ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСІТЕТ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗВ'ЯЗКУ
Кафедра комп'ютерних наук

Заврак М.В., Третьяк О. І., Гуркліс І. В.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з дисципліни "Математичні методи дослідження операцій"
до теоретичних та практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврський) рівня вищої освіти
Галузь знань 12 Інформаційні технології

Одеса, 2024

УДК 51

Укладачі:

Заврак М.В. к.т.н., доцент кафедри Комп'ютерних наук

Третьяк О. І. д.ф-м.н., професор кафедри Фізико-математичних наук

Гуркліс І. В. ст. викладач кафедри Комп'ютерних наук

Рецензенти:

Малахов Є.В., професор, д.т.н., завідувач кафедри Математичного забезпечення комп'ютерних систем Одеського національного університету імені І.І.Мечникова.

Калініна Т. О., к.т.н., доцент кафедри Інженерії програмного забезпечення Одеського державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку

Рекомендовано до друку Навчально-методичною Радою Державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку (протокол № 2 від 13.11.2024 р.)

Методичні вказівки з дисципліни "Математичні методи дослідження операцій" до теоретичних та практичних занять. / Уклад.: М.В. Заврак, О.І. Третьяк, І.В. Гуркліс. Одеса: ДУІТЗ (Електр. вид. https://metod.suitt.edu.ua), 2024. 45 с.

Методичні вказівки орієнтовані на розв'язання практичних задач, які можна описати за допомогою математичних моделей. Передбачено вивчення основних класів моделей і залежностей, вживаних в економіці, у методиці описані основи теорії лінійного програмування, методи розв'язання задач лінійного програмування (графічний метод, симплекс-метод, метод потенціалів для розв'язання транспортних задач).

Зміст

Вступ

Важливе значення для підготовки фахівців з автоматизації керування і планування виробництва здобувають теоретичні дисципліни, у яких вивчаються наукові основи керування виробництва і розробляються методи підвищення ефективності керування економічними системами.

Особливе місце серед цих дисциплін займає основи системного аналізу. Ця дисципліна охоплює багато сфер цілеспрямованої людської діяльності і належить зараз до числа найбільше інтенсивно використовуваних дисциплін прикладної математики.

Розроблена із ціллю придбання теоретичних та практичних знань методичні вказівки "Математичні методи дослідження операцій" дозволяє сформувати у студентів знання правил побудови математичних моделей економіко-математичних задач, озброїти їх універсальним інструментарієм для прийняття обґрунтованих рішень щодо здійснення суто індивідуального вибору за обмежених засобів і наявності альтернативних можливостей.

Методичні вказівки "Математичні методи дослідження операцій" дають знання для розробці і практичного застосування методів найбільш ефективного або оптимального керування організаційними системами.

Задачі, які описані у методичних вказівках "Математичні методи дослідження операцій" полягають у перебуванні найкращих (оптимальних) керуючих впливів на систему при заданих обмеженнях на ці впливи. Задачі такого характеру зводяться до задач математичного програмування, що складають основу задач досліджень операцій.

У залежності від структури цільової функції і умов-обмежень розглянута класифікація задач математичного програмування. Найбільш вивченими серед таких задач є задачі лінійного програмування.

Матеріал методичних вказівок охоплює усі концептуальні питання курсу, та основні базові теми, передбачені програмою курсу "Математичні методи дослідження операцій".

Задачі та практичні приклади спрямовані на придбання навичок за рішенням задач побудови оптимізаційних математичних моделей, прийняттю оптимізаційних рішень економіко-математичних задач лінійного програмування.

В останній час все більш уваги приділяється питанням удосконалювання організації й керування різних сфер діяльності людини. Розвиток й ускладнення техніки, збільшення масштабів і вартості проведених заходів, широке впровадження автоматизації керування - все це приводить до необхідності докладно й всебічно здійснювати науковий аналіз складних цілеспрямованих дій людини. Від науки потрібна попередня оцінка й рекомендації з найкращого керування подібними процесами.

Не зупиняючись докладно на описі всіляких проблем, розв'язуваних методами дослідження операцій, розглянемо тільки один клас завдань, називаних оптимізаційними.

Терміни "оптимум", "оптимальність", "оптимізація" походять від латинського слова "optimus", що означає "найкращий", і використовується для позначення найкращого з будь-якої фіксованої точки зору рішення.

У застосуванні до предмета, що цікавить нас, слово "програмування" означає, що в процесі рішення відповідних завдань послідовно розглядається ряд варіантів рішення (програм), кожна програма поліпшується й поступово приходить до шуканого результату - оптимальній програмі. Програмування, у цьому змісті слова, досить близько до терміна "планування". Американські вчені дали таке визначення програмування: розподіл обмежених ресурсів найкращим способом для досягнення поставлених цілей.

Термін програмування варто розуміти як планування й не змішувати програмуванням, що позначає складання програм, що здійснює заданий обчислювальний процес на ЕОМ.

1. Класифікація задач

Задачі математичного програмування діляться на задачі лінійного і нелінійного програмування. При цьому якщо всі функції лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна з зазначених функцій нелінійна, то відповідна задача є задачею нелінійного програмування.

Найбільш вивченим розділом є лінійне програмування. Для розв’язання задач лінійного програмування розроблений цілий ряд ефективних методів, алгоритмів і програм.

1.1. Методи рішення завдань лінійного програмування (ЗЛП)

Графоаналітичний метод рішення ЗЛП. Характеристика й область застосування графоаналітичного методу

З назви методу "графоаналітичний" випливає, що його застосування містить графічну й розрахункову частини. При цьому графічна частина використовується для знаходження безлічі планів ЗЛП, тобто безлічі точок К.

Якщо число застосованих ЗЛП дорівнює двом, то її плани можна представити точками на координатній площині. З огляду на те, що геометричним зображенням рішення лінійної нерівності із двома змінними $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ є напівплощина з граничною прямою, рівняння якої $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, то точки К є перетинання всіх напівплощин.

Значно складніше побудувати точки К у тривимірному просторі й неможливо в просторі розмірності більше трьох.

Звідси постає висновок про те, що графоаналітичний метод застосовується в основному для рішення ЗЛП із двома змінними й деяких ЗЛП із трьома змінними. Тому він є ілюстративним, тобто ілюструє властивості безлічі планів і рішення ЗЛП і непридатний для рішення практичних завдань.

При певних значеннях ЗЛП із "m" обмеженнями й "n" змінними можна привести до ЗЛП із двома змінними й у такий спосіб вирішити графоаналітичним методом. Цими умовами є: всі m обмежень лінійно незалежні рівняння; різниця між числом змінних і числом рівнянь дорівнює двом, тобто n-m=2.

Можна виділити два способи рішення ЗЛП графоаналітичним методом: спосіб повного перебору; спосіб спрямованого перебору або градиентный спосіб.

1.2. Спосіб повного перебору

Процес рішення ЗЛП способом повного перебору складається з наступних етапів:

1. Побудова точок К и його оцінка:

якщо К=0 (порожня безліч), - рішення немає;

якщо К-опукла багатогранна область, то метод не застосуємо;

якщо К - опуклий багатокутник, то здійснюється перехід до етапу 2;

Визначення координат кутових точок К.

Обчислення значень цільової функції в кожній кутовій точці К и визначення точок экстремума .

Приклад. Вирішити графоаналітичним методом наступну ЗЛП

$Z = 50x, + 40x_2 \ \rightarrow \ (\max)$

$2x_1 + 5x_2 \leq 20$

$8x_1 + 5x_2 \leq 40$

$5x_1 + 6x_2 \leq 30$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Рішення:

Побудова точок К и його оцінка. Вибираємо систему координат x_1Ox_2 (рис. 1).

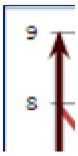

Рис. 1

Тому що x_1 і x_2 не від'ємні, то точки перебувають у першій чверті. Зобразимо рішення кожної нерівності окремо. Нерівність $2x_1 + 5x_2 \leq 20$ замінимо рівнянням $2x_1 + 5x_2 = 20$ і побудуємо відповідну граничну пряму. Її можна побудувати (притому тільки одну) по двох точках.

Вибираємо точки на осях координат:

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Для зручності подальшого рішення прямі пронумеруємо римськими цифрами. При визначенні напрямку напівплощини в нерівність підставимо координати будь-якої точки, що не лежить на цій прямій (зручніше початок координат), і якщо воно виконується, то рішенням є напівплощина, що містить цю точку. У противному випадку - протилежна напівплощина. Стрілками вкажемо напрямок напівплощини.

Аналогічно вирішимо друге й третє нерівності:

$8x_1 + 5x_2 \leq 40$ $\qquad\qquad$ $5x_1 + 6x_2 \leq 30$

$8x_1 + 5x_2 = 40$ $\qquad\qquad$ $5x_1 + 6x_2 = 30$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad\qquad$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{30}{6} = 5 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x_1 = \frac{30}{5} = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Одержимо опуклий багатокутник OABCD. Застосуємо спосіб повного перебору.

2. Визначення координат кутових точок К. Координати кутових точок A,O,D випишемо безпосередньо з рішення: O(0;0); A(0;4); D(5;0).

