ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗВ'ЯЗКУ

Кафедра Комп'ютерних наук

Заврак М.В.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з дисципліни «Комп’ютерна дискретна математика»
до практичних занять
для здобувачів денної форми навчання
галузі знань F «Інформаційні технології»

ОДЕСА
ДУІТЗ
2025

УДК519.1/.8(07)

Автори:

Заврак М.В. к.т.н., доцент кафедри Комп’ютерних наук Державного університету інтелектуальних технологій і зв’язку;

Рецензенти:

Калініна І. О., д.т.н., доцент, професор кафедри Інтелектуальних Інформаційних систем ЧНУ ім. П. Могили

Калініна Т. О., к.т.н., доцент кафедри Інженерії програмного забезпечення Одеського державного університету інтелектуальних технологій і зв’язку

Рекомендовано до друку Навчально-методичною Радою
Державного університету інтелектуальних технологій і зв’язку
(протокол №4 від 30 січня 2025 р.)

Комп’ютерна дискретна математика : методичні вказівки до практичних занять [для здобувачів першого (бакалаврський) рівня вищої освіти галузі знань F «Інформаційні технології»] / уклад. М. В. Заврак. Одеса : ДУІТЗ, 2025. 44 с. URL: https://metod.suitt.edu.ua

В методичних вказівках викладено основні теоретичні відомості, наведено приклади розв’язування задач, завдання. Подано контрольні питання, запитання для самоконтролю, літературні джерела

ЗМІСТ

ВСТУП 4

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1 5

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2 15

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3 31

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ 44

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Дискретна математика» входить до циклу загальної підготовки студентів-бакалаврів галузі знань F Інформаційні технології і є важливою складовою фундаментальної підготовки фахівців в галузі комп’ютерних наук та інформаційних технологій.

Якщо донедавна дискретна математика як розділ математики була сферою інтересів лише вузького кола фахівців, то тепер, у зв'язку з масовим використанням комп'ютерної техніки, вона перетворилася на важливу наукову дисципліну, що є необхідною для сучасних прикладних досліджень. Основу курсу «Комп’ютерна дискретна математика» складають математичні методи обробки, аналізу та перетворення дискретної інформації. В рамках дисципліни акцент робиться на вивченні не тільки основних понять і теоретичних результатів, а й підходів та алгоритмів розв'язання деяких прикладних задач, а також здобутті навичок практичного застосування апарату дискретної математики для розв'язання конкретних задач. Вивчення студентами основ дискретної математики в рамках пропонованого курсу дозволить їм краще оволодіти фаховими дисциплінами, а також використовувати апарат дискретної математики для подальших прикладних досліджень.

Дискретна математика має широкий спектр додатків, перш за все в областях, пов'язаних з інформаційними технологіями та комп'ютерами. Таким чином, дискретна математика є базовим курсом при підготовці фахівців з інформаційних технологій та алгоритмізації і штучного інтелекту.

Викладення практичного матеріалу цих розділів дисципліни виконано з урахуванням вимог фундаментальної освіти з комп’ютерних наук, інформаційних технологій, сучасних інженерних і соціально-економічних напрямків з високим рівнем автоматизації та комп’ютеризації.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1

Системи числення. Переведення чисел у різні системи числення

Мета роботи: придбання практичних навичок застосування методів кодування двійкових чисел, виконання арифметичних операцій над числами в різних системах числення.

Теоретичні відомості

Позиційні системи числення

Загальноприйнятою в сучасному світі є десяткова позиційна система числення, яка з Індії через арабські країни прийшла в Європу. Основою цієї системи є число десять. Основою системи числення називається число, яке означає, у скільки разів одиниця наступного розрядку більше за одиницю попереднього.

Загальновживана форма запису числа є насправді не що інше, як скорочена форма запису розкладу за степенями основи системи числення, наприклад:

$130678=1*10^5+3*10^4+0*10^3+6*10^2+7*10^1+8$

Тут 10 є основою системи числення, а показник ступеня - це номер позиції цифри в записі числа (нумерація ведеться зліва на право, починаючи з нуля). Арифметичні операції у цій системі виконують за правилами, запропонованими ще в середньовіччі. Наприклад, додаючи два багатозначних числа, застосовуємо правило додавання стовпчиком. При цьому все зводиться до додавання однозначних чисел, для яких необхідним є знання таблиці додавання.

Проблема вибору системи числення для подання чисел у пам'яті комп'ютера має велике практичне значення. В разі її вибору звичайно враховуються такі вимоги, як надійність подання чисел при використанні фізичних елементів, економічність (використання таких систем числення, в яких кількість елементів для подання чисел із деякого діапазону була б мінімальною). Для зображення цілих чисел від 1 до 999 у десятковій системі достатньо трьох розрядів, тобто трьох елементів. Оскільки кожен елемент може перебувати в десятьох станах, то загальна кількість станів - 30, у двійковій системі числення $999_{10}=111110011$, необхідна кількість станів - 20 (індекс знизу зображення числа - основа системи числення). У

такому розумінні є ще більш економічна позиційна система числення - трійкова. Так, для запису цілих чисел від 1 до у десятковій системі числення потрібно 90 станів, у двійковій - 60, у трійковій - 57. Але трійкова система числення не дістала поширення внаслідок труднощів фізичної реалізації.

Тому найпоширенішою для подання чисел у пам'яті комп'ютера є двійкова система числення. Для зображення чисел у цій системі необхідно дві цифри: 0 і 1, тобто достатньо двох стійких станів фізичних елементів. Ця система є близькою до оптимальної за економічністю, і крім того, таблички додавання й множення в цій системі елементарні.

Таблиця 1 – Додавання й множення у двійковій системі

+	0	1
0	0	1
1	1	10
*	0	1
0	0	0
1	0	1

Оскільки $2^3=8$, а $2^4=16$, то кожних три двійкових розряди зображення числа утворюють один вісімковий, а кожних чотири двійкових розряди - один шістнадцятковий. Тому для скорочення запису адресу та вмісту оперативної пам'яті комп'ютера використовують шістнадцяткову й вісімкову системи числення. Нижче в таблиці 2 наведені перші 16 натуральних чисел записаних в десятковій, двійковій, вісімковій та шістнадцятковій системах числення.

Таблиця 2 – Запис чисел у різних системах числення

10	2	8	16
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

В процесі налагодження програм та в деяких інших ситуаціях у програмуванні актуальною є проблема переведення чисел з однієї позиційної системи числення в іншу. Якщо основа нової системи числення дорівнює деякому ступеню старої системи числення, то алгоритм переводу дуже простий: потрібно згрупувати справа наліво розряди в кількості, що дорівнює показнику ступеня і замінити цю групу розрядів відповідним символом нової системи числення. Цим алгоритмом зручно користуватися коли потрібно перевести число з двійкової системи числення у вісімкову або шістнадцяткову. Наприклад, $10110_2=\underline{10}\ \underline{110}=26_8$, $1011100_2=\underline{101}\ \underline{1100}=5C_{16}$

Переведення у двійкову відбувається за зворотнім правилом: один символ старої системи числення заміняється групою розрядів нової системи числення, в кількості рівній показнику ступеня нової системи числення. Наприклад, $472_8=\underline{100}\ \underline{111}\ \underline{010}=100111010_2$, $B5_{16}=\underline{1011}\ \underline{0101}=10110101_2$

Як бачимо, якщо основа однієї системи числення дорівнює деякому степеню іншої, то перевід тривіальний. У протилежному випадкові користуються правилами переведення числа з однієї позиційної системи числення в іншу (найчастіше для переведення із двійкової, вісімкової та шістнадцяткової систем числення у десяткову, і навпаки).

Алгоритми переведення чисел з однієї позиційної системи числення в іншу

1. Для переведення чисел із системи числення з основою p в систему числення з основою q, використовуючи арифметику нової системи числення з основою q, потрібно записати коефіцієнти розкладу, основи ступенів і показники ступенів у системі з основою q і виконати всі дії в цій самій системі. Очевидно, що це правило зручне при переведенні до десяткової системи числення.

