1}{T_0 e^{\alpha V} \alpha} = C_V + \frac{RT_0 e^{\alpha V}}{V} \frac{1}{T_0 e^{\alpha V} \alpha} = C_V + \frac{R}{\alpha V}. \quad (6)$$

Це і є нашою відповіддю.

Задача 11. Знайти для ідеального газу рівняння процесу (в змінних T та p) при якому молярна теплоємність змінюється по наступному закону: $c = C_V + \alpha T$, де α – деяка постійна.

Розв'язування. Розглянемо для початку визначення для молярної теплоємності :

$$c = \frac{dQ}{\nu dT} = \frac{\nu C_V dT + p dV}{\nu dT} = C_V + \frac{p dV}{\nu dT} = C_V + \frac{RT}{V} \frac{dV}{dT}. \quad (1)$$

Звідси, використовуючи умову задачі, а саме рівність $c = C_V + \alpha T$ можемо записати наступну рівність:

$$C_V + \alpha T = C_V + \frac{RT}{V} \frac{dV}{dT} \rightarrow \frac{\alpha}{R} dT = \frac{dV}{V}. \quad (2)$$

Тепер нам необхідно просто проінтегрувати останню рівність:

$$\int \frac{\alpha}{R} dT = \int \frac{dV}{V} \rightarrow \frac{\alpha}{R} T = \ln V + \ln C_0, \quad (3)$$

тут C_0 – постійна інтегрування. Таким чином будемо мати:

$$VC_0 = e^{\frac{\alpha}{R} T} \rightarrow V * e^{-\frac{\alpha}{R} T} = \frac{1}{C_0} = \text{const}. \quad (4)$$

Що і необхідно було знайти.

Задача 12. Водень, який має об'єм в 1 м^3 , знаходиться при нормальних умовах. Його спочатку стискають в n разів (процес ізохорний), а потім змінюють його об'єм в k разів відносно початкового об'єму, вже при ізобарному процесі. Знайти зміну внутрішньої енергії, роботу, яку виконав газ, та отриману кількість теплоти.

Розв'язування. Початкові параметри системи відомі. Для розв'язування нам необхідно знайти також параметри 2 та 3 стану газу. Для цього скористаємося рівнянням Клапейрона-Менделєєва:

$$\begin{aligned} p_2 = np_0 \quad V_2 = V_0 \quad T_2 &= \frac{Mp_2 V_2}{mR} = \frac{Mnp_0 V_0}{mR}, \\ p_3 = p_2 = np_0 \quad V_3 = kV_0 \quad T_3 &= \frac{Mp_3 V_3}{mR} = \frac{Mnkp_0 V_0}{mR}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тепер можемо знайти необхідні нам величини. Внутрішня енергія:

$$\Delta U = \nu C_V (T_3 - T_0) = \nu \frac{iR}{2} (T_3 - T_0) = \nu \frac{iR}{2} \left(\frac{1}{\nu} \frac{kp_0 V_0}{R} - \frac{1}{\nu} \frac{p_0 V_0}{R} \right) = \frac{i}{2} p_0 V_0 (nk - 1).$$

Робота при ізохорному процесі дорівнює нулю. При ізобарному процесі робота газу (або над газом) дорівнює:

$$A = p_2 (V_3 - V_2) = np_0 (kV_0 - V_0) = np_0 V_0 (k - 1). \quad (2)$$

І нарешті кількість теплоти:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 = \nu C_V (T_2 - T_0) + \nu C_p (T_3 - T_2) = \\ &= \frac{p_0 V_0}{2} [i(nk - 1) + 2n(k - 1)]. \end{aligned} \quad (3)$$

кількість теплоти можна було би розрахувати і інакше, використовуючи перше начало термодинаміки:

$$\begin{aligned} Q &= A + \Delta U = np_0 V_0 (k - 1) + \frac{i}{2} p_0 V_0 (nk - 1) = \\ &= \frac{p_0 V_0}{2} [i(nk - 1) + 2n(k - 1)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Знаючи початкові умови зможемо розрахувати дані величини.

Розглянемо одне питання яке пов'язане з даною задачею: При якому співвідношенні $\frac{k}{n}$ співвідношення $\frac{A}{Q}$ буде мати максимальне значення, якщо відомо, що величини k та n пов'язанні між собою рівнянням $kn = \text{const}$? Для цього розглянемо $\frac{A}{Q}$, використовуючи знайденні нами розв'язки:

$$\frac{A}{Q} = \frac{np_0V_0(k-1)}{\frac{p_0V_0}{2}[i(nk-1)+2n(k-1)]} = 2 \frac{nk-n}{i(nk-1)+2nk-2n}. \quad (5)$$

Далі виразимо k через n $k = \frac{C}{n}$

$$\frac{A}{Q} = 2 \frac{C-n}{i(C-1)+2C-2n}. \quad (6)$$

щоб знайти максимальне значення, необхідно взяти похідну даного виразу по n та прирівняти її до нуля:

$$\left(\frac{A}{Q}\right)'_n = \frac{-2 * (i(C-1) + 2C - 2n) - (-2 * 2(C-n))}{(i(C-1) + 2C - 2n)^2} = 0, \quad (7)$$

це приводить до рівняння:

$$i(C-1) + 2C - 2n - 2(C-n) = 0 \rightarrow C = 1, \quad (8)$$

тобто коефіцієнти $nk = 1$ повинні бути обернено пропорційними одне для одного.

Задача 13. Визначити швидкість витікання гелію з теплоізолюваної посудини в вакуум через досить невеликий отвір. Вважати, що при цьому швидкість потоку газу в посудині досить мала. Температура гелію дорівнює 1000 К.

Розв'язування. Використовуючи закон збереження енергії, а також рівняння Бернуллі запишемо наступне рівняння:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz + u + Q = \text{const}, \quad (1)$$

тут u – внутрішня енергія на одиницю маси. Так як посудина теплоізолювана то й $Q = 0$. Всередині посудини:

$$u = \frac{C_V T}{M} = \frac{RT}{M(\gamma-1)} \quad (2)$$

і також виконуються наступні рівності $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$ та $v = 0$. Тепер розглянемо умови поза посудини. Там відповідно тиск та внутрішня енергія повинні дорівнювати нулю: $p = 0, u = 0$. Компонентою gz в нашому випадку нехтуємо. Таким чином маємо наступну рівність:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{p}{\rho} + u = \frac{RT}{M(\gamma-1)} + \frac{RT}{M} = \frac{\gamma RT}{M(\gamma-1)}. \quad (3)$$

І нарешті для швидкості будемо мати:

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma RT}{M(\gamma-1)}} \approx 3,22 \text{ км/с}. \quad (4)$$

Задача 14. Дві сферичні посудини, які мають об'єми 200 та 100 см³, з'єднані короткою трубкою в якій є пориста перегородка. З її допомогою можна досягти рівності тисків в посудинах, але не температур. Система має температуру 27 С і містить кисень під тиском 760 мм. рт. ст.. Меншу сферу розмістили в посудині з температурою 0 С, а більшу – в посудину з температурою 100 С. Який тиск буде в системі? Тепловим розширенням сфер знехтувати.

Розв'язування. Скористаємося рівнянням стану ідеального газу. Для початкового стану системи будемо мати:

$$\begin{cases} p_0 V_1 = N_1 k T_0; \\ p_0 V_2 = N_2 k T_0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут $N_1 + N_2 = N$ – повне число молекул. Після розміщення сфер у відповідних посудинах і встановлення однакового тиску можемо записати нові рівняння стану для обох сфер:

$$\begin{cases} p V_1 = N_3 k T_1; \\ p V_2 = (N - N_3) k T_2. \end{cases} \quad (2)$$

Температури, так як і об'єми, нам відомі. Єдині величини, які необхідно визначити – це кількість молекул в кожній сфері, які знаходяться в них після встановлення рівноваги. Повне число молекул знайдемо, використовуючи першу систему рівнянь:

$$N = p_0 \frac{(V_1 + V_2)}{k T_0} \quad (3)$$

тепер знайдемо вираз для N_3 :

$$N_3 = \frac{p V_1}{k T_1}. \quad (4)$$

І нарешті для тиску будемо мати наступне:

$$p V_2 = \left(p_0 \frac{(V_1 + V_2)}{k T_0} - \frac{p V_1}{k T_1} \right) k T_2 \rightarrow p = p_0 \frac{T_2}{T_0} \frac{V_1 + V_2}{[V_2 + (T_2/T_1)V_1]}. \quad (5)$$

Підставляючи всі величини отримаємо наступне значення тиску, який встановився в наших сферах: $p = 842$ мм рт. ст.

Задача 15. Резервуар об'ємом 50 л з'єднаний з резервуаром об'ємом 15 л за допомогою короткої трубки, в якій є спеціальний клапан тиску, який дозволяє газу проходити з більшого резервуару до меншого при різниці тиску в 88 см рт.ст.. При температурі $t = 17$ С більший резервуар містить газ при атмосферному тиску, а в меншому – повністю відсутній. Який тиск буде в меншому резервуарі, якщо їх розігріти до температури 162 С?