Для знаходження координат кутових точок В и С вирішимо систему рівнянь відповідно I й III, II й III граничних прямих.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 20 \to x_1 = 10 - \frac{5}{2}x_2; \to x_1 = 10 - \frac{5}{2}\cdot\frac{40}{13} = \frac{130-100}{13} = \frac{30}{13} \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \to x_2 = 50 - \frac{25}{2}x_2 + 6x_2 = 30; \to -13x_2 = -40; \to x_2 = \frac{40}{13} \end{cases}$$

$$B\left(\frac{30}{13}; \frac{40}{13}\right)$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \to x_1 = 5 - \frac{5}{8}x_2; \to x_1 = 5 - \frac{5}{8}\cdot\frac{40}{23} = \frac{115-25}{23} = \frac{90}{23} \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \to x_2 = 25 - \frac{25}{8}x_2 + 6x_2 = 30; \to 23x_2 = 40; \to x_2 = \frac{40}{23} \end{cases}$$

$$C\left(\frac{90}{23}; \frac{40}{23}\right)$$

3. Обчислення значень цільової функції в кутових точках К и визначення точок экстремума.

$$Z(O)=50\cdot 0 + 40\cdot 0 = 0$$
$$Z(A)=50\cdot 0 + 40\cdot 4=160$$
$$Z(D) =50\cdot 5 + 40\cdot 0 = 250$$

$$Z(B) = 50\cdot\frac{30}{13} + 40\cdot\frac{40}{13} = \frac{1500+1600}{13} = \frac{3100}{13} = 238{,}46$$

$$Z(C) = 50\cdot\frac{90}{23} + 40\cdot\frac{40}{23} = \frac{4500+1600}{23} = \frac{6100}{23} = 265{,}22$$

Оптимальний план завдання:

$x_1 = \frac{90}{23}; \quad x_2 = \frac{40}{23}; \quad Z_{max} = \frac{6100}{23}$

1.3. Варіанти завдань до ЛР №1

Зміст лабораторних робіт складається з теоретичної та практичної частин і розрахунково-пояснювальної записки; робота виконується на аркушах формату А4. При виконанні робіт студент повинен: а) вивчити теоретичний матеріал в обсязі, передбаченому програмою; б) письмово виконати теоретичні вправи, загальні для всіх студентів; в) вирішити запропоновані йому індивідуальні завдання, варіант яких відповідає номеру студента за списком у журналі; г) оформити і представити звіт відповідно до графіка виконання лабораторної роботи.

Захист лабораторної роботи проводиться перед її керівником. Під час захисту студент повинен уміти відповідати на теоретичні питання, пояснювати розв'язання теоретичних вправ, завдань, вміти розв'язувати аналогічні приклади.

Розв'язати задачу ЛП графічно:

Варіант 1	**Варіант 2**	**Варіант 3**
$-x_1+4x_2\le 8$ $x_1+2x_2\le 10$ $x_1+x_2\le 8$ $5x_1-10x_2\le 25$ $x_1+3x_2\ge 3$ $C(x)=-x_1+x_2$ $C(x)=2x_1+3x_2 \quad \max$	$-x_1+5x_2\le 10$ $x_1+5x_2\le 20$ $x_1\le 10$ $x_1-4x_2\le 6$ $x_1+4x_2\ge 4$ $C(x)=-x_1+x_2$ $C(x)=2x_1+3x_2 \quad \min$	$-x_1+6x_2\le 30$ $6x_1-x_2\le 30$ $2x_1+x_2\ge 4$ $x_1+x_2\ge 3$ $x_1+2x_2\ge 4$ $C(x)=-x_1+4x_2$ $C(x)=4x_1-x_2 \quad \max$
Варіант 4	**Варіант 5**	**Варіант 6**

$-x_1+4x_2\le 20$ $x_1+2x_2\le 16$ $2x_1-x_2\le 12$ $2x_1+x_2\ge 4$ $x_1+3x_2\ge 3$ $C(x)=-x_1+x_2$ $C(x)=3x_1+2x_2$ max	$2x_1-x_2\ge 2$ $-x_1+3x_2\le 9$ $x_1+4x_2\le 26$ $x_1-2x_2\le 2$ $x_1+2x_2\ge 6$ $C(x)=-x_1+x_2$ $C(x)=x_1+x_2$ max	$-2x_1+x_2\le 0$ $x_1+3x_2\le 21$ $x_1-x_2\le 5$ $x_1+3x_2\ge 9$ $2x_1+x_2\ge 8$ $C(x)=-4x_1+x_2$ $C(x)=x_1+x_2$ min
Варіант 7	**Варіант 8**	**Варіант 9**
$4x_1-x_2\ge 0$ $x_1+2x_2\le 18$ $3x_1-2x_2\le 6$ $-x_1+2x_2\ge 2$ $2x_1+x_2\ge 6$ $C(x)=-5x_1+x_2$ $C(x)=x_1+x_2$ max	$-2x_1+x_2\le 4$ $-x_1+x_2\le 5$ $3x_1+4x_2\le 48$ $2x_1+x_2\ge 4$ $x_1+3x_2\ge 3$ $C(x)=-x_1+x_2$ $C(x)=3x_1+2x_2$ max	$-x_1+x_2\le 4$ $x_1+2x_2\le 14$ $x_1+x_2\le 9$ $3x_1-2x_2\le 12$ $x_1+x_2\ge 2$ $C(x)=-4x_1+x_2$ max $C(x)=2x_1+3x_2$ max
Варіант 10	**Варіант 11**	**Варіант 12**
$-2x_1+3x_2\le 12$ $x_1+3x_2\le 30$ $2x_1-x_2\le 18$ $x_1-2x_2\le 6$ $2x_1-3x_2\ge 6$ $C(x)=-x_1+x_2$ min $C(x)=x_1+3x_2$ min	$-2x_1+x_2\le 4$ $-x_1+x_2\le 6$ $x_1+x_2\le 16$ $4x_1-x_2\le 24$ $x_1+2x_2\ge 4$ $C(x)=-3x_1+2x_2$ max $C(x)=3x_1+2x_2$ max	$3x_1-x_2\ge 3$ $-x_1+3x_2\le 15$ $x_1+x_2\le 13$ $-x_1+5x_2\le 5$ $x_1+3x_2\ge 11$ $C(x)=x_1+x_2$ min $C(x)=-x_1+x_2$ min
Варіант 13	**Варіант 14**	**Варіант 15**
$-3x_1+x_2\le 5$ $x_1+2x_2\le 24$ $2x_1+x_2\le 18$ $-x_1+2x_2\ge 6$ $4x_1+x_2\ge 12$ $C(x)=-x_1+x_2$ max $C(x)=x_1$ max	$-5x_1+3x_2\le 15$ $-2x_1+3x_2\le 24$ $2x_1+x_2\le 24$ $2x_1-x_2\le 8$ $x_1+x_2\ge 8$ $C(x)=x_1+x_2$ max $C(x)=x_1-x_2$ max	$-5x_1+3x_2\le 15$ $-2x_1+3x_2\le 24$ $2x_1+x_2\le 24$ $2x_1-x_2\le 8$ $x_1+x_2\ge 8$ $C(x)=x_1+x_2$ max $C(x)=x_1-x_2$ max
Варіант 16	**Варіант 17**	**Варіант 18**

$-x_1+5x_2\le 10$ $x_1+5x_2\le 20$ $x_1\le 10$ $x_1-4x_2\le 6$ $x_1+4x_2\ge 4$ $C(x)=-x_1+3x_2$ max $C(x)=3x_1+x_2$ max	$-x_1+6x_2\le 30$ $6x_1-x_2\le 30$ $2x_1-x_2\ge 4$ $x_1+x_2\ge 3$ $x_1+2x_2\ge 4$ $C(x)=x_1+3x_2$ min $C(x)=3x_1+2x_2$ min	$2x_1-x_2\ge 2$ $-x_1+3x_2\le 9$ $x_1+4x_2\le 26$ $x_1-2x_2\le 2$ $x_1+2x_2\ge 6$ $C(x)=2x_1+x_2$ min $C(x)=-2x_1+x_2$ min
Варіант 19	**Варіант 20**	**Варіант 21**
$-2x_1+x_2\le 0$ $-x_1+3x_2\le 21$ $x_1-x_2\le 5$ $x_1+3x_2\ge 9$ $2x_1+x_2\ge 8$ $C(x)=-3x_1+x_2$ max $C(x)=x_1+2x_2$ max	$4x_1-x_2\ge 0$ $x_1+2x_2\le 18$ $3x_1-2x_2\le 6$ $-x_1+2x_2\ge 2$ $2x_1+x_2\ge 6$ $C(x)=x_2$ min $C(x)=x_1-x_2$ min	$-2x_1+x_2\le 4$ $-x_1+x_2\le 5$ $3x_1+4x_2\le 48$ $3x_1-2x_2\le 12$ $x_1+x_2\ge 3$ $C(x)=-4x_1+x_2$ max $C(x)=x_2$ max
Варіант 22	**Варіант 23**	**Варіант 24**
$-x_1+x_2\le 4$ $x_1+2x_2\le 14$ $x_1+x_2\le 9$ $3x_1-2x_2\le 12$ $x_1+x_2\ge 2$ $C(x)=3x_1-2x_2$ min $C(x)=x_1+2x_2$ min	$-2x_1+3x_2\le 12$ $x_1+3x_2\le 30$ $2x_1-x_2\le 18$ $x_1-2x_2\le 6$ $2x_1+3x_2\ge 6$ $C(x)=x_1-x_2$ max $C(x)=x_2$ max	$-2x_1+x_2\le 4$ $-x_1+x_2\le 6$ $x_1+x_2\le 16$ $4x_1-x_2\le 24$ $x_1+2x_2\ge 4$ $C(x)=3x_1-2x_2$ min $C(x)=x_1+x_2$ min
Варіант 25	**Варіант 26**	**Варіант 27**
$3x_1-x_2\ge 3$ $-x_1+3x_2\le 15$ $x_1+x_2\le 13$ $-x_1+5x_2\le 5$ $x_1+3x_2\ge 11$ $C(x)=x_1-x_2$ max $C(x)=-x_1+2x_2$ max	$-3x_1+x_2\le 5$ $x_1+2x_2\le 24$ $2x_1+x_2\le 18$ $-x_1+2x_2\ge 6$ $4x_1+x_2\ge 12$ $C(x)=x_1-x_2$ min $C(x)=x_2$ min	$-5x_1+3x_2\le 15$ $-2x_1+3x_2\le 24$ $2x_1+x_2\le 24$ $2x_1-x_2\le 8$ $x_1+x_2\ge 3$ $C(x)=3x_1+2x_2$ min $C(x)=x_1-x_2$ min
Варіант 28	**Варіант 29**	**Варіант 30**