Наприклад з шістнадцяткової в десяткову:

$92C8_{16}=9\cdot10_{16}^{3}+2\cdot10_{16}^{2}+C\cdot10_{16}^{1}+8\cdot10_{16}^{0}=9\cdot16_{10}^{3}+2\cdot16_{10}^{2}+12\cdot16_{10}^{1}+8\cdot16_{10}^{0}=37576$

з вісімкової в десяткову:

$735_{8}=7\cdot10_{8}^{2}+3\cdot10_{8}^{1}+5\cdot10_{8}^{0}= 7\cdot8_{10}^{2}+3\cdot8_{10}^{1}+5\cdot8_{10}^{0}=477_{10}$

з двійкової в десяткову:

$110100101_{2}=1\cdot10_{2}^{8}+1\cdot10_{2}^{7}+0\cdot10_{2}^{6}+1\cdot10_{2}^{5}+0\cdot10_{2}^{4}+0\cdot10_{2}^{3}+1\cdot10_{2}^{2}+0\cdot10_{2}^{1}+1\cdot10_{2}^{0}=$

$=1\cdot2_{10}^{8}+1\cdot2_{10}^{7}+0\cdot2_{10}^{6}+1\cdot2_{10}^{5}+ 0\cdot2_{10}^{4}+0\cdot2_{10}^{3}+1\cdot2_{10}^{2}+0\cdot2_{10}^{1}+ 1\cdot2_{10}^{0}=421_{10}$

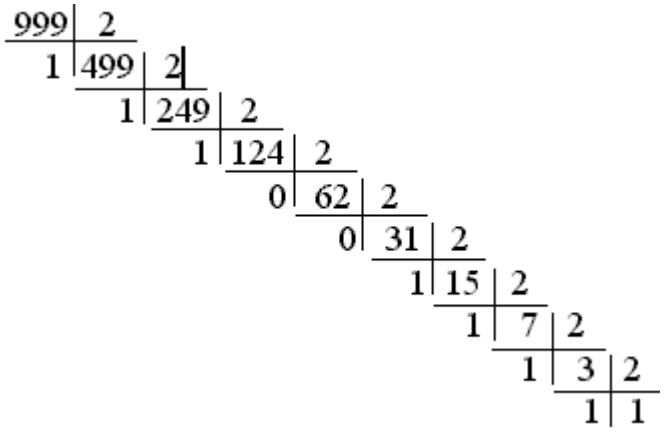
2. Для переведення чисел із системи числення з основою p в систему числення з основою q з використанням арифметики старої системи числення з основою p потрібно:

- для переведення цілої частини послідовно число, записане в системі основою p ділити на основу нової системи числення, виділяючи залишки. Залишки записані у зворотному порядку, будуть утворювати число в новій системі числення;
- для переведення дробової частини послідовно дробову частину множити на основу нової системи числення, виділяючи цілі частини, які й будуть утворювати запис дробової частини числа в новій системі числення.

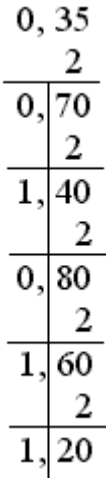
Цим самим правилом зручно користуватися в разі переведення з десяткової системи числення, тому що її арифметика для нас звичніша.

Приклади: $999,35_{10}=1111100111,01011_{2}$

для цілої частини:



для дробової частини:



Числа з фіксованою і плаваючою комою

При представленні числа в двійковому коді з цифрами 0,1 в кожному розряді записуються цифри 0 або 1. Оскільки в ЕОМ «запис» числа здійснюється за допомогою технічних пристроїв, то для представлення його в такій формі необхідно розташовувати пристрої з двома надійно різними станами, яким можуть бути зіставлені значення 0 або 1. Комбінація таких пристроїв, число яких відповідає кількості розрядів записуваного числа, може бути використана для представлення чисел в ЕОМ.

Як такі пристрої, можуть бути використані трігери. Набір трігерів, призначених для представлення чисел в ЕОМ, а також для виконання над ними деяких логічних перетворень, називається регістром. Зрозуміло, число розрядів, відведене для запису числа, відповідне числу трігерів, в ЕОМ завжди звичайно. Вибір кількості розрядів для представлення чисел в ЕОМ є одним з

найвідповідальніших етапів конструювання обчислювальної машини і обумовлюється цілим рядом потреб, серед яких одне з найважливіших - необхідна точність обчислень.

У ЕОМ застосовуються дві основні форми представлення чисел: півлогарифмічна - з плаваючою комою і природна - з фіксованим положенням коми.

При представленні чисел з фіксованою комою положення коми фіксується у визначеному місці щодо розрядів числа і зберігається незмінним для всіх чисел, що зображуються в даній розрядній сітці. Зазвичай кома фіксується перед старшим розрядом або після молодшого. У першому випадку в розрядній сітці можуть бути представленні тільки числа, які по модулю менше 1, в другому - тільки цілі числа.

Використання представлення чисел з фіксованою комою дозволяє спростити схеми машини, підвищити її швидкодію, але представляє певні труднощі при програмуванні. В даний час представлення чисел з фіксованою комою використовується як основне тільки в мікроконтролерах.

У універсальних ЕОМ основним є представлення чисел з плаваючою комою. Широкий діапазон представлення чисел з плаваючою комою зручний для наукових і інженерних розрахунків. Для підвищення точності обчислень в багатьох ЕОМ передбачена можливість використання формату подвійної довжини, проте при цьому відбувається збільшення витрат пам'яті на зберігання даних і сповільнюються обчислення. Розглянемо докладніше ці дві формати.

Числа з фіксованою комою

Формат для чисел з комою, фіксованою перед старшим розрядом**.** У цьому форматі можуть бути з точністю до $2^{-(n-1)}$ представлені числа (правильні дроби) в діапазоні $2^{-(n-1)} \leq |x| \leq 1- 2^{-(n-1)}$.

Перші ЕОМ були машинами з фіксованою комою, причому кома фіксувалася перед старшим розрядом числа. В даний час, як правило, форму з фіксованою комою застосовують для представлення цілих чисел (кома фіксована після молодшого розряду).

Використовують два варіанти представлення цілих чисел: із знаком і без знаку. У послідньому випадку всі розряди розрядної сітки служать для представлення модуля числа. У ЄС ЕОМ застосовуються обидва вказані варіанти представлення цілих чисел, причому кожен з варіантів реалізується як у форматі 32-розрядного машинного слова цих машин, так і у форматі 16-розрядного півслова.

При виконанні арифметичних дій над правильними дробами можуть получитися двійкові числа, по абсолютній величині більше або рівні одиниці, що називається переповнюванням розрядної сітки. Для виключення можливості переповнювання доводиться масштабувати величини, що беруть участь в обчисленнях.

Перевага представлення чисел у формі з фіксованою комою полягає в простоті виконання арифметичних операцій.

Недоліки - в необхідності вибору масштабних коефіцієнтів і в низькій точності уявлення з малими значеннями модуля (нулі в старших розрядах модуля приводять до зменшення кількості розрядів, займаних значущою частиною модуля числа).

Числа з плаваючою комою

При використанні плаваючої коми число складається з двох частин: мантиси m, що містить значущі цифри числа, і порядку p, що показує ступінь, в який треба звести підстава числа q, щоб отримане при цьому число, помножене на мантису, давало дійсне значення числа, що представлялося:

$$N_q = mq^p$$

Мантиса і порядок представляються в двійковому коді. Звичайне число дається в нормалізованому вигляді, коли його мантиса є правильним дробом, причому перша значуща цифра (одиниця) слідує безпосередньо після коми: наприклад, $(N)_2 = 0{,}1010 \cdot 2^{10} = 10{,}10$ де m=0,1010; p=10; q=2

Порядок вказує на дійсне положення коми в числі. Код в приведеному форматі представляє значення числа в напівлогарифмічній формі: $N = m \cdot 2^p$

Точність представлення значень залежить від кількості значущих цифр мантиси. Для підвищення точності числа з плаваючою комою представляються в нормалізованій формі, при якій значення модуля мантиси лежить в межах $0{,}5 \le |m| \le 1$ Ознакою нормалізованого числа служить наявність одиниці в старшому розряді модуля мантиси. У нормалізованій формі можуть бути представлені всі числа з деякого діапазону за винятком нуля.

Нормалізовані двійкові числа з плаваючою комою представляють значення модуля в діапазоні: $0{,}5 \cdot 2^{-P_{max}} \le |N| \le (1 - 2^{m-1})2^{P_{max}} \approx 2^{P_{max}}$

Де $P_{max} = 2^{p-1}$ - максимальне значення модуля порядку.