Розв'язування. Позначимо через p_1, N_1 тиск і число молекул в більшому резервуарі, а p_2, N_2 – тиск та число молекул в меншому після розігрівання до температури 162 С. Згідно умови даної задачі:

$$p_1 - p_2 = p_0 = 880 \text{ мм рт. ст.}$$

Позначимо через $N = N_1 + N_2$ повне число молекул газу. Цю величину можемо знайти, якщо використаємо рівняння стану ідеального газу:

$$N = p \frac{V_1}{kT_0} \quad (1)$$

при кінцевому стані у нас буде два рівняння:

$$\begin{cases} (p_0 + p_2)V_1 = N_1 kT; \\ p_2 V_2 = N_2 kT = (N - N_1)kT. \end{cases} \quad (2)$$

Все що необхідно – це розв’язати дану систему відносно тиску p_2 . Для цього спочатку розглянемо друге рівняння в останній системі:

$$p_2 V_2 = NkT - N_1 kT = p \frac{V_1}{kT_0} kT - (p_0 + p_2)V_1. \quad (3)$$

Звідси слідує, що:

$$p_2 V_2 + p_2 V_1 = p \frac{V_1}{kT_0} kT - p_0 V_1. \quad (4)$$

Таким чином маємо:

$$p_2 = \frac{p \frac{V_1}{kT_0} kT - p_0 V_1}{V_2 + V_1} = \frac{p \frac{T}{T_0} - p_0 V_1}{V_2 + V_1}. \quad (5)$$

Що і потрібно було знайти.

Задача 16. Швидкість відкачування повітря форвакуумним насосом становить $b = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$. Скільки часу необхідно для того, щоб колбу об’ємом $V_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ відкачати від нормального атмосферного тиску $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ до тиску $p = 1,33 \text{ Па}$.

Розв’язування. У вакуумній техніці під швидкістю відкачування розуміють об’єм газу, що відкачує насос щосекунди при тиску, що існує в об’ємі V_0 посудини та в робочому об’ємі V_k . Швидкість відкачування залежить від атмосферного тиску, який будемо вважати постійним. Дану задачу можна розв’язати двома способами.

Перший спосіб полягає в тому, що рівняння стану газу розглядають при певній фіксованій масі газу. Виділимо деяку масу газу dm , яку насос виносить із об’єму V_0 . Очевидно ця маса займає в колбі деякий об’єм dV . Виходячи з рівняння Клапейрона-Менделєєва можемо записати наступну рівність:

$$dm = \frac{M}{RT} p dV. \quad (1)$$

При цьому тиск будемо вважати сталим, так як елемент маси є досить малою величиною.

Крім зменшення маси газу в колбі на величину dm буде відбуватися зменшення тиску на наступну величину:

$$dp = - \frac{dm}{V_0} \frac{RT}{M}. \quad (2)$$

Виключаючи з останніх рівнянь величину dm матимемо:

$$dp = - \frac{p dV}{V_0}. \quad (3)$$

І нарешті:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{V_0} \frac{dV}{dt} = -\frac{p}{V_0} b, \quad (4)$$

оскільки за визначенням швидкість відкачування $\frac{dV}{dt} = b$. Розділяючи змінні у виразі та інтегруючи отримаємо:

$$-\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{b}{V_0} \int_0^\tau dt. \quad (5)$$

Звідки будемо мати для часу:

$$\tau = \frac{V_0}{b} \ln \frac{p_0}{p} \quad (6)$$

підставляючи в цю формулу значення фізичних величин та обчислюючи отримаємо для часу $\tau = 370$ с.

Другий спосіб демонструє інший підхід до цієї задачі. Будемо вважати, що насос виконує один оберт за секунду і максимальний робочий об'єм камери V_k чисельно дорівнює b . Останнє можна вважати справедливим, якщо $V_k \ll V_0$. Тому сполучення колби з камерою насоса мало змінює тиск у колбі. Перед відкачуванням початковий тиск в посудині дорівнює:

$$p_0 = \frac{m}{MV_0} RT. \quad (7)$$

Через одну секунду після початку відкачування тиск в колбі зміниться до наступної величини:

$$p_1 = \frac{m}{M} \frac{RT}{V_0 + V_k} = \frac{V_0 p_0}{V_0 + b}. \quad (8)$$

Після наступного обертну насосу будемо мати наступне рівняння для тиску:

$$p_1 = \frac{V_0 p_1}{V_0 + b} = \frac{V_0^2}{(V_0 + b)^2} p_0 \quad (9)$$

після того, як пройде τ секунд після початку відкачування тиск:

$$p_\tau = \left(\frac{V_0}{V_0 + b} \right)^\tau p_0, \quad (10)$$

звідки для часу відкачування:

$$\tau = \frac{\ln \frac{p_0}{p}}{\ln \frac{V_0}{V_0 + b}} = \frac{\ln \frac{p_0}{p}}{\ln \left(1 + \frac{b}{V_0} \right)}, \quad (11)$$

якщо виконується умова $b \ll V_0$ то $\ln \left(1 + \frac{b}{V_0} \right) \approx \frac{b}{V_0}$, тоді час відкачування матиме:

$$\tau = \frac{V_0}{b} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (12)$$

Підставляючи необхідні величини отримаємо $\tau = 360$ с.

Задача № 17. Яку кількість кисню використали із балону об'ємом 40 л, якщо покази манометра змінилися від 14 до 6 атм, а температура змінилася від 27 до 7 С.

Розв'язування. Манометр на балоні показує різницю тиску в балоні та поза його межами, тобто істинний тиск буде дорівнювати $p + p_0$ де p_0 – атмосферний тиск. До початку зварювальних робіт стан газу описується рівнянням:

$$(p_1 + p_0)V = \frac{m_1}{M}RT_1 \quad (1)$$

звідси визначаємо початкову масу газу:

$$m_1 = \frac{p_1 + p_0}{RT_1}VM. \quad (2)$$

У кінці зварювальних робіт матимемо:

$$(p_2 + p_0)V = \frac{m_2}{M}RT_2 \rightarrow m_2 = \frac{p_2 + p_0}{RT_2}VM. \quad (3)$$

Тоді використана кількість кисню буде дорівнювати:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{VM}{R} \left(\frac{p_1 + p_0}{T_1} - \frac{p_2 + p_0}{T_2} \right). \quad (4)$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, отримаємо:
 $\Delta m = 0,38$ кг.

Задача 18. У тонкостінний стальний балон сферичної форми, масою M , нагнітається азот при температурі T . Знайти максимальну кількість $m_{\max}$ азоту, яка може вміститися у балоні, якщо допустиме значення напруження стінок σ . Густина сталі дорівнює ρ .

Розв'язування. Із рівняння стану знаходимо шукану масу:

$$m_{\max} = \frac{\mu V}{RT} p_{\max}, \quad (1)$$

тут $p_{\max}$ – максимально допустимий тиск азоту в балоні при температурі T .

Цей тиск створює напруження стінок балону. Позначимо товщину стінки через d , а його внутрішній радіус через R_6 . Враховуючи, що за умовою балон тонкостінний, тобто $R_6 \gg d$, то з достатньою точністю можна припустити, що масу балона можна розрахувати по формулі: $M = 4\pi R_6^2 d \rho$, а значить об'єм $V = \frac{4}{3}\pi R_6^3$. Напруження в стінці балону можна знайти якщо поділити сумарну силу, з якою «верхня» половина відривається від «нижньої», на площу колового перерізу стінки балону $S = 2\pi R d$ (див. рис. 2.1).

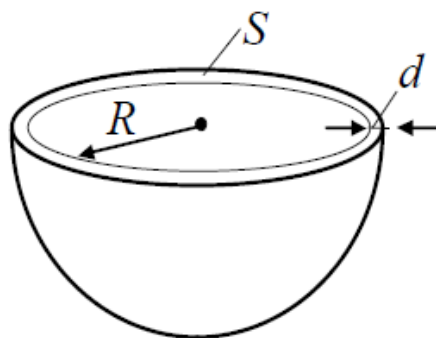


Рис. 2.1. Переріз сферичного балону

Для знаходження сили використаємо наступну формулу:

$$F_{cm} = p_{max} \pi R_6^2. \quad (2)$$

Тоді напруження можна визначити як:

$$\sigma = \frac{F_{cm}}{S} = \frac{p_{max} \pi R_6^2}{2\pi R d} \rightarrow p_{max} = \frac{2\sigma d}{R_6}. \quad (3)$$

Таким чином можемо отримати формулу для маси азоту:

$$m_{max} = \frac{\mu}{RT} \frac{4}{3} R_6^3 \frac{2\sigma d}{R_6} = \frac{2\sigma \mu M}{3RT\rho}. \quad (4)$$

Підставляючи значення фізичних величин отримаємо відповідь.

Треба відмітити те звідки взялась формула $F_{cm} = p_{max} \pi R_6^2$. Для цього розглянемо наступне. Розглянемо рисунок сферичного балону.

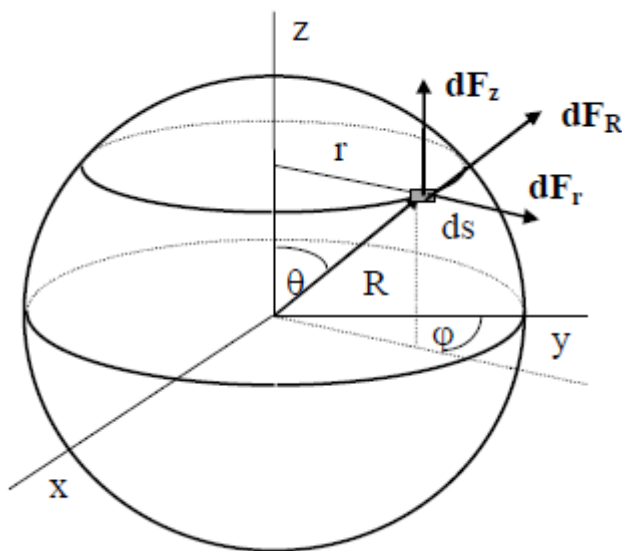


Рис. 2.2. Сферичний балон

З центром балону зв'язані дві системи координат – декартова (x, y, z) та сферична (r, θ, φ) . На поверхні сфери вибрана площадка dS , яка має площу $dS = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta$, та знаходиться на відстані r від вісі z . Якщо в посудині

встановився максимальний тиск, то на виділену площадку буде діяти сила $dF_R = p_{max}dS$ напрям якої співпадає з напрямком радіус-вектора R , проведеного із центру балону до площадки. Вектор dF_R можна розкласти на дві складові: dF_r , яка напрямлена вздовж радіуса r , проведеного до площадки, та dF_z яка паралельна вісі z . При обході всіх точок на поверхні сфери вздовж кола з радіусом r модулі складових dF_r та dF_z залишаються сталими, також напрям вектора dF_z залишається сталим, змінюється лише напрям вектору dF_r . Тому сумарна сила, що діє на смугу поверхні балону шириною $Rd\theta$ і довжиною $2\pi r$ буде напрямлена вздовж вісі z та модуль буде дорівнювати:

$$dF = p_{max}Rd\theta 2\pi R \sin\theta \cos\theta, \quad (5)$$

це справедливо для будь-яких смуг поверхні будь-якого радіуса r . Саме тому можемо записати:

$$F_{cm} = \int_0^{\pi/2} dF. \quad (6)$$

Підставляючи значення dF , яке ми отримали раніше, та інтегруючи дане рівняння будемо мати наступне:

$$F_{cm} = \int_0^{\pi/2} p_{max}R^2 2\pi \sin\theta \cos\theta d\theta = p_{max}\pi R^2. \quad (7)$$

Що і необхідно було знайти.