$-5x_1+3x_2\le 15$ $-2x_1+3x_2\le 24$ $2x_1+x_2\le 24$ $2x_1-x_2\le 8$ $x_1+x_2\ge 3$ $C(x)=3x_1 \quad \max$ $C(x)=-x_1+x_2 \quad \max$	$-3x_1+2x_2\le 6$ $-x_1+2x_2\le 10$ $4x_1-x_2\le 16$ $2x_1-x_2\le 6$ $x_1+x_2\ge 2$ $C(x)=2x_1+x_2 \quad \min$ $C(x)=-x_1+x_2 \quad \min$	$-x_1+3x_2\le 6$ $x_1+3x_2\le 24$ $x_1+x_2\le 12$ $2x_1-7x_2\le 14$ $x_1+2x_2\ge 2$ $C(x)=-x_1+2x_2 \quad \max$ $C(x)=x_1+2x_2 \quad \max$

2. Етапи розв’язання екстремальних задач математичного програмування

Формалізація задачі – необхідний етап для перекладу кожної прикладної задачі на мову математичних машин.

Задачі управління і планування звичайно зводяться до вибору деяких систем параметрів або системи функцій. Але будь-яка система має у своєму розпорядженні обмежені можливості, тому необхідно з’ясувати умови роботи системи і обмеження, яким повинні відповідати системи параметрів або функцій.

Розв’язання екстремальних економічних задач можна розбити на три етапи:

1. Побудова ЕММ;
2. Знаходження оптимального розв’язання одним з математичних методів;
3. Практичне впровадження в народне господарство.

Економіко-математична модель – це математична задача, яка відображає в абстрактному вигляді кількісні закономірності процесу з певною метою.

Побудова ЕММ полягає у створенні спрощеної економічної моделі, в якій в схематичній формі відображена суть процесу, що вивчається. При цьому особлива увага повинна надаватися віддзеркаленню в моделі всіх істотних особливостей задачі і обліку всіх обмежувальних умов, які можуть вплинути на результат. Потім визначають мету розв’язання, вибирають критерій оптимальності і дають математичне формулювання задачі.

Звичайно мета виражена у вигляді цільової функції, а умови і закономірності – у вигляді математичних співвідношень (умов-обмежень).

Оскільки всі засоби і закономірності передбачити неможливо, то відображають найважливіші. Вибір математичної моделі повинен ґрунтуватися на аналізі чинників, показників взаємозв'язку між ними, виходячи з поставлених завдань (цілей). Математичні моделі одного процесу можуть бути різними залежно від вимог, які ставить перед собою дослідник. Чим більше показників, чинників і взаємозв'язків враховується, тим повніше модель відображає економічний процес і тим складнішим він стає. Тому на практиці розглядаються, як правило, декілька спрощених моделей, які дають задовільні результати.

Т. ч., етапи побудови ЕММ:

1. Сформулювати економічну інтерпретацію задачі.
2. Формалізувати задачу.
3. Побудувати ЕММ, тобто цільову функцію і умови-обмеження.

Для формального розв'язання задачі проектування необхідно мати формалізований опис проектованого об'єкта, тобто опис за допомогою взаємозв'язаної послідовності математичних формул зв'язку конструктивних параметрів задачі з можливими конструктивно-компонувальними розв'язками.

3.Приклади задач лінійного програмування

3.1. Модель задачі лінійного програмування

Лінійне програмування (ЛП) – математична дисципліна, присвячена теорії і методам розв'язання задач про екстремуми лінійних функцій на множинах, що задаються системами лінійних рівнянь.

Типовим представником задач ЛП є наступна:

Знайти максимум лінійної функції:

$$L(x)=\sum_{j=1}^{m} C_j \cdot X_j \to \max, \qquad (3.1)$$

$$X_j \geq 0 \ (j= 1,\ldots m), \qquad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_j \leq b_i \ (i= 1,\ldots n), \qquad (3.3)$$

де C_j, a_{ij}, і b_i – задані величини.

Розглянемо кілька простих прикладів змістовної постановки завдань лінійного програмування й побудуємо їхні математичні моделі.

3.2. Задача про використання сировини

Припустимо, що деяке підприємство після виконання основної виробничої програми має у своєму розпорядженні запаси зекономленої сировини трьох видів – S_1, S_2, S_3 відповідно в кількостях b_1, b_2, b_3 умовних одиниць. Із цієї сировини може бути виготовлено 2 види виробів P_1 і P_2. Відомі : Aij - кількість одиниць Si - го виду сировини, що йде на виготовлення одиниці Pi - го виду виробу, і Ci - доход, одержуваний від реалізації однієї одиниці кожного виробу. Всі зазначені величини представимо в табл. 2.1

Табл. 2.1

Вид сировини	Запас сировини	Витрата сировини на виріб	
		P_1	P_2
S_1	21 (b_1)	3 (a_{11})	1 (a_{12})
S_2	30 (b_2)	2 (a_{21})	3 (a_{22})
S_3	16 (b_3)	0 (a_{31})	2 (a_{32})

Примітка: Прибуток від продажу одиниці виробу P_1 дорівнює 3 грн., від продажу одиниці виробу P_2 - 2 грн.

Завдання зводиться до того, щоб скласти такий план випуску продукції, при якому доход підприємства від реалізації всієї продукції був би максимальним.

Для побудови математичної моделі даного завдання введемо наступні позначення :

x_1 - кількість одиниць виробів виду P_1.

x_2 - кількість одиниць виробів виду P_2, які може випускати підприємство.

Знаючи кількість сировини кожного виду, що йде на виготовлення однієї одиниці виробу, і запаси сировини, можемо скласти систему обмежень, що визначає область можливих значень x_1 й x_2:

$3x_1 + x_2 \le 21$

$2x_1 + 3x_2 \le 30$

$2x_2 \le 16$

Отримана система обмежень установлює, що кількість сировини, що витрачається на виготовлення всіх виробів, не може перевищити наявних на підприємстві запасів. Виходячи з фізичного змісту на змінні накладають додаткові обмеження, що вимагають невід'ємності їхніх значень: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (x_1 або x_2 будуть дорівнюють нулю, якщо відповідний вид виробу не випускається). Тоді доход, одержуваний підприємством від реалізації x одиниць виробів P_1 і X_2 одиниць виробів P_2, відповідає $F = 3x_1 + 2x_2$.

Остаточне завдання формується в такий спосіб.

Знайти такий вектор $x = (x_1;x_2)$ при якому досягається максимум цільової функції

$F = 3x_1+2x_2$ і виконується наступна система обмежень:

$3x_1+x_2 \leq 21$

$2x_1+3x_2 \leq 30$

$2x_2 \leq 16$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

У загальному випадку математична модель такого завдання має такий вигляд.

Знайти вектор $x = (x_1,x_2,...x_n)$, максимізуючий функцію

$F=C_1x_1+C_2x_2+ ... +C_nx_n$ при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m\\
&x_j \geq 0 \qquad j=1,...,n
\end{aligned}
$$

3.3. Задача про використання потужностей

Припустимо, що підприємство повинне за час T виконати або, якщо це можливо, перевиконати план виробництва двох видів виробів P_1 і P_2. Для виробництва кожного виду виробів може бути використане встаткування груп a_1 й a_2. Продуктивність устаткування цих груп різна й визначається величиною a_{ij} де i - індекс, що відзначає вид устаткування, j - індекс, що відзначає вид продукції. Вартість одиниці часу роботи встаткування при виготовленні однієї одиниці продукції виражається величиною b_{ij} (i=l,2, j=l,2)

Потрібно скласти оптимальний план роботи груп устаткування, при якому буде виконаний план випуску продукції з мінімальною собівартістю й у заданий строк. Планова кількість P_1, становить N_1 штук, а P_2 - N_2 штук. Характеристики процесу виробництва виробів за допомогою встаткування різних груп представлені в таб. 2.2.

Уведемо наступні змінні: x_{11} — кількість одиниць машинного часу, у плині якого перша група встаткування буде робити перший вид виробів;

x_{12} - кількість одиниць машинного часу, у плині якого перша група встаткування буде робити другий вид виробів. Змінні x_{21}, x_{22} мають аналогічний сенс.

Табл. 2.2

Група встаткування	Продуктивність устаткування		Ціна одного часу роботи встаткування	
	P_1	P_2	P_1	P_2
A_1	a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}	b_{21}	b_{22}

Складемо систему обмежень, що враховує плановий період T (умовних одиниць часу) і планові завдання по кожному виді виробів N_1, N_2.