Так, при p=7, $P_{max} = 2^{p-1} - 2^6 - 1 = 63$ і діапазон представлення модулів нормалізованих чисел:$|N|_{min} = 0{,}5 \cdot 2^{-63} = 2^{-63} \approx 10^{-63 \cdot 0{,}3} \approx 10^{-19}$

$|N|_{max} = 2^{63} \approx 10^{63 \cdot 0{,}3} \approx 10^{19}$

Таким чином, діапазон чисел: $10^{-19} \le |N| \le 10^{19}$

Для розширення діапазону чисел, що представляються, при фіксованій довжині розрядної сітки (m+p) як основа системи числення вибирається $2^4 = 16$. При цьому число, що представляється в розрядній сітці, набуває значень $N = m \cdot 16^p$ Нормалізована мантиса 16-ого числа з плаваючою комою має значення в діапазоні $\frac{1}{6} \le |m| \le 1$. Ознакою нормалізації такого числа є наявність хоч би однієї одиниці в чотирьох старших розрядах модуля мантиси. Діапазон представлення чисел в цьому випадку істотно розширюється, знаходячись при тій же кількості розрядів в межах від 10^{-75} до 10^{75}.

При записі чисел в кодах ASCII цифрам від 0 до 9 поставлені у відповідність восьмирозрядні двійкові коди від 00110000 до 00111001.

ЕОМ, призначені для обробки економічної інформації дозволяють проводити арифметичні операції в десятковій системі числення над числами, представленими в двійково-десяткових кодах і кодах ASCII.

Контрольні питання

1. Що називають системою числення?

2. Відмінність позиційних і непозиційних систем числення?

3. Подання чисел у вигляді поліномів.

4. Мантиса, характеристика та порядок числа.

5. Переведення правильних дробів із однієї системи числення в іншу.

6. Переведення цілих чисел із однієї системи числення в іншу.

7. Переведення змішаних чисел із однієї системи числення в іншу.

Завдання

1. Перевести числа X,Y,Z із десяткової системи числення в двійкову за схемою $(\ )_{10} \rightarrow (\ )_2$. Перевірити отриманий результат перекладами $(\ )_2 \rightarrow (\ )_8 \rightarrow (\ )_{10}$ і $(\ )_2 \rightarrow (\ )_{16} \rightarrow (\ )_{10}$. Кількість вірних двійкових розрядів дробової частини чисел L. Визначити яку похибку дає така кількість розрядів. Вхідні дані наведені у табл. 2.

2. Перевести число Q із вісімкової системи числення у десяткову, виконати перевірку. Вхідні дані наведені у таблиці 3.

3. Перевести число F із шістнадцяткової системи числення у десяткову, виконати перевірку. Вхідні дані наведені у таблиці 3.

4. Виконати арифметичні операції додавання та віднімання понад числами у двійковій, вісімковій та шістнадцятковій системах числення. Знайти значення X+Q, Y+Z, Q+F, F-Z, Z-Q, Q-F. Розрахунки представити в стовпчик. Виконати перевірку в десятковій системі.

5. Розробити та налагодити програму переводу чисел в задану систему числения. В функції переводу заборонено використовувати команди множення і ділення. Можна використовувати таблицю ступенів основи нової системи числення.

Таблиця 3 – Вхідні дані

Номер варіанту	X	Y	Z	L	Q	F
1	0.15	253	27.99	4	741.23	AB9.F1
2	0.24	289	71.97	4	265.17	B8C.A2
3	0.86	145	29.95	4	143.33	CD7.E3
4	0.93	279	73.93	4	214.75	D6E.A4
5	0.43	254	31.91	4	617.23	EF5.B8
6	0.84	281	75.89	5	623.12	F4A.C6
7	0.53	256	33.87	5	715.47	BF3.D7
8	0.44	284	77.85	5	545.13	2EC.D8
9	0.79	259	35.83	5	341.51	ED1.A9
10	0.08	287	79.81	5	216.14	9CF.E3
11	0.25	263	37.79	6	356.53	FB5.A1
12	0.37	291	81.77	6	225.15	7AF.24
13	0.03	265	39.75	6	317.55	36A.CF
14	0.41	295	83.73	6	336.17	F4B.5D
15	0.45	271	41.71	6	310.21	A5C.E4
16	0.14	297	85.69	5	427.57	D6D.3F
17	0.57	273	43.67	5	201.24	72E.AD
18	0.69	299	87.65	5	726.61	ABF.18
19	0.73	274	45.63	5	711.26	79C.FB
20	0.88	279	89.61	5	707.63	6C8.ED
21	0.56	245	47.59	6	153.27	5FE.D7
22	0.91	241	91.57	6	620.65	4A6.CF
23	0.33	304	49.55	6	114.31	3F5.DB
24	0.21	239	93.53	6	477.21	2DB.A4
25	0.47	309	51.51	6	327.33	1C3.FA
26	0.95	235	95.49	4	577.71	9AD.2B
27	0.11	325	53.47	4	415.41	8E1.BC
28	0.49	233	97.45	4	601.73	7DF.9D
29	0.36	318	57.43	4	465.45	5A8.FE
30	0.72	231	99.41	4	613.75	47B.AF

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2

Основні поняття комбінаторики

Мета роботи: вивчення основних комбінаторних з'єднань і придбання практичних навичок у розв'язанні комбінаторних задач.

Теоретичні відомості

Предмет комбінаторики

Комбінаторика - розділ математики, присвячений вирішенню завдань вибору і розташування елементів деякого, звичайно кінцевої множини, відповідно до заданих правил. Кожне таке правило визначає спосіб побудови деякої конструкції з елементів вихідної множини, званої комбінаторної конфігурацією.

Метою комбінаторики є вивчення комбінаторних конфігурацій, питання їх існування, алгоритми побудови, рішення задач на перерахування і підрахунок кількості.

Виникнення основних понять і розвиток комбінаторики йшло паралельно з розвитком інших розділів математики, таких як алгебра, теорія чисел, теорія ймовірностей, з якими комбінаторика тісно пов'язана. Деякі факти комбінаторики були відомі ще математикам Стародавнього Сходу.

У XVI столітті комбінаторні завдання стосувалися в основному азартних ігор: скількома способами можна викинути дане число очок, кидаючи дві або три гральні кістки, або скількома способами можна отримати двох королів в даній картковій грі.

Одним з перших зайнявся вивченням питань комбінаторики італійський математик Тарталья. Народження комбінаторики як розділу математики пов'язане з працями французьких вчених Б. Паскаля і П. Ферма. Подальший розвиток комбінаторики пов'язане з іменами Бернуллі, Лейбніца і Ейлера.

У 50-х роках XX століття інтерес до комбінаторики відроджується в зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної техніки і дискретної математики. Комбінаторні методи використовуються для вирішення завдань теорії планування

і теорії інформації, а також для встановлення властивостей і виявлення застосовності використовуваних алгоритмів.

1. Правила суми, добутку

Основне завдання комбінаторики - перерахунок і перерахування елементів в кінцевих множин.

Визначення 1.1. Перерахунок – визначення числа елементів даної кінцевої множини, що володіють тим чи іншим властивістю або групою властивостей**.**

Визначення 1.2. Перелік (перерахування) - це виділення всіх елементів даної кінцевої множини, які володіють тим чи іншим властивістю або групою властивостей.

Визначення 1.3. Нехай X - кінцева множина, що складається з n елементів. тоді:

1) кажуть, що потужність множини X дорівнює n і пишуть $|X| = n$;

2) кажуть, що елемент $x \in X$ може бути обраний n способами;

3) множину X називають n-множиною.

Лема 1.1. Правило суми. Нехай X_1, X_2, ..., X_k – множини, що попарно не перетинаються, тобто $Xi \cap Xj = \emptyset$ при $i \neq j$. тоді,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} X_i \right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i| .$$

Зауваження 1.1. Для k = 2 правило суми формулюється в такий спосіб. Якщо об'єкт x може бути обраний m способами, об'єкт y - n іншими способами, то вибір «або x, або y» може бути виконаний m+n способами.

Приклад 1.1. У салоні побутової техніки при купівлі телевізора пропонується подарунок: або одна з трьох видів соковижималок, або одна з двох видів кавомолок. Скількома способами можна вибрати подарунок?

Рішення. За правилом суми шукане число способів дорівнює 3 + 2 = 5.

Приклад 1.2. У магазині «Все для чаю» як і раніше продається 5 чашок, 3 блюдця та 4 чайні ложки. Скількома способами можна купити два предмети з різними назвами?