Задача 19. Для вивчення теплопровідності азоту ним заповнюють простір між двома коаксіальними циліндрами з радіусами $R_1 = 0,5$ см, $R_2 = 2$ см. Внутрішній циліндр рівномірно розігрівається спіраллю через яку проходить струм силою 0,1 А. Опір спіралі на одиницю довжини становить $r = 1000$ Ом/м. Температура T_2 зовнішнього циліндру підтримується сталою за допомогою льоду, який тане. При стаціонарному процесі температура внутрішнього циліндру становиться рівною $T_1 = 366$ К. Визначити розподіл температури між циліндрами та оцінити теплопровідність азоту. Конвекцією знехтувати.

Розв'язування. Кількість теплоти, що переноситься між поверхнями циліндрів через деяку уявну поверхню проміжного циліндру радіусом R ($R_1 < R < R_2$) за час dt дорівнює:

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dR} \Delta S dt = -\lambda \frac{dT}{dR} 2\pi R h dt, \quad (1)$$

тут $\frac{dT}{dR}$ – градієнт температури біля поверхні проміжного циліндру, h – його висота (рис. 2.3).

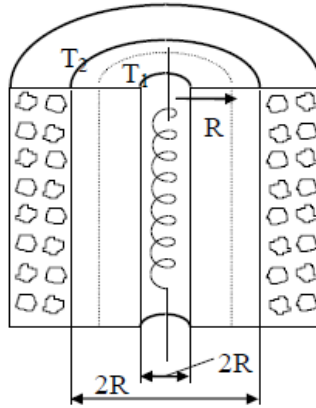


Рис. 2.3. Коаксіальні циліндри

Так як за умовою процес є стаціонарним, то така ж кількість теплоти за той же час повинна виділитися у внутрішньому циліндрі за рахунок розігрівання спіралі. По закону Джоуля ця теплота дорівнює:

$$dQ = I^2 r h dt. \quad (2)$$

Тоді можемо записати:

$$dQ = I^2 r h dt = -\lambda \frac{dT}{dR} 2\pi R h dt \rightarrow \frac{dR}{R} = -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} dT. \quad (3)$$

Інтегруючи дане рівняння отримаємо:

$$\ln R = -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T + \text{const} \quad (4)$$

для знаходження константи використаємо умову:

$$\begin{aligned} \ln R_1 &= -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T_1 + \text{const}; \\ \ln R_2 &= -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T_2 + \text{const}. \end{aligned} \quad (5)$$

Звідси

$$\ln R = -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T + \ln R_1 + \frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T_1. \quad (6)$$

Тоді розподіл температур буде мати вигляд:

$$T = T_1 - \frac{I^2 r}{2\pi\lambda} \ln \frac{R}{R_1}. \quad (7)$$

Аналогічно визначаємо коефіцієнт теплопровідності азоту:

$$\lambda = \frac{I^2 r \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi(T_1 - T_2)}. \quad (8)$$

Підставляючи значення фізичних величин отримаємо для теплопровідності $\lambda = 2,37 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

Задача 20. Визначити кут на який повернеться диск, підвішений на пружній нитці, якщо під ним на відстані $h = 10^{-2}$ м обертається такий же диск з кутовою швидкістю $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$. Радіуси дисків $R = 0,1$ м, модуль кручення нитки $G = 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{рад}^{-1}$. Розглянути випадки коли диски знаходяться у повітрі при нормальних умовах та тискові $p = 1,33 \cdot 10^{-2} \text{ Па}$. Краєвими ефектами нехтуємо.

Розв'язування. При нормальних умовах вільна довжина пробігу молекулу значно менше ніж відстані між дисками. Очевидно, що верхній диск обертається внаслідок сили тертя, яка виникає між повітрям та даним диском. Повітря рухається внаслідок обертання нижнього диску. Припустимо, що шар повітря, який безпосередньо прилягає до нижнього диску, має таку ж швидкість що і даний диск, а градієнт швидкості вздовж вертикалі є лінійним. Тоді лінійна швидкість шару повітря біля нижнього диску дорівнює $v = \omega r$, а біля верхнього дорівнює нулю. Отже градієнт швидкості буде дорівнювати:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\omega r}{h}. \quad (1)$$

Оскільки тиск між дисками досить високий і рух повітря будемо вважати ламінарним, то для обчислення сили тертя скористаємося наступним рівнянням:

$$F = \eta \frac{dv}{dx} \Delta S, \quad (2)$$

тут η – коефіцієнт в'язкості повітря ΔS – елемент площі.

Розглянемо на верхньому диску кільце радіуса r та шириною dr (рис. 2.4.).

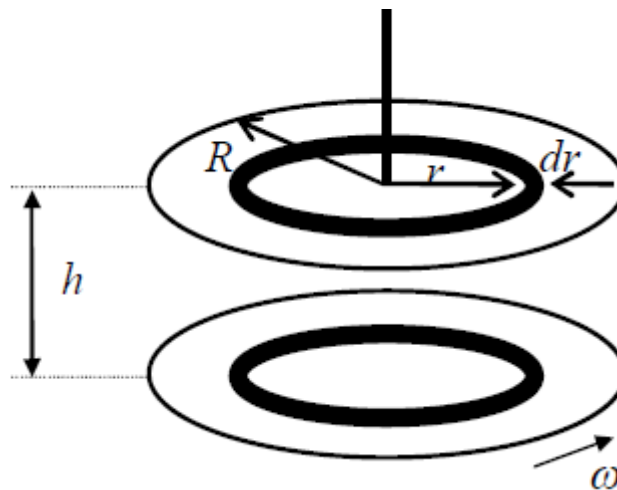


Рис. 2.4. Диски, та шар повітря між ними

На нього буде діяти сила тертя:

$$df = \eta \frac{\omega r}{h} 2\pi r dr, \quad (3)$$

яка буде створювати момент сили:

$$M = r df = \eta \frac{\omega}{h} 2\pi r^3 dr. \quad (4)$$

Сумарний момент, який прикладений до верхнього диску отримаємо, якщо проінтегруємо останнє рівняння:

$$M = \int_0^R \eta \frac{\omega}{h} 2\pi r^3 dr = \eta \frac{\omega}{h} 2\pi \int_0^R r^3 dr = \eta \frac{\omega}{2h} R^4. \quad (5)$$

Диск буде обертатися до тих пір, поки момент сили тертя не зрівноважиться моментом сили, що виникає внаслідок пружного кручення нитки підвісу. Тобто будемо мати наступне:

$$G\varphi = \eta \frac{\omega}{2h} R^4. \quad (6)$$

Звідси:

$$\varphi = \eta \frac{\omega}{2hG} R^4. \quad (7)$$

Підставляючи числові значення всіх величин отримаємо відповідь $\varphi = 1,41$ рад.

У випадку розрідженого газу, середня відстань пробігу молекул буде перевищувати відстань між дисками. І справді для молекул повітря, діаметр яких близько $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м, при тискові в $p = 1,33 \cdot 10^{-2}$ Па нормальній температурі в 273 К будемо мати наступну довжину середнього пробігу:

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\pi p d^2} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{3,14 \cdot 1,33 \cdot 10^{-2} \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2} \approx 1 \text{ м.} \quad (8)$$

Саме тому цю задачу необхідно розв'язати інакше. Розглянемо поведінку кожної молекули, що відбивається від нижнього диску, та оцінимо сумарний ефект впливу всіх молекул на верхній диск до якого вони долітають без зіткнень. Припустимо, що всі молекули рухаються з однаковою швидкістю, яка дорівнює середній: $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$. На кільце нижнього диску радіуса r та шириною dr кожної секунди буде потрапляти наступна кількість молекул:

$$dN = z_0 dS = \frac{1}{4} n \langle v \rangle 2\pi r dr \quad (9)$$

кожна з цих молекул, відбиваючись від поверхні, забирає з собою додатковий момент кількості руху $mvr = m\omega r^2$. Отже всі молекули які долітають до верхнього диску передають йому елементарну кількість руху:

$$dL = m\omega r^2 dN = m\omega r^2 \frac{1}{4} n \langle v \rangle 2\pi r dr = \frac{1}{2} n \langle v \rangle \pi \omega m r^3 dr. \quad (10)$$

Тоді, враховуючи що $n = \frac{p}{kT}$, повний момент кількості руху, що отримає верхній диск буде дорівнювати:

$$L = \int_0^R dL = \frac{p \langle v \rangle \pi \omega m R^4}{kT} \frac{1}{8}. \quad (11)$$

Даний момент при рівновазі буде чисельно дорівнювати моменту кручення нитки., Таким чином матимемо наступне рівняння:

$$G\varphi = \frac{p\langle v \rangle \pi \omega t R^4}{kT} \rightarrow \varphi = \frac{p\langle v \rangle \pi \omega t R^4}{GkT} \quad (12)$$

підставляючи в останню формулу численні значення фізичних величин, отримаємо для кута $\varphi = 1,5 \cdot 10^{-2}$ рад.