$x_{11}+x_{12}=T$

$x_{21}+x_{22}=T$

$a_{ll} x_{ll} + a_{21}x_{21} \geq N_l$

$a_{12} x_{12}+a_{22}x_{22} \geq N_2$

На змінні x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} накладаємо додаткові обмеження, що вимагають невід’ємності їхніх значень, що випливає з фізичного змісту самих змінних:

$x_{11}\geq 0$; $x_{12}\geq 0$; $x_{21}\geq 0$; $x_{22}\geq 0$.

Вартість виготовлення продукції можна записати у вигляді наступної цільової функції:

$$F=b_{11}x_{11}+b_{12}x_{12}+b_{21}x_{21}+b_{22}x_{22}.$$

Тоді остаточно завдання формується в такий спосіб.

Потрібно знайти такий план X=‖Xij‖, i=1,2, j=1,2, при якому досягається мінімум значення цільової функції.

$$F=b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22}$$

і виконуються наступні обмеження

$x_{11}+x_{12}=T$
$x_{21}+x_{22}=T$
$a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}\geq N_1$
$a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}\geq N2$
$xij=0, i=1,2;\ j=l,2.$

Система обмежень у цьому завданні складається з ряду нерівностей і рівностей.

3.4. Варіанти завдань до ЛР №2

Побудувати математичні моделі та розв'язати задачу лінійного програмування графічно, знайти мінімальне та максимальне значення цільової функції для задач 1, 2, а для задач 3, 4 побудувати тільки математичні моделі :

Приклад 1.

З одного міста в інше щодня відправляються пасажирські й швидкі поїзди. У таблиці зазначені: склад поїзду кожного типу, кількість наявних у парку вагонів різних видів для формування поїздів і максимальне число пасажирів, на яке розрахований вагон кожного виду.

Поїзди	Вагони				
	Багаж-ний	Пош-товий	Плацкарт-ний	Купей-ний	М'який
Швидкий	1	1	5(k+1)	6(k+1)	3(k+1)
Пасажир-ський	1	-	8(k+1)	4(k+1)	1(k+1)
Число пасажирів	-	-	58	40	34

Парк вагонів	12	8	81(k+1)	70(k+1)	26(k+1)

Визначити число швидких x1 і пасажирських x2 поїздів, які необхідно формувати щодня з наявного парку вагонів, щоб число перевезених пасажирів було максимальним.

Приклад 2.

Вирішити завдання 1 за умови, що пропускна здатність дороги обмежує число пасажирських поїздів до шести **k** у день.

Приклад 3.

На початку робочого дня автобусного парку на лінію виходить x1 автобусів, через годину до них додається x2 автобусів, ще через годину - додатково x3 машин.

Кожен автобус працює на маршруті безупинно протягом 8 годин. Мінімально необхідне число машин на лінії в i - й годині робочого дня (i=1, 2,..., 10) дорівнює bi. Перевищення цього числа приводить до додаткових витрат протягом i - ї години в розмірі ci руб. на кожен додатковий автобус.

Визначити кількості машин x1, x2, x3, що виходять на маршрут у перші години робочого дня, з таким розрахунком, щоб додаткові витрати на протязі всього робочого дня були мінімальними.

Приклад 4.

Авіакомпанія для організацій пасажирських перевезень между межцентром Ц и чотирма містами $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$, $Г_4$ має у своєму розпорядженні групи літаків. Перша група складається з 10 чотиримоторних, друга - з 25 двомоторних літаків нового зразка й третя - з 40 двомоторних літаків старого зразка. Кількість пасажирів (тис. чоловік), перевезених одним літаком даного типу по кожному маршруту за 1 місяць, і пов'язані із цим експлуатаційні витрати на 1 літак (тис. руб.) зазначені в таблиці.

Тип літака	Кількість пасажирів / Експлуатаційні витрати			
	Ц-$Г_1$	Ц-$Г_2$	Ц-$Г_3$	Ц-$Г_4$
1	16/1,2(к+1)	30/0,8	19/1,5	25/1,6(к+1)
2	20/1,4	25/1,5(к+1)	17/2,0	16/2,9(к+1)
3	25/1,0	18/1,1	20/1,8(к+1)	20/1,7(к+1)

Кількість пасажирів, які потрібно перевезти по кожному маршруті на місяць, становить відповідно 40, 50, 40, 30 тис. чоловік, а вартість одного квитка дорівнює 20, 15, 18 й 30 грн. Розподілити літаки по маршрутах, виходячи з умови досягнення максимального прибутку авіакомпаній.

Зразок виконання лабораторної роботи

Розглянемо деякі приклади оптимізаційних завдань, що ставляться до класу ЗЛП.

А) Завдання раціонального використання ресурсів

Економічна постановка. Меблева фабрика випускає два види виробів - столи й дивани, використовуючи при цьому три види ресурсів - дошки, цвяхи й клей. Відомі питомі витрати кожного виду виробу, запаси всіх видів ресурсів і прибуток, одержуваний від реалізації одиниці кожного виду виробів.

Необхідно визначити план виробництва продукції з наявних ресурсів, що забезпечує максимум прибутку підприємству.

Вихідні дані представлені в табл. 1

Таблиця 1

Ресурси	Вироби		
	Стіл	Диван	Запас
Дошки, $м^2$	5	8	40
Цвяхи, шт.	4	6	26
Клей, м	2	1	7
Прибуток, грош. од.	10	11	-

Математична модель завдання. Невідомі в завданні обсяги випуску кожного виду продукції. Позначимо планований обсяг випуску столів $\mathbf{x_1}$, диванів – $\mathbf{x_2}$. Набір значень цих змінних й описує план виробництва меблевої фабрики.

Критерієм оптимальності служить максимізація прибутку, одержуваної підприємством. Оскільки питомий прибуток від реалізації столів дорівнює 10 (див. табл. 1), те при плані випуску столів $\mathbf{x_1}$ підприємство дістане прибуток від реалізації цієї кількості столів у розмірі 10 $\mathbf{x_1}$. Аналогічно, прибуток від реалізації планованого випуску диванів складе 11 $\mathbf{x_2}$, а сумарний прибуток $\mathbf{z}$ буде мати вид

$$\mathbf{z} = 10\,\mathbf{x_1} + 11\,\mathbf{x_2}$$

Необхідно максимізувати прибуток. Отже, цільова функція буде такою:

$$\mathbf{z} = 10\,\mathbf{x_1} + 11\,\mathbf{x_2}\ (\max) \qquad (4)$$

Економічний зміст обмежень очевидний, вони виражають обмеженість ресурсів. Витрата дощок на один стіл дорівнює 5, отже, на весь планований обсяг випуску цієї продукції буде витрачено 5 $\mathbf{x_1}$ дощок, а на випуск усього планованого обсягу диванів - 8 $\mathbf{x_2}$.

Отже, загальна витрата дощок складе $5\,\mathbf{x_1} + 8\,\mathbf{x_2}$ і він, природно, не може перевищувати запас, рівний 40. Одержимо перше обмеження:

$$5\,\mathbf{x_1} + 8\,\mathbf{x_2} \le 40 \qquad (5)$$

Аналогічно записуються обмеження по використанню цвяхів і клеячи:

$$4\mathbf{x_1} + 6\,\mathbf{x_2} \le 26 \qquad (6)$$

$$2\,\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \le 7 \qquad (7)$$

З економічного змісту уведених змінних - планованих обсягів виробництва виробів - треба їхня незаперечність:

$$\mathbf{x_1} \ge 0, \quad \mathbf{x_2} \ge 0 \qquad (8)$$

Цільова функція (4), система основних обмежень (5)-(7) і умова незаперечності (8) являють собою математичну модель завдання раціонального використання ресурсів.

Завдання зводиться до відшукання таких ненегативних значень $\mathbf{x_1}$ і $\mathbf{x_2}$, які б задовольняли обмеженням (5) – (7) і доставляли б максимум функції (4).

4. Симплекс метод

Одним з основних методів розв’язання задач ЛП є симплексний метод. Геометрично його ідея полягає в наступному. Допустима множина (3.2) – (3.3) є опуклою багатогранною множиною (якщо вона обмежена, то багатовимірний опуклий багатогранник). Якщо задача ЛП має розв’язок, то існує вершина К багатогранної множини, що є оптимальним планом. Симплексний метод полягає в такому направленому переборі вершин, при якому значення цільової функції зростає від вершини до вершини. Кожній вершині відповідає система рівнянь, вибирана спеціальним чином із системи нерівностей (3.2) – (3.3), тому обчислювальна процедура симплексного методу полягає в послідовному розв'язанні систем лінійних рівнянь алгебри.

Алгоритм методу, при відомому опорному плані X, складається з етапів створення симплекс таблиць які розглянемо на прикладі.

4.1. Приклад

Вирішимо задачу лінійного програмування симплекс методом. Максимізувати x_l+2x_2, при умовах, що:

$-x_1+3x_2\le 10$

$xi+ x_2 \le 6$

$x_1- x_2 \le 2$

$x_1+ 3x_2\ge 6$

$2x_1+ x_2\ge 4$

$x_{1,}x_2\ge 0$

Позначимо через y - базисні змінні; х-свободні змінні, с- цільова функція.