Рішення. Можливі три різних випадки: перший купуються чашка з блюдцем, другий - чашка з ложкою, третій - блюдце і ложка. У кожному з цих випадків легко порахувати кількість можливих варіантів (в першому – 15, у другому – 20, в третьому – 12). Складаючи, отримуємо загальне число можливих варіантів: 47.

Лема 1.2. Правило суми для двох об'єктів: Нехай об'єкт a можна вибрати m способами, об'єкт b - n способами, і існує k загальних способів вибору об'єктів a і b, тоді один з об'єктів «a або b» можна вибрати (m + n - k) способами.

Приклад 1.3. Скількома способами з 28 кісток доміно можна вибрати кістку, на якій є «2» або «5»?

Рішення. Вибрати кістку, яка містить «2», можна 7-а способами (число кісток доміно, що містять «2», так само 7), що містить «5» - теж 7-а способами, але серед цих способів є один загальний - це вибір кістки « 2:5 ». Відповідно до правила суми загальне число способів вибору потрібної кістки можна здійснити 7 + 7 - 1 = 13 способами.

Лема 1.3. Правило суми для трьох об'єктів: Якщо об'єкт a можна вибрати n1 способами, об'єкт b - n2 способами, об'єкт c - n3 способами, і відомі n12 загальних способів вибору одного з об'єктів a й b, n13 загальних способів вибору одного з об'єктів a й c, n23 загальних способів вибору одного з об'єктів b і c, а також відомо n123 загальних способів вибору одного з об'єктів a, b і c, то число всіх способів вибору одного з об'єктів «a чи b або c» обчислюється за формулою: n1 + n2 + n3 - n12 - n13 - n23 + n123.

Приклад 1.4. В ході екзаменаційної сесії 12 студентів отримали оцінки «відмінно», 12 - «добре», 13 - «задовільно», 5 - «добре» і «відмінно», 7 - «добре» і «задовільно», 8 - «задовільно» і «відмінно». У трьох студентів всі види оцінок. Скільки студентів в групі, якщо відомо, що всі вони здали сесію? Скільки відмінників в групі? Скільки в групі «чистих» трієчників?

Рішення. В умовах задачі n1 = 12, n2 = 12, n3 = 13, n12 = 5, n23 = 7, n13 = 8, n123 = 3. За формулою знаходимо:

– загальне число студентів в групі: 12+13+12-5-7-8+3=20;

– число відмінників в групі дорівнює n1-(n12+n13)+n123=12-(5+8)+ 3=2;

– число «чистих» трієчників дорівнює n3-(n13+n23)+n123=13- (8+7)+3=1.

Зауваження 1.2. Впорядковані послідовності елементів будемо укладати в дужки виду(), Невпорядковані - в дужки виду {}.

Лема 1.4. Правило добутку. Якщо об'єкт x може бути обраний m способами і після кожного з таких способів об'єкт y може бути обраний способами n, То вибір впорядкованої пари (x, y) може бути виконаний $m \cdot n$ способами.

Приклад 1.5. Скількома способами можна вибрати голосну та приголосну літери з букв слова «студент»?

Рішення. Голосну букву можна вибрати двома способами (в слові «студент» 2 голосні літери «у» і «е»), приголосні можна вибрати п'ятьма способами. За правилом добутку вибір «голосної і приголосної» можна здійснювати $2 \times 5 = 10$ способами.

Приклад 1.6. Скільки існує двозначних парних чисел в десятковій системі числення?

Рішення. Вибираються дві цифри з множини {0,1,2, ..., 8,9}. Перша цифра може бути будь-якою, крім нуля. Тому її можна вибрати дев'ятьма способами. Друга цифра може бути будь - якою з множини {2,4,6,8,0}, її можна вибрати п'ятьма способами. Отже, парних двозначних чисел за правилом добутку буде $n \cdot m = 45$, де $n = 9$, $m = 5$.

Зауваження 1.3. Ми сформулювали правило добутку для послідовності з двох об'єктів. У загальному випадку правило добутку формулюється в такий спосіб.

Якщо об'єкт x_1 може бути n_1 обраний способами, після чого об'єкт x_2 може бути обраний n_2 способами і для кожного i ($2 \le i \le k - 1$) після вибору об'єктів $x_1,x_2,...,x_i$ об'єкт x_{i+1} може бути обраний n_{i+1} способами, то вибір впорядкованої послідовності (x_1, x_2,..., x_k) може бути виконаний n_1, n_2, ..., n_k способами. Узагальнене правило добутку доводиться методом математичної індукції.

Приклад 1.7. У студента є 5 майок, 3 джинсів, 2 пари шкарпеток і 1 пара кросівок. Він визнає будь-яке поєднання цих елементів. Скількома способами він може одягнутися?

Рішення. Майку x_1 студент може вибрати $n_1 = 5$ способами, джинси x_2 — $n_2 = 3$ способами, шкарпетки x_3 — $n_3 = 2$ способами і кросівки x_4 — $n_4 = 1$ способом. Тоді за узагальненим правилом добутку (множення) шукане число способів дорівнює $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30$.

Якщо потрібно виконати одну за іншою одночасно k дій, на одне з яких накладено обмеження, то підрахунок числа можливих комбінацій зручніше починати з виконання саме цієї дії.

Приклад 1.8. У мікроавтобусі 10 місць, одне з яких - місце водія. Скількома способами можуть сісти в автобус 10 осіб, якщо місце водія можуть зайняти лише троє з них.

Рішення. Почнемо з місця водія. Є $n_1 = 3$ способи зайняти його місце. Наступне місце може зайняти будь-який з дев'яти що залишилися чоловіків, тобто $n_2 = 9$ і т. д. За правилом добутку отримуємо всього можливостей $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{10} = 3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 9!$

2. Вибірки. Розміщення

Визначення 2.1. Набір елементів $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}$ з множини $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ називається вибіркою об'єкта r з n елементів або (n, r)-вибіркою.

Визначення 2.1. Вибірка називається впорядкованою (невпорядкованою), якщо порядок проходження елементів в ній визначено (не визначено).

Приклад 2.1. Нехай X = {a, b, c, d}. тоді:

1) (a, c, d)- упорядкована (4,3) - вибірка;

2) {b, a} - невпорядкована (4, 2) - вибірка;

3) (c, d, a)- упорядкована (4,3) - вибірка;

4) {a, b} - невпорядкована (4, 2) - вибірка;

5) (a, a, c)- упорядкована (4,3) - вибірка;

6) {b, c, b} - невпорядкована (4, 3) - вибірка.

Зауваження 2.2. Дві впорядковані (невпорядковані) вибірки, у яких одні й ті ж елементи, але різний порядок проходження, вважаються різними (однаковими). Так, в попередньому прикладі вибірки 2) і 4) - однакові, а вибірки 1) і 3) - різні.

Зауваження 2.3. В вибірках можуть допускатися або не допускатися повторення елементів.

Визначення 2.2. Упорядкована (n, r) - вибірка, в якій елементи можуть повторюватися називається(n, r) - розміщенням з повтореннями.

Визначення 2.3. Упорядкована (n, r) - вибірка, в якій елементи попарно різні, називається (n, r) - розміщенням без повторень або просто (n, r) - розміщення.

Визначення 2.4. Перестановкою n множини X називається (n, n)-розміщення без повторень.

Визначення 2.5. Невпорядкована (n, r) - вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається (n, r) – сполукою (або комбінацією) з повтореннями.

Визначення 2.6. Невпорядкована (n, r) - вибірка, в якій елементи попарно різні, називається (n, r) - сполука (комбінація) без повторень або просто (n, r) - сполука.

Приклад 2.2. *Нехай* X = {*a,* b, c}. тоді:

1) всілякими (3, 2) - розміщеннями з повтореннями є
(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c);

2) всілякими (3, 2) - розміщеннями без повторень є
(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b);

3) всілякими перестановками множини X є
(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a);

4) всілякими (3, 2) – сполуками з повтореннями є
{a, a}, {a, b},{a, c}, {b, b}, {b, c}, {c, c};

5) всілякими (3, 2) - сполуками без повторень є
{a, b}, {a, c}, {b, c}.

Введемо наступні позначення:

$\overline{A}_n^r$ - число всіх (n, r) - розміщень з повтореннями;

A_n^r - число всіх (n, r) - розміщень без повторень;

P_n - число всіх перестановок;

$\overline{C}_n^r$ - число всіх (n, r) - сполучень з повтореннями;

C_n^r - число всіх (n, r) - сполучень без повторень.