Задача 21. У колбу, яка має об'єм 12 л, шийка має довжину 5 см та поперечний діаметр 2 см, вводять декілька крапель ефіру при температурі 20 С. При цьому весь ефір випаровується, створюючи насичену пару. Скільки часу t_1 необхідно для того щоб концентрація молекул ефіру після зняття закупорки колби зменшилася на 20%? Через який час t_2 в лабораторії що має об'єм 100 м³ концентрація ефіру досягне значення $\rho_k = 0,01$ г/м³, тобто буде відчутний його запах? Як зміниться час t_2 , коли в колбу буде налито скільки ефіру, що на її дні знаходитиметься рідина? Коефіцієнт дифузії ефіру $D = 1,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, його молярна маса $\mu = 74 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$.

Розв'язування. Припустимо, що конвекційні потоки відсутні, тому ефір потрапляє у повітря тільки завдяки процесу дифузії. При кімнатній температурі тиск насиченої пари ефіру становить $p_0 = 58,7 \cdot 10^3$ Па. Його густину можемо знайти за допомогою рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p_0 \mu}{RT} = 1,78 \text{ кг/м}^3. \quad (1)$$

Враховуючи, що концентрація молекул ефіру в колбі значно більше ніж в кімнаті, будемо вважати, що градієнт концентрації вздовж шийки колби буде дорівнювати:

$$\frac{d\rho(t)}{dx} = \frac{\rho(t) - 0}{h} = \frac{\rho(t)}{h}, \quad (2)$$

тоді рівняння дифузії запишемо у вигляді:

$$dM = -D \frac{\rho(t)}{h} S dt, \quad (3)$$

тут dM – маса ефіру, яка переноситься через поперечний переріз шийки колби $S = \pi \frac{d^2}{4}$ за час dt . Так як dM – це зменшення маси ефіру в колбі, то $dM = V d\rho$. Тоді справедливе рівняння:

$$V \frac{d\rho(t)}{dt} = -D \frac{\rho(t)}{h} \pi \frac{d^2}{4}. \quad (4)$$

Якщо ввести позначення $\tau = \frac{4Vh}{D\pi d^2}$ то останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{\rho(t)}{\tau}, \quad (5)$$

інтегруючи дане рівняння одержимо:

$$\ln \rho = -\frac{t}{\tau} + \ln C \rightarrow \rho = C \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (6)$$

Сталу інтегрування знайдемо, якщо використаємо початкові умови, а саме: при $t = 0$, густина повинна дорівнювати $\rho = \rho_0$, тому отримуємо, що $C = \rho_0$. Таким чином матимемо для густини наступне рівняння:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (7)$$

Величина $\tau = \frac{4Vh}{D\pi d^2}$ має розмірність часу, її називають часом релаксації. Час релаксації є основним параметром нестационарного переносу. Він визначає час протягом якого густина (або концентрація, а в загальному випадку – нерівноважність системи) ефіру в колбі зменшується в e раз.

Згідно з умовою задачі необхідно знайти час t_1 протягом якого концентрація ефіру в колбі зменшилася на 20%, тобто $\rho_1 = \rho_0 - 0,2\rho_0 = 0,8\rho_0$ отже

$$\rho_1 = \rho_0 \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right). \quad (8)$$

Звідки отримаємо:

$$t_1 = -\frac{4Vh}{D\pi d^2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (9)$$

Підставивши в цю формулу числові значення отримаємо відповідь $t_1 = 100$ год. Як бачимо дифузія буде протікати досить повільно.

Розглянемо тепер другу умову задачі. Загальна маса ефіру через час t_2 коли буде відчутний його запах дорівнює $M_k = V_k \rho_k$. При цьому в колбі його концентрація зменшиться до значення:

$$\rho_2 = \frac{M_0 - M_k}{V} = \rho_0 - \frac{V_k}{V} \rho_k. \quad (10)$$

Тоді можемо записати:

$$\rho_2 = \rho_0 - \frac{V_k}{V} \rho_k = \rho_0 \exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right). \quad (11)$$

Звідки отримаємо:

$$t_2 = -\frac{4Vh}{D\pi d^2} \ln \frac{\rho_2}{\rho_0} = -\frac{4Vh}{D\pi d^2} \ln \left(1 - \frac{V_k \rho_k}{\rho_0}\right). \quad (12)$$

Підставляючи необхідні числові значення фізичних величин та виконуючи обчислення отримаємо $t_2 = 10^6$ с

Якщо на дні колби буде налитий рідкий ефір, то втрата його парів, внаслідок дифузії, буде компенсуватися випаровуванням і концентрація в колбі буде відповідати насиченому пару до тих пір поки весь рідкий ефір не випарується.

У цьому випадку градієнт концентрації вздовж шийки колби буде сталим і рівняння дифузії матиме наступний вигляд:

$$dM = -D \frac{\rho_0 \pi d^2}{h} dt. \quad (13)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\int_0^M dM = -D \frac{\rho_0 \pi d^2}{h} \int_0^{t'_2} dt = D \frac{\rho_0 \pi d^2}{h} t'_2, \quad (14)$$

знак мінус тут опущений, так як зменшення маси ефіру в колбі означає його приріст в кімнаті. Врахувавши те що $M = \rho_k V_k$ одержуємо:

$$t'_2 = \frac{4V_k h}{D\pi d^2} \frac{\rho_k}{\rho_0}. \quad (15)$$

Виконуючи обчислення матимемо $t'_2 = 7,4 \cdot 10^4$ с. Тобто при даних умовах запах ефіру буде відчуватися значно раніше.

Задача 21. Дві колби однакового об'єму заповнені однаковим газом та сполученні двома трубками А і В (рис. 2.5). Діаметр трубки А досить малий, а діаметр трубки В – дуже великий у порівнянні з довжиною вільного пробігу молекул даного газу. Колби підтримуються при сталих температурах T_1 і T_2 . Які процеси будуть відбуватися якщо трубку В перекрити краном?

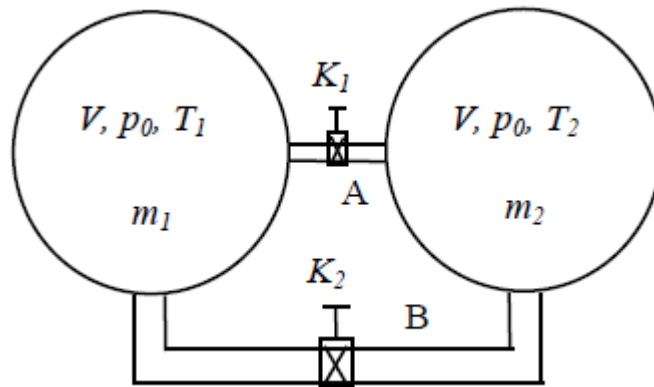


Рис. 2.5. З'єднанні колби

Розв'язування. Поки широка трубка відкрита, вплив вузькою трубки можна не брати до уваги. Рівновага в колбах буде мати місце при рівних тисках p_1 і p_2 . Отже при відкритих кранах $p_1 = p_2 = p_0$. Із рівняння Клапейрона-Менделєєва слідує що:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{\mu p_0 V}{RT_1} \\ m_2 = \frac{\mu p_0 V}{RT_2} \end{cases} \quad (1)$$

Кількості молекул у правій та лівій колбі може бути різним:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{m_1}{\mu} N_a = \frac{N_a p_0 V}{RT_1} \\ N_2 = \frac{m_2}{\mu} N_a = \frac{N_a p_0 V}{RT_2} \end{cases} \quad (2)$$

їх концентрації також будуть описуватися подібними рівняннями:

$$n_1 = \frac{N_a p_0}{RT_1}; n_2 = \frac{N_a p_0}{RT_2}. \quad (3)$$

Звідси отримуємо наступне співвідношення $\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}$. Враховуючи, що загальна кількість молекул в обох колбах дорівнює $N_0 = \frac{m_1+m_2}{\mu} N_A = n_1 V + n_2 V = V(n_1 + n_2)$, то отримаємо:

$$n_1 = \frac{N_0}{V} \frac{T_2}{T_1 + T_2}; n_2 = \frac{N_0}{V} \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \quad (4)$$

Якщо широкую трубку закрити, а вузьку залишити відкритою, то головну роль в процесах перенесення буде відігравати зіткнення молекул з стінками трубки А, а не між собою.

Щосекунди з лівої частини у праву будуть переходити $\Delta N_{12} = \frac{1}{4} C n_1 \langle v_1 \rangle S$ а із правої у ліву будуть переходити $\Delta N_{21} = \frac{1}{4} C n_2 \langle v_2 \rangle S$ де $\langle v_1 \rangle$ та $\langle v_2 \rangle$ – середні швидкості молекул, C – деякий коефіцієнт, що залежить від довжини трубки. Тоді можна записати:

$$\frac{\Delta N_{12}}{\Delta N_{21}} = \frac{n_1 \langle v_1 \rangle}{n_2 \langle v_2 \rangle} = \frac{T_2 \sqrt{T_1}}{T_1 \sqrt{T_2}} = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}}. \quad (5)$$

Якщо наприклад $T_2 < T_1$ то $\frac{\Delta N_{12}}{\Delta N_{21}} < 1$, тобто відразу після закриття крану K_1 газ почне перетікати із «холодної» колби в «гарячу». Цей процес триватиме доти поки не встановиться динамічна рівновага: число молекул що проходить трубку А, за одиницю часу, зліва на право стане рівним числу молекул, що проходять трубку А, за одиницю часу, з права наліво. Із умови $\Delta N_{12} = \Delta N_{21}$ випливає, що $n'_1 \langle v_1 \rangle = n'_2 \langle v_2 \rangle$ де n'_1, n'_2 - концентрації молекул у колбах після встановлення рівноваги. Тоді буде виконуватися умова $\frac{n'_1}{n'_2} = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}}$. Врахувавши, що $n'_1 V + n'_2 V = N_0$, отримаємо $n'_1 = \frac{N_0}{V} \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}$. Таким чином кількість молекул, що перейде з однієї колби до іншої буде дорівнювати:

$$n'_1 - n_1 = \frac{N_0}{V} \left(\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} - \frac{T_2}{T_1 + T_2} \right). \quad (6)$$

Задача 22. У тонкостінній посудині об'ємом 1 л, яка має форму сфери, створено надвисокий вакуум. Внаслідок пошкодження в посудині утворився отвір площею $S = 1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2$. Через який проміжок часу тиск в посудині буде дорівнювати половині атмосферного $p_0 = 10^5 \text{ Па}$? Вважати що заповнення посудини газом є квазірівноважним процесом. Молярна маса повітря $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, температура газу як в посудині так і поза нею становить 293 К.