Запишемо дану систему у вигляді основної задачі лінійного програмували (ОЗЛП)

$$-x_1 +3x_2+y_1=10$$
$$x_1 +x_2 + y_2 = 6$$
$$x_1 - x_2 + y_3 = 2$$
$$x_1+3x_2 - y_4 = 6$$
$$2x_1+ x_2 - y_5 = 4$$

Перетворимо стандартну форму задачі в канонічну систему

$$y_1= 10 - (-x_1 + 3x_2)$$
$$y_2= 6 - (x_1 + x_2)$$
$$y_3= 2 - (x_1 -x_2)$$
$$y_4= - 6 - (-x_1-3x_2)$$
$$y_3= - 4 - (-2x_1-x_2)$$
$$c = 0 - (x_1+2x_2)$$

У випадку мінімізації цільової функції необхідно поміняти знаки в дужках на зворотні.

Запишемо дану систему у вигляді таблиці.

Таблиця 3.1.

	x_1	x_2	Вільни й член		
Y_1	-1	3	10	-10	3.33
Y_2	1	1	6	6	6
Y_3	1	-1	2	2	-2
Y_4	-1	**-3**	-6	6	**2**
Y_5	-2	-1	-4	2	4
C	1	2	0		

Ділимо вільний член відповідно на x_1 й x_2 і результати записуємо поруч із таблицею, вибираємо найменший позитивний результат (тобто 2).

У випадку декількох однакових найменших чисел, вибираємо найбільший по модулі коефіцієнт при x_1 або x_2, що буде відповідати провідному елементу (тобто-3). Потім міняємо рядок y_4 на стовпець x_2 й x_2 на y_4. Розв'язний елемент міняємо на зворотний, тобто на - 1/3 і рядок, що містить розв'язний елемент, ділимо на розв'язний елемент, а стовпець - ділимо теж на розв'язний елемент і міняємо знак на зворотний.

Інші елементи таблиці (коефіцієнти при змінні й вільні члени) будуть пов'язані з коефіцієнтами при змінних і вільних членів вихідної системи, так наз. формулами виключення

Індекси i, j - поточні номери коефіцієнтів у таблиці, індекс к - номер стовпця в якому перебуває розв'язний елемент, індекс r - номер рядка в якому перебуває розв'язний елемент

$A^h_{1j} = A_{1j} – A_{1k} A_{rj}/A_{rk}$ $(i \neq r)$

$B^h_1 = B_1 - A_4 B_r / A_{rk}$ $(i \neq r)$

наприклад,

$a^н_{11} = a_{11} - a_{12} \cdot a_{41} / a_{42} = -1 - 3 \cdot (-1) /-3 = -1-1 = -2$

$a^н_{21} = a_{21} - a_{22} \cdot a_{41} / a_{42} = 1 -1 \cdot (-1) /-3 = 3-1/3 = 2/3$

$a^н_{31} = a_{31} – a_{32} \cdot a_{41} / a_{42} = 1- (-1) \cdot (-1) /-3 = 3+1/3 = 4/3$

$a^н_{51} = a_{51} – a_{52} \cdot a_{41} / a_{42} = -2- (-1) \cdot (-1) /-3 = -6+1/3 = -5/3$

$a^н_{61} = a_{61} – a_{62} \cdot a_{41} / a_{42} = 1-2 (-1) /(-3) = 3-2/3 = l/3$

Аналогічно вільні члени

$B^н_1 = b_1 - a_{12} \cdot b_4 / a_{42} = 10-3(-6)/(-3) = 10-6 = 4$

$B^н_2 = b_2 - a_{22} \cdot b_4 / a_{42} = 6-l \cdot (-6)/(-3) = 6-2 = 4$

$B^н_3 = b_3 - a_{32} \cdot b_4 / a_{42} = 2-(-1) \cdot (-6)/(-3) = 2+2 = 4$

$B^{н}_{5}=b_5-a_{52}\cdot b_4/\ a_{42}=-4-(-1)\cdot(-6)/(-3)=-4+2=-2$

$B^{н}_{6}=b_6-a_{62}\cdot b_4/\ a_{42}=0-2\cdot(-6)/(-3)=-4$

Результати зводимо в таблицю 3.2.

Табл. 3.2.

Таб.2	x_1	Y_4	Вільний член		
Y_1	-2	1	4	-2	4
Y_2	2/3	1/3	4	6	12
Y_3	4/3	-1/3	4	3	-12
Y_4	1/3	-1/3	2	6	-6
Y_5	**-5/3**	-1/3	-2	**6/5**	6
C	1/3	2/3	-4		

Аналогічним образом поводимося з т. 3.2, тобто ділимо вільний член відповідно на x_1 й y_4 і результати записуємо поруч із таблицею, вибираємо найменший позитивний результат (тобто 6/5), у такий спосіб провідним елементом вибираємо елемент із коефіцієнтом (-5/3). Подальші дії аналогічні попередньому алгоритму, тобто міняємо y_5 на x_1й x_1 на y_5 і т.д.

У такий спосіб одержуємо наступні симплекси-таблиці. Ознакою того, що одержали опорне рішення є те, що всі вільні члени позитивні.

	Y_5	Y_4	Вільний член		
Y_1	-6/5	7/5	32/5	-	32/7
Y_2	2/5	1/5	16/5	8	16
Y_3	**4/5**	-3/5	12/5	**3**	-
x_2	1/5	-2/5	8/5	8	-
x_1	-3/5	1/5	6/5	-	6
C	1/5	3/5	-22/5		

	Y_5	Y_4	Вільний член		
Y_1	3/2	1/2	10	20/3	20
Y_2	-1/2	**1/2**	2	-	**4**
Y_3	5/4	-3/4	3	12/5	-

x_2	-1/4	-1/4	1	-	-
x_1	3/4	-1/4	3	4	-
C	-1/4	3/4	-5		

	Y_3	Y_2	Вільний член		
Y_1	**2**	-1	8	**4**	-
Y_4	-1	2	4	-	2
Y_5	1/2	3/2	6	12	4
x_2	4/2	1/2	2	-	4
x_1	1/2	1/2	4	8	8
C	1/2	-3/2	-8		

	Y_1	Y_2	Вільний член		
Y_3	1/2	-1/2	4		
Y_4	1/2	3/2	8		
Y_5	-1/4	7/4	4		
x_2	-1/4	1/4	4		
x_1	-1/4	3/4	2		
C	-1/4	-5/4	-10		

Ознакою того, що отримано оптимальне рішення: вільні члени всі додатні, а коефіцієнти цільової функції від’ємні.

Примітка 1.У випадку, якщо найменший додатній результат повторюється в тім же рядку, що й у попередній таблиці, то необхідно перейти на наступний найменший додатній результат.

Геометрично ідея симплексного метода полягає в наступному. Допустима множина є опуклою багатогранною множиною (якщо вона обмежена, то багатовимірний опуклий багатогранник). Якщо задача ЛП має розв’язок, то існує вершина К багатогранної множини, що є оптимальним планом. Простота алгоритму робить цей метод зручним для його реалізації на ЕОМ.

4.2. Варіанти завдань до ЛР №3

Вирішити завдання ЛР №3 за умови ЛР №1.

5. Транспортна задача

5.1. Постановка й математична модель транспортної задачі

Розглянемо традиційну постановку одноетапного завдання планування перевезень.

У деяких пунктах A_1 , A_2 , . . . , A_i , . . ., A_m , названих постачальниками, зосереджений товар у кількості $a_1, a_2, . . . ,a_i, . . . ,a_m$, відповідно.

Пункти B_1, B_2 , . . . , B_i , . . . , B_n , названі споживачами, відчувають потребу в цьому товарі в кількості $b_1, b_2, . . . , b_i, . . . , b_n$ відповідно. Числа $\{a_i\}$ будемо називати потужностями (пропозиціями) постачальників, а $\{b_i\}$ - попитами споживачів.

Між пунктами A_i і B_j існують комунікації й відомі витрати на перевезення товарів від A_i і B_j . Необхідно скласти план перевезень, що забезпечує мінімум транспортних витрат.

Для того, щоб це завдання можна було представити у вигляді ЗЛП, необхідно зробити ряд у більшості випадків обґрунтованих пропозицій.

1. Товар є однорідним й діленим, тобто споживачеві байдуже джерело одержуваного товару, і перевезення можуть здійснюватися партіями будь-якого розміру.

2. Вартість перевезень пропорційна обсягу виробленого товару, тобто задана матриця тарифів $c = \|c_{ij}\|$ розмірності m*n , де c_{ij} показує вартість перевезення одиниці товару від A_i до B_i.

При поставці в транспортній задачі дуже важливу роль грають два параметри – сумарний попит та сумарна пропозиція. Сумарний попит відображає ту кількість товару, що потрібно споживачам. При прийнятих позначеннях він дорівнює $\sum_{j=1}^{n} b_j$.

Сумарна пропозиція – загальна кількість товарів, що перебувають у постачальників, дорівнює $\sum_{i=1}^{m} a_i$. Між двома цими величинами можуть бути одне із трьох співвідношень: менше, більше або дорівнює.

Визначення 1. ТЗ називається закритою, якщо сумарний попит дорівнює сумарній пропозиції:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (1)$$

У противному випадку ТЗ називається відкритою.

5.2. Економічна постановка закритої ТЗ

Скласти план перевезень, при якому вивозиться весь товар від постачальників, попит всіх споживачів задовольняється й транспортні витрати мінімальні.