3. Розміщення з повтореннями

Розміщеннями з повтореннями з n елементів по r називаються впорядковані r- вибірки з n елементів з повтореннями. Їх число позначається $\overline{A}_n^r$ і обчислюється за формулою $\overline{A}_n^r = n^k$.

Приклад 3.1. Для того щоб відкрити камеру зберігання, використовується комбінація з 4 цифр (від 0 до 9), набирається на 4 коліщатках. Скільки різних комбінацій існує?

Рішення. З умови задачі випливає, що необхідно скласти всілякі комбінації по 4 елементи з даних 10. За формулою розміщень з повторенням отримуємо: $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$ варіантів.

Приклад 3.2. Державний реєстраційний номер легкового автомобіля в країні складається з чотиризначного числа, двох букв і номера області. Скільки різних автомобільних номерів може видати ДАІ в області з номером 1.

Рішення. У попередньому прикладі ми встановили, що чотиризначних чисел є 10000. В держномері використовуються 9999 чисел (число 0000 не використовується). Букви використовуються наступні A, B, C, E, H, I, K, M, O, P, T. Оскільки повторення букв допускається, то двобуквених комбінацій буде $11^2 = 121$. Нарешті, область має номер 1. Отже, за узагальненим правилом добутку отримуємо, що в області ДАІ може видати $9999 \cdot 121 \cdot 1 = 1209879$ держномерів.

4. Розміщення без повторень

Розміщеннями без повторень з n елементів по r називаються впорядковані r - вибірки з n елементів без повторень. Їх число позначається A_n^r і обчислюється за формулою:

$$A_n^r = n\cdot(n - 1)\cdot\ldots\cdot(n - r + 1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \qquad (1)$$

Приклад 4.1. Як зміниться рішення задачі про камері схову, якщо відомо, що цифри, які набираються на коліщатках, різні.

Рішення. Варіантів вибору першої цифри 10 (від 0 до 9). Так як повторення бути не може, то варіантів вибору другої цифри всього 9. Аналогічно для вибору третьої цифри залишається 8 варіантів, для вибору четвертої - 7. За правилом добутку (множення) отримуємо, що всього комбінацій, в яких всі числа різні, 10·9·8·7 = 5 040.

Дане завдання відноситься до класу задач про розміщення без повторень.

Приклад 4.2. В аудиторії, де проходить іспит, є 10 столів. Іспит здає 6 студентів. Скількома способами можна розсадити студентів, за умови, що один стіл виділено екзаменатору, а за кожним з інших столів може сидіти не більше одного студента.

Рішення. Оскільки один стіл виділено екзаменаторові, то для студентів залишається 9 столів. Кожна розсадження студентів за столами є, по суті, впорядкованої послідовністю без повторень. Тому за формулою (1) отримуємо, що шукане число способів дорівнює

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{9!}{(9-6)!} = 4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 = 60480$$

5. Перестановки

Перестановками множини без повторень називаються розміщення без повторень з n елементів по n елементів. Число перестановок n елементів обчислюється за формулою

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \qquad (2)$$

Приклад 5.1. На іспит першими заходять 6 студентів. Скільки є варіантів черговості заходу цих студентів?

Рішення. Тут ми маємо справу з перестановками множини, що складається з 6 студентів. Тому за формулою (2) отримуємо, що є 6! = 1·2·3·4·5·6 = 720 варіантів черговості заходу 6 студентів на іспит.

Визначення 5.1. Перестановкою з повтореннями n - множини називається всяка упорядкована послідовність, в якій перший елемент n - множини зустрічається k_1 раз, другий - k_2 раз, і т.д., n-ний елемент вихідної множини – k_n раз.

Зауваження 5.1. Число перестановок з повтореннями з визначення 5.1 позначається через $P_{(}k_1, k_2, ..., k_n)$ і обчислюється за формулою.

$$P_{(k_1, k_2, ..., k_n)} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1! k_2! ... k_n!} \quad (3)$$

Приклад 5.1. Знайдемо кількість різних перестановок букв слова комбінаторика. Це слово містить 2 букви К, 2 букви О, 1 букву М, 1 букву Б, 1 букви І, 1 букву Н, 2 букви А, 1 букву Т і 1 букву Р, 1 букву И. Таким чином, число різних слів, одержуваних перестановкою букв слова комбінаторика, так само

$P_{(2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)} = 13! / (2! \cdot 2! \cdot 2!) = 13!/8.$

Приклад 5.1. Скількома способами можна розподілити 15 студентів з трьох навчальних груп по п'ять студентів у кожній?

Рішення. У нас є 15 об'єктів, які потрібно організувати в три групи по п'ять. Це можна зробити $P_{(5, 5, 5)} = 15! / (5! \cdot 5! \cdot 5!) = 68796$ різними засобами.

6. Сполуки

Сполуки без повторень це коли з n - елементної множини просто вибирається його m - елементна підмножина без упорядкування.

Кількість сполук з n елементів по r позначають C_n^r.

Формула для обчислення числа сполук виходить з формули для обчислення кількості розміщень. Складемо спочатку всі r - поєднання з n елементів, а потім переставимо елементи що входять в кожне поєднання усіма можливими засобами. При цьому вийдуть всі r - розміщення з n елементів, причому кожне тільки по одному разу. Елементи кожного r - сполучення можна переставити r! способами, а число цих сполук дорівнює C_n^r. Значить, справедлива формула $r! \cdot C_n^r = A_n^r$ отримуємо

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} \tag{4}$$

Приклад 6.1. У скількох випадках в грі в «Спортлото» (5 з 36) будуть правильно обрані:

а) рівно 3 номери;

б) рівно 4 номера;

в) рівно 5 номерів;

г) не менше 3 номерів.

Рішення. Тут ми маємо справу з неврегульованими виборами без повторень, тобто з поєднаннями без повторень.

а) 3 номери з 5 «правильних» можна вибрати C_5^3 способами, а решту 2 «неправильних» -C_{31}^2. Далі за правилом добутку отримуємо

$$C_5^3 \cdot C_{31}^2 = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}\cdot\frac{31!}{(31-2)!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5\cdot 30\cdot 31}{2!\cdot 2!} = 10\cdot 465 = 4650$$

б) $C_5^4 \cdot C_{31}^1 = \frac{5!}{(5-4)!\cdot 4!}\cdot\frac{31!}{(31-1)!\cdot 1!} = 5\cdot 31 = 155$

в) $C_5^5 \cdot C_{31}^0 = \frac{5!}{(5-5)!\cdot 5!}\cdot\frac{31!}{(31-0)!\cdot 0!} = 1$

г) 4650 + 155 + 1 = 4806.

Відзначимо деякі властивості величини C_n^r

Властивість 1. $C_n^0 = 1$

Властивість 2. $C_n^n = 1$

Властивість 3. Властивість симетричності $C_n^r = C_n^{n-r}$

Властивість 4. $P_{(r,\ n-r)} = C_n^r$

Властивість 5. Основна властивість$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$

Властивість 6. $C_n^r = C_n^{n-r}$

7. Сполуки з повтореннями

Поєднаннями з повтореннями з n елементів по r називають всілякі комбінації, складені з елементів n видів по r елементів в кожній. Комбінації вважаються

різними, якщо вони відрізняються складом, але не порядком що входять до них елементів. В комбінацію можуть входити елементи одного виду.

Кількість сполук з повтореннями з n елементів по r позначають $\overline{C}_n^r$. Загальне правило обчислення кількості поєднань з повтореннями:

$$\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r \tag{5}$$

Приклад 7.1. Скількома способами можна купити букет з 9 троянд, якщо у продажу є троянди трьох кольорів: білі, рожеві і червоні?

Рішення. $\overline{C}_n^r = C_{3+9-1}^9 = C_{11}^9 = \frac{11!}{9!\cdot 2!} = 55$

Приклад 7.2. На вечерю, на десерт пропонуються фрукти трьох видів: яблука, груші і апельсини. При цьому можна взяти рівно два фрукта. Скільки варіантів вибору десерту є?

Рішення. Оскільки порядок вибору ролі не грає, то мова йде про поєднання. Крім того, за умовою прикладу не забороняється брати два фрукта одного виду. Тому повторення допускаються і ми можемо застосувати формулу:

$$\overline{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{(4-1)!\cdot 2!} = 6$$

Контрольні питання

1. Які проблеми вивчає комбінаторика?

2. Сформулювати основні правила комбінаторики: правила суми та добутку.

3. Дати визначення основним комбінаторним з'єднанням: перестановці, розміщенню, сполученню.