Розв'язування. У довільний момент часу скрізь отвір S будуть проникати потоки молекул N^+ і N^- , які не будуть взаємодіяти між собою, оскільки

товщина стінки дуже мала (будемо вважати її меншою за довжину вільного пробігу молекул). Тоді матимемо:

$$\begin{cases} N^+ = \frac{1}{4} n_0 \langle v \rangle S \\ N^- = -\frac{1}{4} n \langle v \rangle S \end{cases} \quad (1)$$

отже за час dt концентрація молекул у посудині буде зростати на величину:

$$dn = \frac{N^+ + N^-}{V} = \frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle S}{V} (n_0 - n) dt. \quad (2)$$

Враховуючи зв'язок між концентрацією та тиском запишемо наступне:

$$dp = \frac{\langle v \rangle S}{V} (p_0 - p) dt \rightarrow \frac{dp}{p_0 - p} = \frac{\langle v \rangle S}{V} dt. \quad (3)$$

Інтегруючи останнє рівняння отримуємо:

$$\int_0^{p_0/2} \frac{dp}{p_0 - p} = \int_0^{\tau} \frac{\langle v \rangle S}{V} dt \rightarrow \ln \frac{p_0}{p_0 - \frac{p_0}{2}} = \frac{\langle v \rangle S}{V} \tau. \quad (4)$$

Звідки знаходимо:

$$\tau = \frac{4V}{\langle v \rangle S} \ln 2 = \frac{4V}{\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} S} \ln 2 \quad (5)$$

підставляючи численні значення та обчислюючи будемо мати $\tau \approx 10$ хв.

Задача 23. Два молі кисню повільно переводять зі стану 1 в стан 2. Яку кількість теплоти необхідно підвести до газу, якщо в координатах p - V процес зображується прямою лінією? В стані 1 газ характеризується наступними параметрами $p_1 = 1$ атм, $V_1 = 24,6$ л, $T_1 = 300$ К, а в стані 2 – $p_2 = 3p_1$, $V_2 = 2V_1$.

Розв'язування. Зобразимо графічно досліджуваний процес в координатах p - V (рис. 2.6). Кількість теплоти, яка необхідна для переходу газу зі стану 1 в стан 2 визначимо з першого закону термодинаміки $Q = \Delta U + A$, тут ΔU – зміна внутрішньої енергії, A – робота, яку виконує газ.

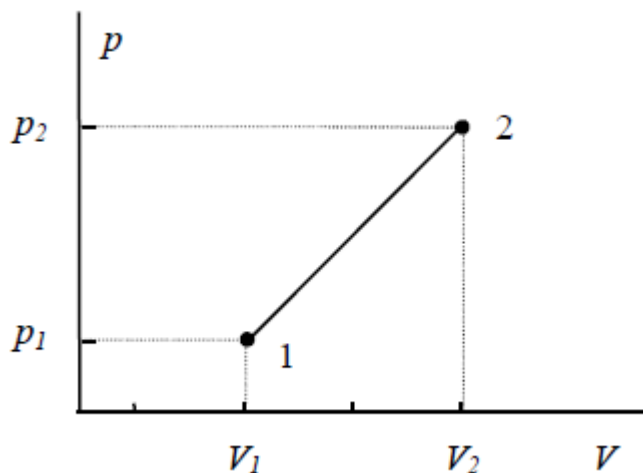


Рис. 2.6. Графік процесу

Зміна внутрішньої енергії залежить лише від зміни температури і не залежить від характеру переходу зі стану 1 в стан 2, тому можемо записати:

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T, \quad (1)$$

тут $C_V = \frac{i}{2} R$ – молярна теплоємність ідеального газу.

У стані 2 температуру газу можна знайти, якщо скористатися рівнянням стану ідеального газу:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}. \quad (2)$$

Звідки матимемо:

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = T_1 \frac{3p_1 2V_1}{p_1 V_1} = 6T_1 \quad (3)$$

кисень є двохатомним газом і його молекули мають п'ять ступенів вільності (коливальними ступенями нехтуємо), тому зміну внутрішньої енергії можна представити у вигляді:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R (6T_1 - T_1) = \frac{25}{2} \nu R. \quad (4)$$

Робота, яка виконується газом, буде залежати від того, яким чином здійснюється перехід газу від стану 1 до 2. Тут можна використати два шляхи для знаходження роботи.

Площа, яка обмежена лініями $V_1 - 1$, $1 - 2$ та $V_2 - 2$ (див. рис. 2.6) буде чисельно дорівнювати роботі:

$$\begin{aligned} A &= p_1 (V_2 - V_1) + \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (V_2 - V_1) = \\ &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1) = 2p_1 V_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Інший спосіб полягає в наступному. Робота при елементарній зміні об'єму газу дорівнює $dA = p dV$. Згідно з умовою задачі між об'ємом та тиском існує лінійна залежність, тому можна записати $p = a + bV$, де a та b – це деякі постійні величини. Тому $dA = (a + bV) dV$. Інтегруючи даний вираз отримаємо наступне:

$$A = a(V_2 - V_1) + \frac{1}{2} b(V_2^2 - V_1^2) \quad (6)$$

постійні знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 = a + bV_1 \\ p_2 = a + bV_2 \end{cases} \quad (7)$$

або:

$$\begin{cases} p_1 = a + bV_1 \\ 3p_1 = a + 2bV_1 \end{cases} \quad (8)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь отримаємо значення констант:

$$a = -p_1; b = \frac{2p_1}{V_1}. \quad (9)$$

Тому робота:

$$A = 2p_1 V_1. \quad (10)$$

Загальна кількість теплоти буде дорівнювати:

$$Q = \frac{25}{2} \nu R T_1 + 2 p_1 V_1. \quad (11)$$

Підставляючи необхідні значення фізичних величин та виконуючи обчислення отримаємо відповідь: $Q = 67,2$ кДж.

Задача 24. Певна маса азоту при тиску $p_1 = 1 \cdot 10^4$ Па заповнює об'єм $5 \cdot 10^{-3}$ м³ а при тискові $3 \cdot 10^5$ Па – об'єм $2 \cdot 10^{-3}$ м³. Перехід від першого стану до другого відбувається в два етапи: спочатку по ізохорі, а потім – по ізобарі. Обчислити зміну внутрішньої енергії, роботу, та кількість теплоти, одержаної газом.

Розв'язування. Розглядуваний процес зображується на діаграмі p - V двома відрізками прямої – ізохорою 1-3 та ізобарою 3-2, де 3 – це проміжний стан який характеризується параметрами V_1 , p_2 , T_3 (рис. 2.7). Так як маса газу залишається сталою величиною, то можемо записати:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad (1)$$

звідки отримаємо:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} > 1. \quad (2)$$

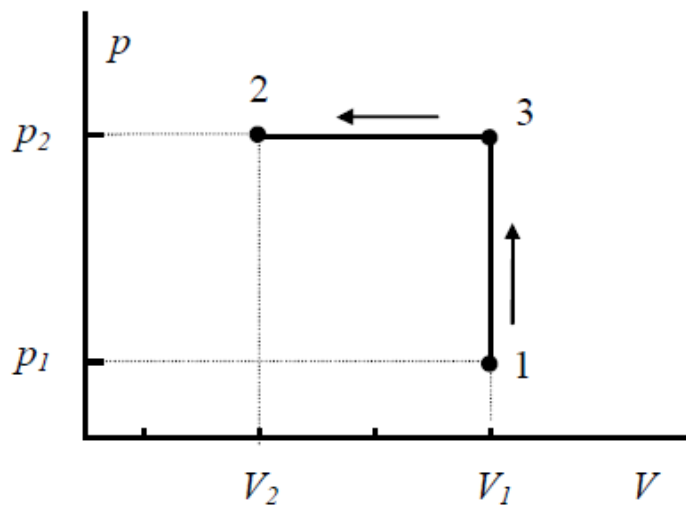


Рис. 2.7. Діаграма процесу

Отже температура газу в результаті переходу 1-3-2 підвищилась. Зміна внутрішньої енергії:

$$U_{21} = \nu C_V (T_2 - T_1) = \frac{C_V}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1). \quad (3)$$

Так як молекула азоту двоатомна, то $C_V = \frac{5}{2} R$, то будемо мати:

$$U_{21} = \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1). \quad (4)$$

Підставляючи числові значення фізичних величин отримаємо для зміни внутрішньої енергії $U_{21} = 1375$ Дж. Робота газу при виконанні процесу 1-2 буде дорівнювати роботі при ізобаричному стисненні 3-2, оскільки при ізохоричній зміні стану 1-3 дорівнює нулю. Тому:

$$A_{21} = p_2(V_2 - V_1) = -900 \text{ Дж.} \quad (5)$$

Сумарна кількість теплоти буде дорівнювати сумі роботи і змінні внутрішньої енергії:

$$Q = U_{21} + A_{21} = 1375 - 900 = 475 \text{ Дж.} \quad (6)$$

Так як знак теплоти додатний, то в результаті переходу 1-3-2 азот забирає теплоту у навколишнього середовища.