Для складання математичної моделі введемо матрицю змінних $X = \|X_{ij}\|$,

де X_{ij} - планований обсяг перевезень від A_i до B_i. Очевидно, що розмірність цієї матриці m x n і вона визначає собою шуканий план перевезень.

Знайдемо вираження кількості товарів, що вивозиться від A_i . Першому поживачеві планується поставка X_{i1} , другому – X_{i2} і т.д. n – му X_{in}. Сума цих величин $X_{i1} + X_{i2} + \ldots + X_{in}$ або в скороченому записі $\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ й визначає планований вивіз товару від A_i. За умовою завдання весь товар повинен бути вивезений, отже, повинна виконуватися умова

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad (i = 1, m) \qquad (2)$$

Аналогічно планована кількість товару, що надходить до B_j , складається з поставок від $A_1 : X_{1j}$, $A_2 X_{2j}$ і т.д., $A_m : X_{mj}$. Сума

$$X_{1j} + X_{2j} + \ldots + X_{mj} = \sum_{i=1}^{m} X_{ij}$$

показує кількість товару, що направляє до B_j.

Оскільки потреби всіх споживачів повинні бути вдоволені, то одержуємо наступну систему обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_j \quad (j = 1, n) \qquad (3)$$

Розглянемо можливий знак невідомих $\{X_{ij}\}$. Величина $X_{ij}>0$ означає, що планується перевезення від A_i до B_j, при $X_{ij}=0$ перевезення не планується. Случаю $X_{ij}<0$ відповідає перевезення від B_j до A_i,що суперечить умові завдання. Отже,

$$X_{ij} \geq 0 \quad \begin{pmatrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Знайдемо математичне вираження цільової функції завдання – сумарної вартості перевезень. Тариф перевезень, тобто вартість перевезення одиниці товару по маршруті A_iB_j - C_{ij} . Якщо по цьому маршруті перевозиться X_{ij} одиниць товару, то витрати складуть $C_{ij}*X_{ij}$. Вираження $\sum C_{ij} \cdot X_{ij}$ відображає вартість перевезень від A_i до всім B_j. Склавши його по ***i,*** одержимо сумарну вартість перевезень $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij}$ (min)

За умовою завдання необхідно відшукати план, що забезпечує мінімум транспортних витрат, отже, цільова функція завдання має вигляд

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij} \text{ (min)} \qquad (5)$$

Обмеження (2) і (3) , умова незаперечності (4) і цільова функція (5) являють собою математичну модель закритої ТЗ . Оскільки основні обмеження (2) і (3) складаються з m+n рівнянь, то завдання (2)- (5) є ЗЛП, заданої в канонічній формі.

5.3. Економічні постановки й математичні моделі відкритих транспортних задач

Нехай сумарний попит більше сумарної пропозиції, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$$

У цьому випадку неможливо задовольнити попит всіх споживачів, тому економічна постановка завдання така.

Скласти план перевезень, при якому весь товар від всіх постачальників вивозиться, попит споживачів по можливості задовольняються (споживачі одержують товари в кількостях, що не перевищують їхній попит) і сумарні транспортні витрати є мінімальними.

У рамках прийнятих позначень математична модель такого завдання наступна.

Товар вивозиться від всіх постачальників

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right) \tag{6}$$

Споживачі одержують товар у кількостях, менших або рівних попиту на нього

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \tag{7}$$

Умова незаперечності (4) і цільова функція (5) залишаються колишніми:

$$X_{ij} \geq 0 \quad \begin{pmatrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij} \ \text{(min)} \tag{9}$$

У випадку, коли сумарна пропозиція перевищує попит $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, задоволення попиту споживачів не супроводжуються повним вивозом товару від постачальників. Отже, економічна постановка завдання така . Скласти план перевезень, при якому потреби всіх споживачів задоволені, від постачальників вивозяться товари в кількостях, що не перевищують їхні потужності, і сумарна вартість перевезень є мінімальною.

Першу умову завдання можна записати у вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \tag{10}$$

Друга

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le a_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right) \tag{11}$$

Крім того, зберігається умова невід'ємності

$$X_{ij} \ge 0 \quad \begin{pmatrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{pmatrix} \tag{12}$$

І цільова функція

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij} \ (\min) . \tag{13}$$

Очевидно, що моделі (6) - (8) і (10) - (13) являють собою ЗЛП, задані не в канонічному виді. Для приведення їх до канонічного виду в нерівності (7) і (11) необхідно ввести додаткові невід'ємні змінні, які ввійдуть у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

З метою змістовної економічної інтерпретації цих змінних, позначимо їх у такий спосіб. В (7)

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} + X_{m+1\,j} = b_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \tag{14}$$

А в (11)

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} + X_{in+1} = a_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right) \tag{15}$$

У випадку (14) набір $\{X_{m+1,\,j}\}$ можна інтерпретувати як поставки від якогось (m+1) – го фіктивного постачальника. Оскільки цей товар у дійсності не існує, то вартість перевезення його дорівнює нулю , отже , тарифи перевезень від A_{m+1} до всіх споживачів дорівнюють нулю. І так введення цих додаткових змінних у цільову функцію з використанням коефіцієнтів, рівних нулю, економічно обґрунтовано.

Відмітимо, що величина X_{m+1j} показує незадовільний попит B_j. Склавши співвідношення (14), одержимо

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} X_{ij} + \sum_{j=1}^{n} X_{m+1\,j} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Помінявши порядок підсумовування в першому доданку, з обліком (6) одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} X_{m+1\,j} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Або

$$\sum X_{m+1\,j} + \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Ліва частина отриманого співвідношення показує кількість товарів, що вивозять до всіх споживачів, тобто потужність (m+1) -го постачальника.

І так, для приведення відкритої ТЗ (6) – (9) до канонічного виду, тобто до закритого ТЗ , уводиться (m+1) -й фіктивний постачальник з потужністю $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ й тарифи перевезень від нього дорівнюють нулю.

Аналогічно з (15) треба, що набір $\{X_{in+1}\}$ можна інтерпретувати як перевезення до деякого фіктивного споживача. Неважко показати, підсумовуючи (15) по $\boldsymbol{i}$, що попит $\boldsymbol{B_{n+1}}$ дорівнює $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Величина $\boldsymbol{X_{in+j}}$ показує кількість товару, що залишається в $\boldsymbol{A_i}$. Оскільки ці товари не перевозяться, то транспортні витрати для них дорівнюють нулю, отже, тарифи перевезень до фіктивного споживача можна вважати рівними нулю.

Отже, введенням фіктивного споживача або постачальника завжди можна звести відкриту ТЗ до закритої й, таким чином, привести завдання до канонічної форми. Тому, так само, як й у загальній теорії лінійного програмування, у всіх подальших міркуваннях під ТЗ будемо мати на увазі закриту ТЗ , що задається співвідношеннями (2) –(6) , вважая, що серед $\boldsymbol{A_i}$ і $\boldsymbol{B_j}$ можуть бути у фіктивні.

5.4. Властивість планів і метод рішення ТЗ

Завдання (2) -(5) є ЗЛП, отже, для неї справедливі всі визначення й властивості ЗЛП, розглянуті в попередніх розділах. Оскільки клас ТЗ уже відносится до класу ЗЛП, то він володіє рядом специфічних особливостей, що дозволяють спростити ряд визначень, а також вибрати досить прості методи рішення.

Одна з найважливіших особливостей ТЗ - те, що будь-яка ТЗ має рішення.

6. Метод рішення ТЗ

Транспортна задача є ЗЛП, отже, її можна вирішити симплексним методом. Однак навіть у випадку трьох постачальників і чотирьох споживачів розмірність завдання буде досить великою: число змінних дорівнює $m \times n = 3+4 = 12$, а розмірність векторного простору завдання, дорівнює: $m+n-1=3+4-1=6$, отже, симплексна таблиця буде містити 12 шостимірних векторів, і завдання виявиться досить громіздкою.

Існує специфічний метод рішення ТЗ , заснований на використанні так називаної таблиці планування перевезень. Так само, як і симплекс - метод він є методом послідовного поліпшення планів, тобто являє собою процедуру спрямованого перебору й складається із трьох етапів: 1) складання початкового опорного плану; 2) оцінки оптимальності планів; 3) переходу від одного плану до іншого.

Таблиця планування перевезень має вигляд

Таблиця 6.1.

		B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
		b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
A_1	a_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1j}	…	C_{1n}
		X_{11}	X_{12}		X_{1j}		X_{1n}
A_2	a_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2j}	…	C_{2n}
		X_{21}	X_{22}		X_{2j}		X_{2n}
…	...	…	…	...	…	…	…
A_i	a_i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	…	C_{in}
		X_{i1}	X_{i2}		X_{ij}		X_{in}
…	…	...	...	...	...	…	
A_m	a_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mj}	…	C_{mn}
		X_{m1}	X_{m2}		X_{mj}		X_{mn}

У ній записуються постачальники і їхні потужності, споживачі і їхній попит.
На перетинанні ***i*** – й рядка й ***j*** – го стовпця перебуває клітка, названа маршрутом, що відображає зв'язок між A_i і B_j. Вона ділиться на дві частини. У верхній записується тариф, у нижньої – планований обсяг перевезень по даному маршруті - X_{ij} .
<u>Визначення</u> Планом ТЗ називається невід'ємний набір значень змінних $\{X_{ij}\}$, записаний у таблиці 1, такий, що сума елементів кожного стовпця – попит відповідного споживача. Числа X_{ij} будемо називати поставками. Відзначимо, що це визначення повністю відповідає визначенню плану ЗЛП. Дійсно, перша умова вказує на те, що набір $\{X_{ij}\}$ задовольняє обмеженню (2), а друге, що $\{X_{ij}\}$ задовольняє (3).
Клітки, у яких $X_{ij}>0$ будемо називати заповненими, інші – незаповненими.