4. Вивести формули обчислення кількості перестановок, розміщень та сполучень без повторення елементів.

5. Як потрібно перетворити формули, що характеризують основні комбінаторні з'єднання, щоб отримати число перестановокк, розміщень та сполучень із повтореннями?

Завдання

1. Протягом 10 тижнів студенти складають 10 іспитів, в тому числі 2 - із математики. Скількома способами можна розподілити іспити по тижнях так, щоб іспити із математики не слідкували один за іншим?

2. На залізничній станції є n семафорів. Скільки може бути дано різних сигналів, якщо кожен семафор має три різні стани: червоний, жовтий та зелений?

3. З 12 кандидатів тренер вибирає п'ятьох і складає з них баскетбольну команду. Два кандидати можуть грати центровими, четверо - тільки в захисті, а інші - тільки в нападі. У команді має бути один центровий, два захисника і два - в нападі. Скількома способами тренер може скласти команду?

4. Довести, що число трибуквених слів, які можна утворити з букв, що складають слово "гіпотенуза", дорівнює кількості всіх можливих перестановок букв, що складають слово "призма".

5. Скількома способами можна одягти п'ять різних кілець на пальці однієї руки, окрім великого пальця?

6. У пасажирському потягу дев'ять вагонів. Скількома способами можна розсадити у потягу чотири особи за умови, що всі вони поїдуть:

- в різних вагонах;
- у п'ятому вагоні;
- в одному вагоні?

7. Скільки існує п'ятизначних чисел? Скільки серед них таких, які починаються цифрою 4? Які не містять цифри 5? Які поділяються на 5?

8. Скільки різних трибуквених слів можна скласти, використовуючи букви, що складають Ваше прізвище, причому, ці слова повинні починатися і закінчуватися приголосними, а в середині повинна стояти голосна буква?

9. Скількома способами можна розподілити між двома продавцями 300 примірників однієї книги, 200 примірників іншої і 100 примірників третьої, якщо ніякий продавець не може отримати всіх книг?

10. Вісім чоловік повинні розташуватися в двох кімнатах, причому, у кожній повинно бути принаймні 3 людини. Скількома способами вони можуть це зробити?

11. Скількома способами з 5 подружніх пар можна відібрати чотирьох чоловік, якщо

- до числа відібраних повинні входити двоє чоловіків і дві жінки;

- ніяка подружня пара не повинна входити в це число.

12. У залізничному вагоні десять місць розташовані по ходу потягу і десять місць - проти. Скількома способами можна посадити у вагон вісім пасажирів, якщо двоє відмовляються сидіти обличчям по ходу потягу, а троє - обличчям проти ходу?

13. Десять крісел поставлено в ряд. Скількома способами на них можуть сісти дві людини? Скількома способами ці дві людини можуть сісти поруч? Скількома способами вони можуть сісти в ряд так, щоб поміж ними було принаймні одне крісло?

14. З групи в 20 солдатів щоночі виділяється наряд, що складається з трьох чоловіків. Скільки ночей поспіль командир може виділяти наряд, який не збігається з жодним із попередніх? Скільки разів при цьому в наряд ввійде якийсь певний солдат?

15. Скільки слів можна утворити з літер слова "фрагмент", якщо слова повинні складатися з восьми букв; із семи букв; з трьох букв?

16. Колода містить 52 карти. Скількома способами можна здати одному гравцю п'ять пік; чотири черви; дві трефи і дві піки?

17. Скількома способами можна розставити в книжковій шафі, що складається з 5 полиць, 20 книжок, якщо кожна полка може вмістити всі 20 книжок?

18. Скільки різних перестановок можна отримати, якщо брати по 5 карт з колоди, що містить 52 карти (порядок карт слід враховувати)?

19. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складаються всілякі числа, кожне з яких містить не менше трьох цифр. Скільки таких чисел можна скласти, якщо повторення цифр у числах заборонені?

20. Скільки чисел, які укладаються між 1000 і 9999, містять цифру 3?

21. В автомашині сім місць. Скількома способами семеро людей можуть сісти у цю машину, якщо зайняти місце водія можуть тільки троє з них?

22. Пасажирський потяг складається з двох багажних вагонів, чотирьох плацкартних і трьох купованих. Скількома способами можна сформувати склад потягу, якщо багажні вагони повинні знаходитися на початку, а куповані - в кінці? Якщо вагони можуть слідкувати в будь- якому порядку?

23. З групи, що складається із 7 чоловіків і 4-х жінок треба вибрати шестеро людей так, щоб серед них було не менше двох жінок. Скількома способами це можна зробити?

24. Скількома способами можна розставити на полиці сім книг, якщо дві певні книги повинні завжди стояти поруч; ці дві книги не повинні стояти поруч?

25. Автомобільні номери складаються з однієї, двох чи трьох літер і чотирьох цифр. Знайти число таких номерів, якщо використовуються всі букви українського алфавіту?

26. Номер автомобіля складається з однієї, двох чи трьох букв, за якими слідкує тризначне число. Скільки існує різних автомобільних номерів?

27. З колоди, що містить 52 карти, вийняли 10 карт. У скількох випадках серед цих карт виявиться хоча б один туз? У скількох випадках рівно один туз? Не менш двох тузів? Рівно два туза?

28. Палітурник повинен переплести 12 різних книжок у червоний, зелений та синій кольори. Скількома способами він може це зробити, коли в кожен колір має бути переплетена хоча б одна книжка?

29. Виходячи із вагону, хтось виявив у себе в кишені нікель, дайм, квот ер і пів долара. Скількома способами він може дати на чай носію?

30. Хтось має 8 пар різних рукавичок. Скількома способами він може відібрати одну праву і одну ліву рукавичку так, щоб вони належали до однієї пари? Чи не належали до однієї пари?

31. Скільки різних сигналів можна скласти, маючи чотири прапори різних кольорів, якщо кожен сигнал повинен складатися не менше, ніж з двох прапорів?

32. Скількома способами можна здати 52 карти чотирьом гравцям так, щоб кожен отримав по три карти трьох мастей і чотири карти четвертої масті?

33. 30 чоловік голосують за 5 пропозиціями. Скількома способами можуть розподілитися голоси, якщо кожен голосує за одну пропозицію, і враховується лише кількість голосів, поданих за кожну пропозицію?

34. Скількома способами можна розподілити 15 різних предметів поміж трьома особами A, B і C, якщо A має отримати 2 предмета, B - 3 предмети і C - 10?

35. У групі 9 людей. Скільки можна утворити різних підгруп за умови, що в підгрупу входить не менше двох людей?

36. У філателіста є 8 різних канадських і 10 різних американських марок. Скількома способами він може відібрати 3 канадські і 3 американські марки і наклеїти їх в альбом на 6 перенумерованих місць?

37. Музичний концерт складається з трьох пісень і двох скрипкових п'єс. Скількома способами можна скласти програму концерту так, щоб він починався і закінчувався виконанням пісні і, щоб скрипкові п'єси не виконувалися одна за одною?

38. Скількома способами можна скласти 6 слів із 20 букв, якщо в сукупності цих слів кожна буква використовується тільки один раз?

39. Скількома способами можна вийняти 4 карти з повної колоди карт так, щоб було три масті? Так, щоб було дві масті?

40. Скількома способами можна роздати колоду в 52 карти 13 гравцям по 4 карти кожному гравцеві?

41. Таке ж завдання з умовою, що кожен має по одній картці кожної масті?

42. Таке ж завдання за умови, що один гравець має карти всіх чотирьох мастей, а всі інші карти однієї і тієї ж масті?

43. Три дороги з'єднують міста A і B та чотири дороги з'єднують міста B і C. Скількома способами можна зробити поїздку з A в C через B і повернутися в A також через B?

44. Один чоловік має 7 книжок з математики, а другий - 9 книжок. Скількома способами вони можуть обміняти книжку одного на книжку іншого?

45. Скількома способами можна скласти трикольоровий смугастий прапор, якщо є матеріал п'яти різних кольорів? Таке ж завдання, якщо одна зі смуг повинна бути червоною?

46. Скількома способами можна вибрати три різні фарби з наявних п'яти?

47. Скільки словників треба видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади із будь-якої з п'яти мов: російської, англійської, німецької, французької та італійської на будь-яку іншу із цих п'яти мов?

48. Скільки словників треба видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади з десяти мов на будь-яку іншу із цих десяти мов?