Задача 25. Чому дорівнює теплоємність ідеального газу в процесі, який відбувається при зростанні температури всередині циліндричної посудини, закритої невагомим поршнем (рис. 2.8) площею S до якого прикріплена пружина жорсткості якої k ? Записати рівняння такого стану. Зовнішній тиск залишається сталим.

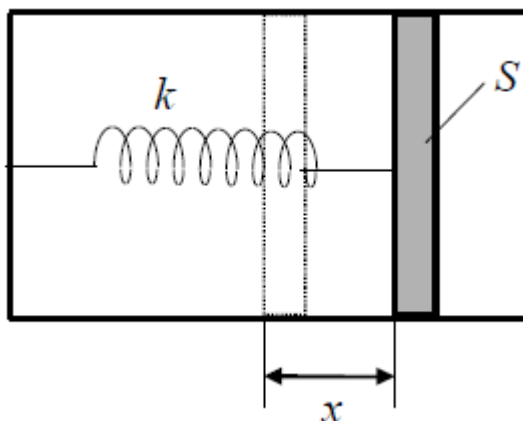


Рис. 2.8. Циліндрична посудина з невагомим поршнем

Розв'язування. Нагріваючись, газ розширюється. При переміщенні поршня на деяку відстань x , тиск газу, який діє на поршень буде рівним:

$$p(x) = p_0 + \frac{F}{S} = p_0 + \frac{kx}{S}, \quad (1)$$

тут p_0 – зовнішній тиск, $F = kx$ – пружна сила.

Оскільки $V = Sdx$ то мала зміна тиску буде даватися рівнянням:

$$dp = \frac{kdx}{S} = \frac{kdV}{S^2}. \quad (2)$$

Інтегруючи дане рівняння отримуємо для тиску:

$$p = \frac{kV}{S^2} + C, \quad (3)$$

тут C – стала інтегрування, значення якої визначимо, якщо скористаємося початковими умовами, а саме $x = 0$, $V = V_0$, $p = p_0$ тобто:

$$p_0 = \frac{kV_0}{S^2} + C \rightarrow C = \frac{p - p_0}{V - V_0}. \quad (4)$$

Звідси зрозуміло, що дане рівняння не може описуватися рівнянням $pV^n = \text{const}$, тобто описуваний процес не є політропічним. Диференціюючи рівняння стану ідеального газу одержимо $p dV + V dp = R dT$. Так як для нашого процесу $dp = \frac{k dV}{S^2}$ будемо мати наступне рівняння:

$$p dV = \frac{R}{\frac{V}{p} \frac{k}{S^2} + 1} dT. \quad (5)$$

Так як для одного моля, згідно першому закону термодинаміки:

$$C = \frac{C_V dT + p dV}{dT} \quad (6)$$

із двох останніх рівнянь будемо мати:

$$C = C_V + \frac{R}{\frac{V}{p} \frac{k}{S^2} + 1}. \quad (7)$$

Тобто в даному процесі теплоємність газу залежить від тиску та об'єму і не є сталою величиною.

Задача 26. Тиск і об'єм певної маси кисню політропно змінюється від значень $p_1 = 4,04 \cdot 10^5$ Па, $V_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ м³ до $p_2 = 1,01 \cdot 10^5$ Па, $V_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м³. Початкова температура $T_1 = 500$ К. Яку кількість тепла газ отримав від зовнішнього середовища? На скільки змінилась внутрішня енергія?

Розв'язування. Кількість тепла, яку одержав кисень від зовнішнього середовища буде визначатися рівнянням $Q = C(T_2 - T_1)$ де T_2 – температура в кінці політропічного процесу. За даних умов можна визначити показник політропи. Так як $p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$ звідки $\ln p_1 + n \cdot \ln V_1 = \ln p_2 + n \cdot \ln V_2$, то буде мати наступне:

$$n = \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2. \quad (1)$$

Оскільки показник політропи $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$ де C – молярна теплоємність газу, то розв'язавши рівняння $2 = \frac{C - C_p}{C - C_V}$ можна знайти молярну теплоємність:

$$C = C_V - R. \quad (2)$$

Так як молекула кисню двохатомна то $C_V = \frac{5}{2}R$, то отримаємо:

$$C = \frac{3}{2}R. \quad (3)$$

Звідси кількість теплоти:

$$Q = \nu \frac{3R}{2} (T_2 - T_1). \quad (4)$$

Температуру T_2 можемо знайти з рівняння стану $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ звідки $T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1$. Число молів визначимо з рівняння Клапейрону-Менделєєва $p_1 V_1 = \nu R T_1 \rightarrow \nu = \frac{p_1 V_1}{R T_1}$, тоді можемо записати для кількості теплоти наступне рівняння:

$$Q = \frac{p_1 V_1}{R T_1} \frac{3}{2} R \left(\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} - 1 \right) T_1 = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1), \quad (5)$$

підставляючи в останню формулу числові значення отримаємо $Q = -303$ Дж. Отже газ віддає тепло у зовнішнє середовище.

Зміна внутрішньої енергії знайдемо за допомогою наступної формули:

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1) = \frac{p_1 V_1}{R T_1} \frac{5}{2} R \left(\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} - 1 \right) T_1 = \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1). \quad (6)$$

Підставляючи в формулу числові значення матимемо $\Delta U = -505$ Дж.

Задача 27. Знайти зміну ентропії 1 гр водню при наступних процесах: спочатку водень ізобарично стиснули до об'єму, що у два рази менше ніж початковий, а потім ізотермічно розширюється до початкового об'єму.

Розв'язок. Розглянутий процес є оборотним і зображений в p - V координатах на рис. 2.9: тут 1-2 – ізобара, а 2-3 – ізотерма. При ізобаричному стисненні матимемо для зміни ентропії

$$\Delta S_{21} = \frac{i+2}{i} R \frac{m}{\mu} \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (1)$$

оскільки при ізобаричному стисненні виконується умова $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ то:

$$\Delta S_{21} = \frac{i+2}{i} R \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2)$$

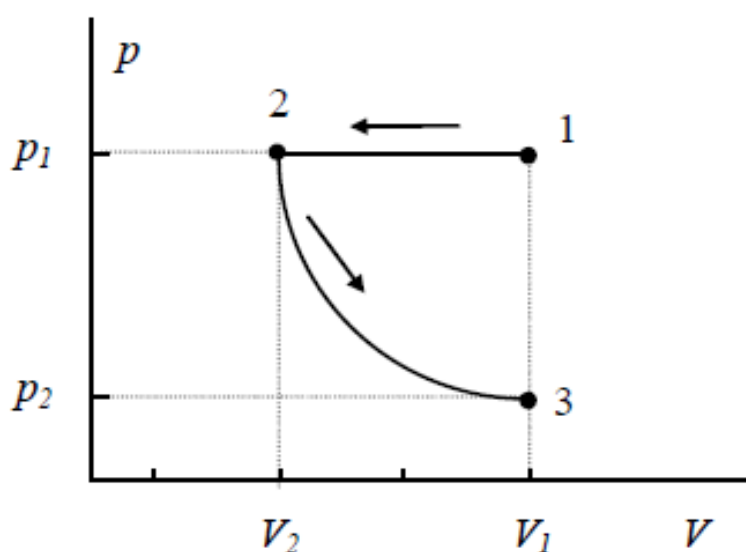


Рис. 2.9. Графік процесу

При ізотермічному розширенні:

$$\Delta S_{32} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_1}{V_2}. \quad (3)$$

Загальна зміна ентропії буде дорівнювати сумі цих ентропій:

$$\Delta S_{31} = \Delta S_{21} + \Delta S_{32} = -\frac{i}{2} R \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_1}{V_2}. \quad (4)$$

Підставляючи в останню формулу числові значення, та враховуючи те що водень є двоатомною молекулою (тобто $i = 5$) будемо мати наступне $\Delta S_{31} = -7,2$ Дж/К.

Розв'язати дану задачу можна і іншим способом. Врахуємо те, що ентропія є функцією стану системи, тобто визначається параметрами p, V, T . Використовуючи означення ентропії:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{\mu} C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV \quad (5)$$

врахувавши те що $\frac{p}{T} = \frac{m R}{\mu V}$ зміну ентропії можна записати у вигляді:

$$dS = \frac{m}{\mu} C_V \frac{dT}{T} + \frac{m R}{\mu V} dV. \quad (6)$$

Інтегруючи це рівняння матимемо:

$$S = \frac{m}{\mu} (C_V \ln T + R \ln V) + C, \quad (7)$$

де C – константа інтегрування.

Зміна ентропії при оборотному переході з стану 1 до стану 3 при $V = \text{const}$ рівна:

$$\Delta S_{31} = S_3 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_3}{T_1}. \quad (8)$$

Оскільки $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$ і враховуючи те, що $p_1 = p_2$, $V_2 = 0,5 V_1$, $V_3 = V_1$, $T_2 = T_3$ одержимо $\frac{T_3}{T_1} = 0,5$. Таким чином будемо мати для ентропії: $\Delta S_{31} = -7,2$ Дж/К.

Задача 28. Обчислити зміну ентропії для 0,1 кг льоду при його перетворенні в пар, якщо початкова температура льоду $T_0 = 233$ К а температура пари $T_1 = 373$ К. Питома теплоємність льоду $c_1 = 2,1 \cdot 10^3$ Дж/К, теплота плавлення льоду $\lambda = 32 \cdot 10^4$ Дж/кг, теплоємність води $c_2 = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/К теплота пароутворення $q = 22,6 \cdot 10^6$ Дж/кг. Вважати що теплоємності є сталими, а процес відбувається при сталому тиску.