6.1.Побудова початкового опорного плану

Існує кілька методів побудови початкового опорного плану, які розглянемо на прикладі.

$$b_1 = 30$$

$$a_1 = 50 \qquad b_2 = 70 \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = 150 \qquad b_3 = 90$$

Приклад. $$a_3 = 100 \qquad b_4 = 110$$

Дана ТЗ є закритою.
Становимо таблицю планування перевезень.

Таблиця 6.2.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		30	70	90	110
A_1	50	3	8	10	5
		30	20		
A_2	150	1	4	6	2
			50	90	10
A_3	100	3	1	9	7
					100

6.2. Метод північно – західного кута

Складання плану починаємо із заповнення клітки $\boldsymbol{A_1B_1}$, що перебуває в північно – західному куті таблиці, потужність $\boldsymbol{A_1}$ становить 50, в $\boldsymbol{B_1}$ вимагає 30 од., отже, у цю клітку заплануємо перевезення min(30,50) = 30 од. Залишок – 20 од. запишемо в клітку $\boldsymbol{A_1B_1}$. Потужність другого - постачальника - 50 од. Попит удоволений, а другому споживачеві необхідно 70 - 20 = 50 од. Запишемо це число в клітку й т.д.

Визначимо, які транспортні витрати відповідають такому плану:

$$Z_1 = 3*30+8*20+4*50+6*90+2*10+7*100 = 1710$$

Очевидним недоліком цього методу є те, що він не враховує тарифи перевезень

6.3. Метод мінімального елемента в рядку

Таблиця 6.3.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		30	70	90	110
A_1	50	3	8	10	5
		30			20
A_2	150	1	4	6	2
			60		90
A_3	100	3	1	9	7
			10	90	

У першому рядку вибираємо маршрут з мінімальним тарифом A_1B_1. По цьому маршруті можна відправити 30 од. вантажу. Залишок 20 од. відправимо по маршруті A_1B_4, тому що тариф найменший серед тих, що залишилися. Аналогічно розподіляється вантаж від інших постачальників. Вартість перевезень за таким планом

$$Z_2 = 3*30+5*20+4*60+2*90+1*10+9*90 = 1430.$$

Оскільки ця величина менше витрат за попереднім планом, можна зробити висновок про те, що облік тарифів дозволяє одержати кращий план у порівнянні з методом північно-західного кута.

Аналогічно реалізується метод мінімального елемента в стовбці.

6.4. Метод мінімального елемента

Таблиця 6.4.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		30	70	90	110
A_1	50	3	8	10	5
				50	
A_2	150	1	4	6	2
		30		10	110
A_3	100	3	1	9	7
			70	30	

Знаходимо маршрут, якому відповідає мінімальний тариф. У цьому випадку таких маршрутів два A_2B_1 й A_3B_2. По маршруті A_2B_1 можна відправити 30 од., а по маршруті A_3B_2 – 70 од. Попит B_1 й B_2 удоволений, залишилося B_3 й B_4. Вибираємо мінімальні тарифи серед маршрутів перевезень до цих споживачів і провадимо розподіл вантажів з обліком раніше зроблених поставок. Сумарні витрати по цьому варіанті плану складуть

$$Z = 10*50+1*30+6*10+2*110+1*70+9*30 = 1150.$$

Отриманий план - найкращий серед трьох побудованих.

Надалі будемо опиратися на метод побудови початкового плану.

Знайти оптимальний план транспортного завдання, де C_{ij} – матриця вартості перевезення одиниці ваги (товару), a_i – запаси й b_i – потреби товару.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 11 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \\ & & & \end{pmatrix} \qquad a_i = (320, 220, 250) \qquad b_j = (300, 300, 240, 280)$$

ТЗ , є відкритою, тому що $\sum a_i = 320 + 220 + 250 = 790$ менше $\sum b_i = 300 + 300 + 240 + 280 = 1120$; $A_\phi = 1120 - 790 = 390$

<u>Рішення:</u> опорне рішення одержимо за правилом “ мінімального елементу ”

Потреб.	B_1	B_2	B_3	B_4
Постав.	*300*	*300*	*240*	*280*
A_1	*10*	*9*	*8*	*5*
320		*20*	*240*	*60*
A_2	*6*	*7*	*11*	*4*
220				*220*
A_3	*3*	*4*	*6*	*8*
250	*250*			
A_ϕ	*12*	*12*		
330	*50*	*280*		

$$\sum a_i > \sum b_i$$

6.5. Метод потенціалів для рішення транспортних задач

Розглянутий симплекс-метод є універсальним для рішення будь-якого типу завдань лінійного програмування. Однак транспортні завдання допускають рішення більше простими методами, оскільки обмеження задані у вигляді рівностей, коефіцієнти при всіх невідомих в обмеженнях рівні одиниці, кожна невідома змінна входить лише у два рівняння. Систему обмежень можна дозволити відносно m+n-1 невідомих x_{ij} (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n), що дозволяє шукати оптимальне рішення транспортного завдання тільки серед m+n-1 невідомих, задовольняючих системі обмежень.

Найпоширенішим методом рішення транспортних завдань є м е т о д п о т е н ц і а л і в. У рішенні транспортного завдання виділяють три етапи:

1) визначення первісного припустимого базисного рішення;

2) дослідження отриманого базисного рішення на оптимальність;

3) визначення нового базисного рішення з меншим значенням цільової функції.

Етап 1. Існують два принципово різних методи визначення первісного припустимого базисного рішення: метод північно-західного кута й метод найменшої вартості перевезень.

М е т о д п і в н і ч н о – з а х і д н о г о к у т а дозволяє легко знайти припустиме базисне рішення, але воно, як правило, ще далеко від оптимального. Вартість перевезень при визначенні первісного рішення по цьому методі зовсім не враховується. Метод одержав свою назву від верхньої лівої (північно-західної) клітки, що заповнюється першої. Сутність методу укладається в тому, що спочатку повністю задовольняються потреби першого споживача (якщо це можливо) за рахунок першого постачальника, залишок передається другому споживачеві й т.д. Одночасно потрібно тільки стежити за тим, щоб дотримувався баланс по рядках і стовпцям. При цьому число зайнятих кліток (число x_{ij}), що входять у базисне рішення, завжди буде дорівнює m+n-1, що було розглянуто у главі (3.3).

М е т о д н а й м е н ш о ї в а р т о с т і дозволяє враховувати при визначенні первісного базисного рішення вартість перевезень. Тут поставки спочатку записуються в клітки з найменшою вартістю перевезень. При цьому первісне базисне рішення, як правило, буде ближче до оптимального. Недоліком цього методу є більше складна процедура одержання первісного базисного рішення - дивися главу 3.3.

Розглянемо приклад. Із двох складів потрібно перевезти цемент у три бетонозмішувальні вузли. У першому складі є 1800 т цементу, у другому складі - 2600 т цементу. У БСУ №1 потрібно доставити 1000 т цементу, у БСУ №2 - 1200 т, у БСУ №3 - 2200 т. Середні відстані по існуючих дорогах від кожного складу до всіх БСУ представлені в табл. 5.5.

Табл. 6.5.

Номер складу	Відстані до БСУ, км		
	1	2	3
S_1	20	20	30
S_2	30	40	20

Розглянемо завдання перевезення цементу (табл. 6.5) і заповнимо табл. 6.6 по методу північно-західного кута.

Табл. 6.6

Постачаль-ники	Споживачі			a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	20 - 1000	20 + 800	30	1800
A_2	30 +	40 - 400	20 2200	2600
b_j	1000	1200	2200	4400

З таблиці знаходимо:

x_{11}=1000; x_{12}=800; x_{22}=400; x_{23}=2200; $x_{13}=x_{21}=0$.

Число зайнятих кліток $m+n$-1=2+3-1=4.

Етап 2. Для одержання оптимального плану перевезень (x_{ij},i=1, 2, … , m; j=1, 2, … , n) необхідно й досить існування таких чисел u_i, i=1, 2, … , m і v_j, j=1, 2, … , n, названих потенціалами, при яких виконувалися б умови:

$v_j - u_i \le c_{ij}$, якщо $x_{ij} = 0$ (6.1)

$v_j - u_i = c_{ij}$, якщо $x_{ij} > 0$ (6.2)

де v_j – потенціал *j-го* стовпця; u_i – потенціал *i-го* рядка.

Умова (6.2) повинна дотримуватися для зайнятих кліток таблиці, а умова (6.1) - для вільних.

Порядок перевірки рішення на оптимальність розглянемо на нашому прикладі. Напишемо рівняння (5.2) для всіх зайнятих кліток табл. 6.6:

(1,1) $v_1 - u_1 = 20$;

(1,2) $v_2 - u_1 = 20$;

(2,2) $v_2 - u_2 = 40$;

(2,3) $v_3 - u_2 = 20$.

Вирішуючи отриману систему рівнянь, знаходимо значення потенціалів. Тому що система має на одне змінну більше, ніж число рівнянь, то приймаємо один з потенціалів, рівним нулю, тоді в системи рівнянь буде одне єдине рішення.