49. У англійців прийнято давати дітям кілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо загальна кількість імен - 300, а кожній дитині дають не більше 3 імен? (Назвати можна одним, двома або трьома іменами).

50. У профком обрано 9 чоловік. З них треба вибрати голову, культорга і секретаря профкому. Скількома способами це можна зробити?

51. У батька є 5 різних фруктів, які він видає своїм восьми синам так, що кожен отримує або один плід, або нічого. Скількома способами це можна зробити?

52. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна купити 12 листівок (порядок не важливий)?

53. Компанія складається із семи юнаків та десяти дівчат. Якщо в якомусь танці беруть участь всі юнаки, то скільки є варіантів участі дівчат у цьому танці?

54. У кошику лежать 12 яблук та 10 апельсинів. Один із братів вибирає яблуко або апельсин, після чого другий брат бере і яблуко, і апельсин. У якому випадку другий брат має більш велику свободу вибору: якщо перший брат взяв яблуко або якщо він узяв апельсин (апельсини та яблука різні)?

55. Скількома способами можна вибрати з повної колоди карт по одній карті кожної масті за умови, що серед вийнятих карт немає жодної пари однакових, тобто двох королів, двох десяток і т. д.?

56. Скількома способами можна вибрати з повної колоди карт по одній карті кожної масті так, щоб карти червоних мастей і чорних мастей утворювали пари (наприклад, дев'ятки пік і треф та валети бубновий і чирвовий)?

57. Зі складу конференції, на якій присутні 52 людини, треба обрати делегацію, що складається з 5 чоловік. Скількома способами це можна зробити?

58. У мами 2 яблука і 3 груші. Кожен день протягом п'яти днів поспіль вона видає синові по одному фрукту. Скількома способами це може бути зроблено?

59. Спортивний клуб нараховує 30 членів. Скількома способами можна скласти команду для участі в естафеті 100 +200 +400 +800?

60. На шкільному вечорі присутні 12 юнаків та 15 дівчат. Скількома способами можна скласти з них 4 пари для танцю?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3

Генератори перестановок

Мета роботи: Вивчення алгоритмів генерування основних комбінаторних з'єднань.

Теоретичні відомості

Перестановки

Перестановками множини без повторень називаються розміщення без повторень з n елементів по n елементів. Число перестановок n елементів обчислюється за формулою

$$P_n = \mathrm{A}_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \qquad (1)$$

Приклад 1. На іспит першими заходять 6 студентів. Скільки є варіантів черговості заходу цих студентів?

Рішення. Тут ми маємо справу з перестановками множини, що складається з 6 студентів. Тому за формулою (1) отримуємо, що є 6! = 1·2·3·4·5·6 = 720 варіантів черговості заходу 6 студентів на іспит.

Приклад 2. Скількома способами можна пошикувати в одну шеренгу гравців двох футбольних команд (по 11 чоловік) так, щоб при цьому два футболісти однієї команди не стояли поруч?

Рішення. Футболістів однієї команди розставимо P_{11} способами. Між ними розставимо футболістів другої команди P_{11} способами. При цьому першим стоятиме футболіст першої команди. Потім виконаємо ті самі перестановки, але з урахуванням того, що першим тепер стоятиме футболіст другої команди. Тоді маємо $11! \cdot 11! + 11! \cdot 11! = 2 \cdot (11!)^2$.

Відповідь: $2 \cdot (11!)^2$.

Приклад 3. Скільки способів розбити 6 чоловіків і 6 жінок на пари для танців?

Рішення. Вибудуємо чоловіків в одну лінію в довільному порядку. Нехай кожна жінка вибирає собі пару. Тоді кількість способів розбиття на пари дорівнює кількості способів переставити 6 різних предметів, тобто дорівнює 6 !.

Приклад 4. Сім дівчат водять хоровод. Скількома різними способами вони можуть стати в коло?

Рішення. Якби дівчата стояли на місці, то вийшло б 7! способів. Так як танцюючі кружляють, то їх положення щодо навколишніх предметів не суттєво, а важливо лише взаємне розташування. Тому перестановки, що переходять один в одного при обертанні танцівниць, необхідно вважати однаковими. З кожної перестановки можна отримати ще шість нових шляхом обертання. Значить, число 7! необхідно розділити на 7. Отримуємо 7!: 7 = 6! = 720 різних перестановок дівчат в хороводі.

Нагадуємо що перестановка - це комбінація елементів з N різних елементів взятих в певному порядку. В перестановці важливий порядок проходження елементів, і в перестановці повинні бути задіяні всі N елементів.

Завдання: Знайти всі можливі перестановки для послідовності чисел 1, 2, 3. Існують наступні перестановки:

1: 1 2 3

2: 1 3 2

3: 2 1 3

4: 2 3 1

5: 3 1 2

6: 3 2 1

Визначення 1. Перестановкою з повтореннями n-множини називається всяка упорядкована послідовність, в якій перший елемент n - множини зустрічається k_1 раз, другий - k_2 раз, і т.д., n-ий елемент вихідної множини - k_n раз.

Зауваження 1. Число перестановок з повтореннями з визначення 1 позначимо через $P_(k_1, k_2, ..., k_n)$ і обчислюється за формулою.

$$P_{(k_1,k_2,k_n)} = \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \quad (2)$$

Приклад 5. Знайдемо кількість різних перестановок букв слова телефон.

Рішення. Це слово містить 1 букви Т, 2 букви Е, 1 букву Л, 1 букву Ф, 1 букви О, 1 букву Н. Таким чином, число різних слів, одержуваних перестановкою букв слова телефон, так само $P_{(1, 2, 1, 1, 1, 1)} = 7! / (2!) = 2520$.

Приклад 6. Скількома способами можна розподілити 15 студентів з трьох навчальних груп по п'ять студентів у кожній?

Рішення. У нас є 15 об'єктів, які потрібно організувати в три групи по п'ять. Це можна зробити $P_{(5, 5, 5)} = 15! / (5!\ 5!\ 5!) = 68796$ різними способами.

Приклад 7. П’ятицифровий телефонний номер складається із двох трійок і трьох четвірок, але в якому порядку вони стоять, хлопчик забув. Скільки йому потрібно зробити спроб, щоб напевно додзвонитися своєму другові?

Рішення. $P_{(2, 3, 5)} = 5! / (2!\ 3!) = 10$ (спроб)

Перестановка n-елементної множини X - це взаємно однозначна функція f:X→X. Якщо для простоти прийняти X = {1, ..., n}, то перестановкою можна назвати упорядкований набір з n різних чисел, що лежать в проміжку від 1 до n (далі буде розглядатися саме цей випадок).

Позначимо множину всіх перестановок множин X через S_n. Зрозуміло, що $|S_n| = n!$, так як на перше місце набору можна поставити будь-яке число з n

можливих, на друге - будь-яке з n-1 останніх і т.д. до останньої позиції, в яку ми поміщаємо останній що залишився елемент: в результаті ми отримаємо добуток, який і буде факторіалом n.

Приклад 8. У слові СИЛА міняють місцями літери. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?

Рішення. Всі букви в слові різні, отже, число всіх можливих перестановок в цьому слові одно $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Приклад 9. У слові СЕНС міняють місцями літери. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?

Рішення. Дві букви в слові збігаються, отже, число всіх різних перестановок в 2! менше можливих, тобто одно $P_4 = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) / (2!) = 12$.

Приклад 10. У слові СИЛА СЕНС міняють місцями літери і пробіл. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?

Рішення. Три літери в слові збігаються, отже, число всіх різних перестановок в 3! менше можливих, тобто дорівнює $P_9 = (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) / (3!) = 60480$.

Генерування всіх перестановок заданої множини

Нагадаємо, що перестановкою n-елементної множини X називається упорядкований набір довжини n, складений з попарно різних елементів множини X. Опишемо деякі методи генерування послідовності всіх n! перестановок n-елементної множини. Не порушуючи спільності будемо розглядати не вихідну множину X, а множину A = {1,2, ... n} - множину індексів елементів, тому що між множиною елементів з X і множиною індексів з A існує взаємно однозначна відповідність, яка задається в вигляді: $x_i \leftrightarrow i$.

Будемо припускати, що елементи множини запам'ятовуються у вигляді елементів масиву P[1], ..., P[n]. У всіх методах елементарної операцією, яка застосовується до масиву P, є по елементна транспозиція, тобто обмін значеннями змінних P[i] і P[j], Де $1 \le i, j \le n$. Цю операцію будемо позначати P[i] : =: P[j]. Очевидно, що вона еквівалентна послідовності команд: a: = P[i] ; P[i] : = P[j]; P[j] : = a, де a – деяка допоміжна змінна.