Розв'язування. Перетворення льоду в пару відбувається в декілька етапів: процес 1 – нагрівання льоду від температури T_0 до температури плавлення $T_{\text{пл}}$, процес 2 – плавлення, процес 3 – нагрівання води до температури пароутворення $T_{\text{к}}$, процес 4 – пароутворення при постійній температурі, і нарешті процес 5 – нагрівання пару до температури T_1 . При даних умовах температура пароутворення і T_1 співпадають, тому останній

процес випадає з циклу. Для кожного процесу зміна ентропії буде описуватися наступними рівняннями:

- процес 1 $\Delta S_1 = c_1 m \ln \left(\frac{T_{\text{пл}}}{T_0} \right)$;
- процес 2 $\Delta S_2 = \frac{\lambda m}{T_{\text{пл}}}$;
- процес 3 $\Delta S_3 = c_2 m \ln \left(\frac{T_k}{T_{\text{пл}}} \right)$;
- процес 4 $\Delta S_4 = \frac{qm}{T_k}$.

Таким чином повна зміна ентропії буде дорівнювати:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = m \left[c_1 \ln \left(\frac{T_{\text{пл}}}{T_0} \right) + \frac{\lambda}{T_{\text{пл}}} + c_2 \ln \left(\frac{T_k}{T_{\text{пл}}} \right) + \frac{q}{T_k} \right] \quad (1)$$

Підставляючи числові значення будемо мати $\Delta S = 6,34 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 29. У термостаті малої теплоємності перемішується 0,1 кг води при температурі $T_0 = 293 \text{ K}$ з такою ж кількістю води при температурі кипіння $T_k = 373 \text{ K}$. Чому дорівнює загальна зміна ентропії води?

Розв'язування. Процес перемішування відбувається в термостаті, тому система ізольована і процес перемішування є адіабатичним. Однак такий процес є необоротним, так як будь-яка передача теплоти від більш нагрітого тіла до менш нагрітого є необоротним. Отже ентропія повинна збільшитися і зміна ентропії буде додатною.

Після змішування температуру води в термостаті можна визначити з рівняння теплового балансу:

$$cm_1(T - T_0) = cm_2(T_k - T). \quad (1)$$

Так як по умові задачі $m_1 = m_2 = m$ то температура $T = \frac{T_k + T_0}{2}$.

Зміна ентропії холодної води:

$$\Delta S_1 = m \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_0}. \quad (2)$$

Зміна ентропії гарячої води:

$$\Delta S_2 = m \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_k}. \quad (3)$$

Загальна зміна ентропії процесу буде дорівнювати сумі цих двох змін, а саме:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = m \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_0} + m \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_k} = \\ &= mc \left(\ln \frac{T}{T_0} + \ln \frac{T}{T_k} \right) = m \cdot c \cdot \ln \frac{T^2}{T_k T_0}. \end{aligned}$$

Звідси матимемо:

$$\Delta S = m \cdot c \cdot \ln \frac{(T_k + T_0)^2}{4T_k T_0}. \quad (4)$$

Так як для будь-яких чисел $a, b > 0$ вираз $\frac{(a+b)^2}{4ab} \geq 1$ і так як логарифм для чисел більших за одиницю є величиною додатною, то зміна ентропії також буде невід'ємною, тобто $\Delta S \geq 0$. Підставляючи в останню формулу числові значення отримаємо нашу відповідь: $\Delta S = 6,1 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$

Задача 30. Знайти коефіцієнт корисної дії циклу, який складається з адіабати, ізотерми та ізобари. Довести на прикладі даного циклу те, що вся теплота, яка поглинається ідеальним газом перетворюється у роботу, а зміна внутрішньої енергії та ентропії нульові. Початкові параметри газу та температуру ізотерми вважати відомими

Розв'язування. Цикл зображений на рис. 2.10. Виберемо напрям обходу за годинниковою стрілкою. Позначимо параметри ідеального газу в станах 1, 2, та 3 відповідно через p_i, V_i, T_i , де $i = 1, 2, 3$. Вздовж адіабати 1-2 всі три параметри зазнають змін. Вздовж ізотерми 2-3 температура залишається без зміни, тому $T_2 = T_3$, а на ділянці 3-1 тиск постійний, саме тому $p_2 = p_3$.

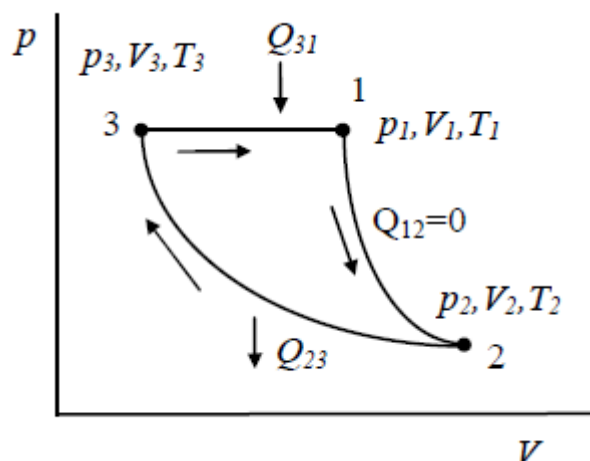


Рис. 2.10. Графік циклу

Йдемо далі. При адіабатичному розширенні температура газу зменшується $T_1 > T_2$. Тепер обчислимо одержану (або віддану) теплоту на кожній з ділянок. На адіабаті все просто $Q_{12} = 0$. При ізотермічному стисненні:

$$Q_{23} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} < 0, \quad (1)$$

так як $V_2 > V_3$ і газ віддає тепло. При ізобаричному розширенні виконується рівняння:

$$Q_{31} = C_p(T_1 - T_2) > 0, \quad (2)$$

отже в результаті циклу газ отримає наступну кількість тепла:

$$\begin{aligned} Q &= Q_{31} + Q_{23} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} + C_p(T_1 - T_2) = \\ &= C_p(T_1 - T_2) - RT_2 \ln \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

тут ми зробили наступні перетворення. З рівняння ізобари слідує, що:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_1} \rightarrow V_3 = V_1 \frac{T_3}{T_1} = V_1 \frac{T_2}{T_1}, \quad (4)$$

підставляючи це в $RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = RT_2 \ln \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = -RT_2 \ln \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1}$, що і приводить нас до нашого рівняння.

Так як затрачена кількість теплоти дорівнює Q_{31} то коефіцієнт корисної дії буде розраховуватися:

$$\eta = \frac{Q_{31} + Q_{23}}{Q_{31}} = \frac{C_p(T_1 - T_2) - RT_2 \ln \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1}}{C_p(T_1 - T_2)} = 1 - \frac{RT_2 \ln \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1}}{C_p(T_1 - T_2)}. \quad (5)$$

Оскільки для адіабати справедливо

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{V_2}{V_1},$$

то рівняння буде мати вигляд:

$$\eta = 1 - \frac{RT_2 \ln \frac{T_1}{T_2} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{C_p(T_1 - T_2)} = 1 - \left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\right) \frac{RT_2 \ln \frac{T_1}{T_2}}{C_p(T_1 - T_2)}. \quad (6)$$

Обчислимо сумарну роботу, що виконує газ у результаті циклу. Робота при адіабатичному розширенню дорівнює:

$$A_{12} = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = C_V(T_1 - T_2). \quad (7)$$

Робота ізотермічного стиснення буде дорівнювати:

$$A_{23} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = -T_2 \ln \frac{V_2}{V_3}. \quad (8)$$

Ізобарично розширюючись газ виконує додатну роботу:

$$A_{31} = R(T_1 - T_2). \quad (9)$$

Таким чином робота усього процесу буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} A &= A_{12} + A_{23} + A_{31} = C_V(T_1 - T_2) - T_2 \ln \frac{V_2}{V_3} + R(T_1 - T_2) = \\ &= C_p(T_1 - T_2) - T_2 \ln \frac{V_2}{V_3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для зміни внутрішньої енергії буде справедливо наступне:

$$- \text{на ділянці 1-2 } \Delta U_{12} = \frac{R}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} R (T_2 - T_1);$$

$$- \text{на ділянці 2-3 } T = \text{const} \rightarrow \Delta U_{23} = 0;$$

$$- \text{на ділянці 3-1 } \Delta U_{31} = \frac{i}{2} R (T_1 - T_3) = \frac{i}{2} R (T_1 - T_2).$$

Таким чином загальна зміна внутрішньої енергії всього процесу буде дорівнювати:

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) + 0 + \frac{i}{2} R (T_1 - T_2) = 0, \quad (11)$$

тобто зміна відсутня. Для розгляду зміни ентропії використаємо наступні рівняння:

– на ділянці 1-2 $\Delta S_{12} = 0$;

– на ділянці 2-3 $\Delta S_{23} = R \ln \frac{V_3}{V_2}$.

Врахуємо, що $\frac{p_1 V_3}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$ звідки $V_3 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$. Рівняння адіабати, яке ми вже

записували має вигляд $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$. Звідси будемо мати $V_2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1$.

Отже:

$$\begin{aligned} \Delta S_{23} &= R \ln \frac{V_3}{V_2} = R \ln \frac{\frac{T_2}{T_1} V_1}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1} = R \ln \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1+\frac{1}{\gamma-1}} = \\ &= R \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i+2}{i} R \ln \frac{T_2}{T_1}, \end{aligned} \quad (12)$$

– на ділянці 3-1 $\Delta S_{31} = \frac{i+2}{i} R \ln \frac{T_1}{T_2}$.

Таким чином будемо мати наступне:

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{31} = 0 + \frac{i+2}{i} R \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{i+2}{i} R \ln \frac{T_1}{T_2} = 0. \quad (13)$$

Таким чином зміна ентропії також дорівнює нулю.