Приймаємо $u_1=0$. Тоді $v_1=20$, $v_2=20$, $u_2= - 20$, $v_3=0$.

Підставимо знайдені значення потенціалів у нерівності (6.1) для всіх вільних кліток:

(1,3) $v_3 - u_1 \le 30$, $0 - 0 \le 30$,

(2,1) $v_1 - u_2 \le 30$, $20+20 \le 30$

Бачимо, що умова оптимальності (5.1) не дотримується для клітки (2,1). Це значить, що отримане рішення не є оптимальним і потрібно шукати інше.

Етап 3. Удосконалювання отриманого на етапі 2 плана (рішення) здійснюється в такий спосіб. У клітку (2.1), для якої не виконується умова (4.1) записують поставку величиною Δ. Тому що суми поставок по рядках і стовпцям повинні залишитися незмінними, то необхідно додати й відняти Δ з поставок у базисних клітках, обходячи їх у тій послідовності, при якій значення Δ компенсується вирахуванням і додаванням зі значенням числа в клітці. Одержуємо замкнуту ламану лінію, одна з вершин якої перебуває у вільній клітці, у базисних. Таку ламану лінію називають ц и к л о м   п е р е р а х у в а н н я.

Для одержання нового рішення необхідно користуватися наступним правилом: починаючи з вільної клітки (2,1) і рухаючись по циклу перерахування, у вершинах циклу розставляють по черзі знаки «+» й «-», потім проглядаються поставки, записані в від'ємних вершинах, і серед них вибирається найменша. Це число додається до всіх поставок, записаним у додатних вершинах, і віднімається із всіх поставок, записаних у від'ємних вершинах. У результаті одержуємо нову таблицю (табл. 6.7).

Таблиця 6.7

Постачаль-ники	Споживачі			a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	20 600	20 1200	30	1800
A_2	30 400	40	20 2200	2600
b_j	1000	1200	2200	4400

Клітка, для якої будувався цикл перерахування, оголошується базисною, а та із вхідних у цикл базисних кліток, у якій поставка тепер дорівнює нулю, - вільною.

Якщо в результаті перерахування поставок одночасно в декількох вершинах циклу поставки стануть рівними нулю, то оголошується вільною лише одна з них, а інші залишаються базисними з нульовими поставками.

Продовжимо рішення розглянутого завдання. Перевіряємо умову оптимальності для отриманого рішення. Пишемо рівняння (6.2) для зайнятих кліток таблиці:

$$(1,1) \quad v_1 - u_1 = 20;$$
$$(1,2) \quad v_2 - u_1 = 20;$$
$$(2,1) \quad v_1 - u_2 = 30;$$
$$(2,3) \quad v_3 - u_2 = 20.$$

Приймаємо $u_1 = 0$ і знаходимо: $v_1 = 20$, $v_2 = 20$, $u_2 = -10$, $v_3 = 10$.

Перевіряємо виконання нерівностей (6.1) для вільних кліток таблиці:

$$v_3 - u_1 = 10 - 0 < 30;$$
$$v_2 - u_2 = 20 + 10 < 40,$$

т. е. умова (6.1) дотримується для всіх вільних кліток, це значить, що отримане рішення ($x_{11} = 600$, $x_{12} = 1200$, $x_{13} = 0$, $x_{21} = 400$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 2200$) є оптимальним. Зрівняємо оптимальне рішення з первісним (табл. 6.6) по величині перевезень:

$z_{опт} = 20 \text{ x } 600 + 20 \text{ x } 1200 + 30 \text{ x } 400 + 20 \text{ x } 2200 = 92000$ т/км;

$z_1 = 20 \text{ x } 1000 + 20 \text{ x } 800 + 40 \text{ x } 400 + 20 \text{ x } 2200 = 96000$ т/км,

т. е. оптимальний план у порівнянні з первісним дає економію 4000 т/км, що еквівалентно приблизно 10 автомобіле-дням.

Висновки

Транспортна задача (ТЗ) є важливою частиною випадку загальної задачі ЛП.

При розв'язанні ТЗ:

Будується початковий опорний план Х.

Обчислюється матриця оцінок С.

Перевіряється план на оптимальність.

Якщо всі $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорний план оптимальний, розв'язання задачі закінчити. Якщо $\Delta_{ij} \geq 0$, то розв'язання задачі продовжити.

6.5. Варіанти завдань до ЛР №4

Варіант 1

a_i b_j	150	150	50	60	50

Варіант 2

a_i b_j	9	15	21	15	10
15	15	18	17	12	19

200	4	1	2	5	3
100	2	1	8	3	5
150	4	8	7	1	2
50	6	2	5	7	4

17	13	8	14	29	30
25	9	10	23	11	19
13	20	16	16	15	17

Варіант 3

a_i b_j	15	7	11	62
51	24	19	21	15
19	14	21	15	16
28	10	9	6	11

Варіант 4

a_i b_j	30	70	90	110
50	3	8	10	5
150	1	4	6	2
100	3	1	9	7

Варіант 5

a_i b_j	22	16	13	11	16
22	8	7	8	12	11
14	11	8	7	14	9
11	9	9	6	11	10
31	8	10	12	10	8

Варіант 6

a_i b_j	30	50	70	10	30	10
40	2	4	6	1	1	2
80	3	4	5	7	9	6
60	4	3	2	9	8	7
20	5	1	3	5	7	9

Варіант 7

a_i b_j	16	17	10	21	15
22	11	7	6	9	8
14	8	9	10	11	9
19	6	12	9	10	8
23	7	12	10	8	11

Варіант 8

a_i b_j	11	12	5	6
10	10	9	7	11
8	8	6	9	7
7	11	12	14	11
9	4	6	3	9

Варіант 9

a_i b_j	11	8	7	9
10	6	5	12	11
9	9	2	6	4
7	11	14	12	10
11	7	9	6	8

Варіант 10

a_i b_j	18	13	16	26	24
11	11	8	9	9	8
16	8	7	9	6	10
22	7	8	6	10	12
17	14	12	10	9	11
31	9	11	10	8	8

Варіант 11

a_i b_j	70	70	60	100
70	19	20	20	15

Варіант 12

a_i b_j	5	20	15	25	10
15	1	5	3	8	6

40	27	26	25	21
100	35	17	30	40
80	15	13	18	17
10	15	11	13	10

5	9	4	1	5	3
25	6	8	4	7	3
20	5	2	7	1	9
10	7	4	6	9	2

Варіант 13

a_i b_j	2	4	3	5
4	5	10	16	8
7	9	11	19	15
2	17	8	12	13
1	3	17	20	14

Варіант 14

a_i b_j	100	300	150	200
400	30	18	5	25
150	9	15	18	6
200	9	10	17	20

Варіант 15

a_i b_j	17	43	15
20	130	100	200
10	100	180	175
23	125	190	100
22	160	145	170

Варіант 16

a_i b_j	30	50	90	20	40
60	15	25	18	12	16
40	9	5	16	20	14
100	30	35	19	26	32
30	2	6	17	8	7

Варіант 17

a_i b_j	20	50	30
20	10	17	13
60	14	11	20
20	12	15	18

Варіант 18

a_i b_j	1500	1000	2000	1500	1000
2500	20	16	17	19	15
3000	21	27	25	22	30
1500	10	7	9	11	8

Варіант 19

a_i b_j	60	150	90	100
200	20	26	27	15
60	11	20	12	17
60	14	30	21	29
80	19	16	18	25

Варіант 20

a_i b_j	33	12	14	11	16
27	7	8	6	10	12
15	8	9	9	8	11
17	10	6	9	7	8
18	9	11	10	8	8

Варіант 21

a_i b_j	16	19	12	11
15	10	12	13	8
11	9	6	16	10
9	16	9	14	7
10	15	7	13	9
13	14	12	9	12

Варіант 22

a_i b_j	18	15	17	24	27
11	11	8	7	14	9
22	8	7	8	12	11
14	9	9	6	10	10
17	8	10	12	11	8
31	9	6	10	9	8

Варіант 23

a_i b_j	1000	550	490	950
400	15	7	11	7
1200	6	4	12	18
500	7	11	5	10

Варіант 24

a_i b_j	1000	550	490	950
20	8	11	1	4
97	5	2	7	3
69	10	4	3	5

Варіант 25

a_i b_j	1000	3000	2000
1200	30	20	16
500	10	10	10
1500	17	35	18
1000	38	19	16
1800	45	50	30

Варіант 26

a_i b_j	150	200	100	100	100
50	10	15	10	10	15
250	20	15	10	20	25
400	10	15	20	25	20

Варіант 27

a_i b_j	60	90
70	7	4
45	5	9
15	3	8

Варіант 28

a_i b_j	170	140	300
240	5	4	1,5
210	3	0,5	2,5
130	1	2	1

Варіант 29

a_i b_j	20	70	10
40	6	4	2

Варіант 30

a_i b_j	0	80	150	150	200
150	1	5	3	2	1

70	3	6	7	300	1	2	4	2	4
				200	2	3	4	1	3

Література

Івченко І.Ю. Математичне програмування. Навчальний посібник. –К.: 2007 – 232с.
Великодний С.С., "Математичні методи дослідження операцій." -Одеса, Е- print. 2015
Синєглазов В.М. Математичні методи оптимізації: навч. Посібн./ В.М. Синєглазов. О.А. Зеленков. Ш. І. Аскеров. - Нац. Авіаційний ун - т. - К.: Освіта України. 2018. - Ч. 1. - 329 с.