Задача 31. Невелика теплоізована посудина розділена на дві рівні частини теплопроникною перегородкою. У кожній частині знаходиться вуглекислий газ кількістю речовини 10^{-8} моль. Температура газу в одній частині дорівнює 27 С в другій – 28 С. Нехтуючи теплоємністю посудини, визначити в скільки разів зміниться ймовірність стану при вирівнюванні температури. Визначити зміну ймовірності під час переходу такої ж кількості теплоти від менш нагрітої частини до більш нагрітої. Вважати, що газ ідеальний.

Розв’язування. Згідно співвідношенню Больцмана, ентропія прямо пропорційна натуральному логарифму термодинамічної ймовірності даного стану системи, тому зміна ентропії:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \rightarrow \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = e^{(\Delta S/k)}, \quad (1)$$

де Γ_1 Γ_2 – термодинамічні ймовірності стану, тобто числа, які пропорційні кількості тих фізичних мікростанів системи, які може реалізувати даний макростан, k – постійна Больцмана.

Температура кожної частини змінюється в результаті переходу теплоти від однієї частини до іншої, тому та кількість теплоти, що одержується однією частиною газу дорівнює кількості теплоти, яку інша частина газу віддає (за умовою задачі нехтуємо теплоємністю посудини). Оскільки в обох частинах знаходиться однакова кількість однорідного газу, то зміна температури по

модулю також буде однакова. Таким чином в результаті теплообміну буде виконуватися:

$$\begin{cases} T = T_1 - \Delta T \\ T = T_2 + \Delta T \end{cases} \rightarrow T = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad (2)$$

тут T – рівноважна температура.

Для того щоб знайти зміну ентропії, розглянемо квазістатичний процес, який може перевести систему із одного стану в інший. Оскільки об'єм газу в посудині залишається сталим, то таким процесом може бути ізохорне нагрівання однієї частини газу та ізохорне охолодження іншої частини газу (ці процеси квазістатичні). Для зміни ентропії будемо мати наступне:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^T \frac{\delta Q}{T} + \int_{T_2}^T \frac{\delta Q}{T}, \quad (3)$$

тут $Q = \nu C_V dT$, ν – число молів, $C_V = \frac{i}{2}R$ – молярна теплоємність газу (для вуглецю $i = 6$).

Проводячи інтегрування матимемо:

$$\Delta S = \nu C_V \left[\ln \left(1 - \frac{\Delta T}{T_1} \right) + \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_2} \right) \right]. \quad (4)$$

Так як зміна температури $\Delta T \ll T_1$ та $\Delta T \ll T_2$ натуральні логарифми можна розкласти в ряд, та обмежитися тільки першими членами розкладу. Це приведе нас до наступного рівняння:

$$\Delta S = \nu C_V \Delta T \left[-\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right], \quad (5)$$

тут $\nu C_V \Delta T = Q_{12}$ – кількість теплоти, віддана однією частиною газу до іншої.

Отже, останній вираз може бути використаний для розрахунку зміни ентропії не тільки при вирівнюванні температури, а й при будь-якому теплообміні між газами в будь-якій частині посудини. Таким чином можемо розрахувати наступне:

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = e^{\frac{1,38 \cdot 10^{-11}}{1,38 \cdot 10^{-23}}} = \exp 10^{11} \approx (20600)^{11}, \quad (6)$$

тобто стан після вирівнювання температури є значно ймовірніший ніж стан до вирівнювання. Зміна ентропії при переході теплоти від менш нагрітої частини до більш нагрітої буде дорівнювати:

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \exp 10^{-11} \approx 10^{-48}, \quad (7)$$

тобто такий процес має надзвичайно малу ймовірність.

Вважаючи, що термодинамічна ймовірність рівна або прямо пропорційна кількості випадків, коли даний стан має місце, отриманий результат можна інтерпретувати наступним чином: описана в завданні система мимоволі переходить у стан, при якому температури газів будуть однаковими практично завжди, перехід теплоти від менш нагрітої частини до більш нагрітої практично неможливий.

Проте є один нюанс. Якщо кількість теплоти при переході значно менше, наприклад $Q = 1,25 \cdot 10^{-17}$ Дж, то в цьому випадку зміна ентропії буде мати величину $\Delta S = 1,38 \cdot 10^{-22} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ і відношення кількості станів $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = e^{10} \approx 20000$. Зміна кількості станів при переході від менш нагрітої частини до більш нагрітої буде становити вже $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \approx \frac{1}{20000}$. Тобто вже на один випадок з 20000 становиться можливим такий перехід.

Очевидно, щоб передача такої малої кількості теплоти хоч якось змінила температуру газу, необхідно значно зменшитися кількість даного газу. Так для зміни температури на 0,01 К необхідно взяти число молів кількістю $10^{-15} - 10^{-16}$, що відповідає кількості молекул $10^8 - 10^7$. Для макроскопічних об'ємів, що містить таку кількість молекул, вже можна говорити про ймовірність такого процесу, що йде всупереч термодинамічній інтерпретації другого закону термодинаміки.

ДОДАТОК

Основні фізичні константи

Константи	Позначення	Значення
Швидкість світла у вакуумі	C	299792458 м/с
Стала Авогадро	N_A	$6,02217 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Універсальна газова стала	R	8,3143 Дж. моль ⁻¹ ·К
Стала Больцмана	k	$1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/моль
Елементарний заряд	e	$1,601 \cdot 10^{-19}$ Кл
Маса спокою протона	m_p	$1,67261 \cdot 10^{-27}$ кг
Маса спокою електрона	m_e	$9,10955 \cdot 10^{-31}$ кг
Маса спокою нейтрона	m_n	$1,675 \cdot 10^{-27}$ кг
Питомий заряд електрона	e/m_e	$1,75880 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Діелектрична стала	ε_0	$8,84 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	μ_0	$12,57 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Стала Фарадея	$F = N_A \cdot e$	$9,648 \cdot 10^4$ Кл/моль
Стала Планка	h	$6,6262 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Стала Стефана-Больцмана	δ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м ² ·К ⁴
Стала зміщення Віна	b	$2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К
Магнетон Бора	M_B	$9,2741 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Число «Пі»	π	3,14159
Основа натурального логарифма	e	2,711828
Логарифм натуральний	Ln_{10}	2,3
Фактор Ланде для електрона	g_e	2,002
Фактор Ланде для протона	g_p	5,585

Співвідношення між одиницями

$$1 \text{ а.о.м.} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$1(\text{а.о.м.}) \cdot c^2 = 931,481 \text{ МеВ, } c - \text{швидкість світла у вакуумі}$$

$$1 \text{ еВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб/м}^2 = 10^4 \text{ Гс}$$

$$1 \text{ ккал} = 14186 \text{ Дж}$$

Коефіцієнт теплопровідності

Речовина	Коефіцієнт теплопровідності при нормальних умовах Вт/(мК)
Азот	$2,37 \cdot 10^{-2}$
Аміак	$2,01 \cdot 10^{-2}$
Аргон	$1,64 \cdot 10^{-2}$
Бутан	$1,33 \cdot 10^{-2}$
Алюміній	$2,01 \cdot 10^2$
Водяна пара	$1,58 \cdot 10^{-2}$
Водень	$1,68 \cdot 10^{-1}$
Вода	0,6
Діоксид сірки	$0,84 \cdot 10^{-2}$
Гелій	$1,41 \cdot 10^{-2}$
Метан	$3,4 \cdot 10^{-2}$
Неон	$4,64 \cdot 10^{-2}$
Повітря	$2,37 \cdot 10^{-2}$
Пропан	$1,5 \cdot 10^{-2}$
Оксид вуглецю	$2,33 \cdot 10^{-2}$
Кисень	$2,39 \cdot 10^{-2}$
Лід	2,51
Сталь	46,1
Вуглекислий газ	$2,32 \cdot 10^{-2}$
Хлор	$0,79 \cdot 10^{-2}$
Ефір діетиловий	$1,3 \cdot 10^{-2}$

Температура кипіння і питома теплота пароутворення при температурі кипіння

Газ	Температура кипіння T_k , С	Питома теплота пароутворення при температурі кипіння $q \times 10^5$ Дж/кг
Азот	-195,8	2,01
Вода	100	22,6
Водень	-252,7	4,61
Повітря	-193	2,09
Гліцерин	290	
Кисень	-183	2,14
Ртуть	356,7	2,88
Спирт	78,3	8,46
Вуглекислий газ	-78,5	5,95

Похідні основних елементарних функцій

$C' = 0, (C = \text{const})$	$x' = 1$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$

Таблиця елементарних інтегралів

$\int du = u + C$	$\int \operatorname{tgu} du = -\ln \cos u + C$
$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \operatorname{ctgu} du = \ln \sin u + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + C$
$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \operatorname{tg} \left \frac{u}{2} \right + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 + a} \right + C$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right + C$
$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$	
$\int \sqrt{u^2 + a} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left u + \sqrt{u^2 + a} \right + C$	

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дмітрієва В.Ф. Фізика: підручник для вищих навчальних закладів. Київ: Техніка, 2008. 644 с.
2. Чолпан П.П. Фізика: підручник для вищих навчальних закладів. Київ: ВШ, 2004. 564 с.
3. Кучерук М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т. 1, 2, 3. К.: Техніка, 2006. 532 с.
4. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. Київ: Ігнатекс Україна, 2011. 648 с.
5. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. К.: Вища шк., 1994. 454 с.

Навчально-методичне видання

Мірошниченко О. І.

МЕТОДИКА РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ
Методичний посібник для самостійної роботи студентів
технічних спеціальностей
Частина 2

ДУІТЗ
65023, Одеса Кузнечная 1
Обсяг 4,5 д. ар., електронна версія