Генерування всіх перестановок заданої множини в лексикографічному порядку

Даний метод найлегше зрозуміти, якщо в якості елементів що переставляються взяти числа 1, ..., n. На множини всіх перестановок визначимо лексикографічний порядок:

$<x_1, x_2, ... x_n> < <y_1, y_2, ..., y_n> \Leftrightarrow$ існує $k \geq 1$, таке що $xk < yk$ і $xp = yp$ для кожного $p < k$.

Зауважимо, що якщо замість чисел 1,2,..., n взяти букви а, б,..., р з природним порядком а<б<в<...<р, То лексикографічний порядок визначає стандартну послідовність, в якій слова довжини n з'являються в словнику.

Для прикладу наведемо перестановки множини X = {1,2,3} в лексикографічному порядку:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

Починаючи з перестановки (1,2, ..., n), перехід від поточної перестановки $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ до перестановки, наступного за поточною в сенсі лексикографічного порядку, здійснюється послідовним виконанням наступних дій:

1) перегляд P справа наліво в пошуках самої правої позиції k, в якій $p_k < p_{k+1}$ (якщо такої позиції k немає, то поточна перестановка є останньою і слід закінчити генерацію);

2) перегляд P від p_k зліва направо в пошуках найменшого з таких елементів p_m, що $k < m$ і $p_k < p_m$; транспозиція елементів p_k і p_m і звернення відрізка $p_{k+1}, ..., p_n$ шляхом транспозиції симетрично розташованих елементів (зауважимо, що елементи відрізка що звертається розташовані в порядку убування).

Наприклад, для n = 8 і P = (2,6,5,8,7,4,3,1) маємо $p_k = 5$ і $p_m = 7$, результат транспозиції p_k і p_m - (2,6,7,8, 5,4,3,1), результат звернення відрізка $p_{k+1}, ..., p_n$ переводить P в перестановку (2,6,7,1,3,4,5,8), яка слідує за P в лексикографічному порядку.

Рекурсивний алгоритм генерування всіх перестановок заданої множини в лексикографічному порядку

Розглянемо рекурсивний алгоритм генерування перестановок в лексикографічному порядку. Зауважимо, що послідовність перестановок множини {1,2, ..., n} в цьому випадку має такі властивості, що витікають безпосередньо з визначення:

1) в першій перестановці елементи йдуть в зростаючій послідовності, а в останній - в порядку спадання; іншими словами остання перестановка є зверненням першої,

2) послідовність всіх перестановок можна розділити на n блоків довжини (n-1)!, відповідних зростаючим значенням елемента в першій позиції. Останні n-1 позицій блоку, що містить елемент p в першій позиції, визначають послідовність перестановок множини {1,2, ..., n}\{p} в лексикографічному порядку.

Як приклад розглянемо генерування всіх перестановок для n = 4. Таких перестановок буде 4! = 24. Ці перестановки можна розбити на чотири блоки, кожен з яких містить 3! = 6 перестановок, за значенням елемента в першій позиції. У першому блоці на першому місці стоїть 1, у другому - 2, в третьому - 3, в четвертому - 4. Далі розглянемо блок з 1 на першому місці, для інших аналогічно. Для генерації всіх перестановок залишилася множина X = {2,3,4}, виконаємо наступне: розіб'ємо всі перестановки на 3 блоки по 2! = 2 перестановки, відповідних зростаючим значенням елемента в першій позиції, в першому блоці - 2, у другому - 3, в третьому - 4. Далі в кожному блоці генеруємо всі перестановки з решти двох елементів в лексикографічному порядку (в першій з перестановок останні два елементи розташовані в порядку зростання).

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2

2	1	3	4
2	1	4	3
2	3	1	4
2	3	4	1
2	4	1	3
2	4	3	1

3	1	2	4
3	1	4	2
3	2	1	4
3	2	4	1
3	4	1	2
3	4	2	1

4	1	2	3
4	1	3	2
4	2	1	3
4	2	3	1
4	3	1	2
4	3	2	1

Генерування всіх перестановок заданої множини в анті лексикографічному порядку

Анті лексикографічний порядок (позначимо <′) визначається наступним чином:

<x1, x2, ... xn> <′ <y1, y2, ..., y n> ⇔ існує таке k≤n, що xk> yk і xp= yp для кожного p > k ..

Для прикладу наведемо перестановки множини X = {1,2,3} в анті лексикографічному порядку: 123, 213, 132, 312, 231, 321.

Алгоритм генерування перестановок в анті лексикографічному порядку сформулювати зручніше. Зауважимо, що послідовність перестановок множини {1,2, ..., n} в цьому випадку має такі властивості, що випливають безпосередньо з визначення:

1) в першій перестановці елементи йдуть в зростаючій послідовності, в останній - в порядку спадання; іншими словами, остання перестановка - звернення першої,

2) послідовність всіх перестановок можна розділити на n блоків довжини (n-1)!, відповідних убуваючим значенням елемента в останній позиції. Перші n-1 позицій блоку, що містить елемент p в останній позиції, визначають послідовність перестановок множини {1,2, ..., n} \ {p} в анті лексикографічному порядку.

Згенеруємо в анті лексикографічному порядку всі перестановки для n = 4, отримаємо

1	2	3	4
2	1	3	4
1	3	2	4
3	1	2	4
2	3	1	4
3	2	1	4

1	2	4	3
2	1	4	3
1	4	2	3
4	1	2	3
2	4	1	3
4	2	1	3

1	3	4	2
3	1	4	2
1	4	3	2
4	1	3	2
3	4	1	2
4	3	1	2

2	3	4	1
3	2	4	1
4	2	3	1
2	4	3	1
3	4	2	1
4	3	2	1

Перестановки без повторень

Кількість перестановок для N різних елементів складає N !. дійсно:

- на перше місце може бути поміщений будь - який з N елементів (всього варіантів N),

- на другу позицію може бути поміщений будь - який з решти (N-1) елементів (разом варіантів N · (N-1)),
- якщо продовжити цю послідовність для всіх N місць, то отримаємо: N · (N-1) · (N-2) · ... · 1, тобто всього N! перестановок.

Розглянемо задачу отримання всіх перестановок чисел 1 ... N (тобто послідовності довжини N), де кожне з чисел входить рівно по 1 разу. Існує безліч варіантів порядку отримання перестановок. Однак найбільш часто вирішується завдання створення перестановок в лексикографічному порядку (див. приклад вище). При цьому всі перестановки сортуються спочатку по першому числу, потім по другому і т.д. в порядку збільшення. Таким чином, першою буде перестановка 1 2 ... N, а останньою - N N-1 ... 1.

Розглянемо алгоритм вирішення задачі. Дана вихідна послідовність чисел. Для отримання кожної наступної перестановки необхідно виконати наступні кроки:

- Необхідно переглянути поточну перестановку справа наліво і при цьому стежити за тим, щоб кожен наступний елемент перестановки (елемент з великим номером) був не більше ніж попередній (елемент з меншим номером). Як тільки дане співвідношення буде порушено необхідно зупинитися і відзначити поточне число (позиція 1).
- Знову переглянути пройдений шлях справа наліво поки не дійдемо до першого числа, яке більше ніж зазначене на попередньому кроці.
- Поміняти місцями два отриманих елемента.
- Тепер в частині масиву, яка розміщена праворуч від позиції 1 треба впорядкувати всі числа в порядку зростання. Оскільки до цього вони всі були вже записані в порядку убування необхідно цю частину підпослідовність просто перевернути.

Таким чином ми отримаємо нову послідовність, яка буде розглядатися в якості вихідної на наступному кроці.

Реалізація на C ++

```
1   #include <iostream>
2   using namespace std;
3   void swap (int * a, int i, int j)
4   {
5   int s = a [i];
6   a [i] = a [j];
7   a [j] = s;
8   }
9   bool NextSet (int * a, int n)
10  {
11  int j = n - 2;
12  while (j! = -1 && a [j]> = a [j + 1]) j--;
13  if (j == -1)
14  return false; // більше перестановок немає
15  int k = n - 1;
16  while (a [j]> = a [k]) k--;
17  swap (a, j, k);
18  int l = j + 1, r = n - 1; // сортуємо решту послідовності
19  while (l <r)
20  swap (a, l ++, r--);
21  return true;
22  }
23  void Print (int * a, int n) // вивід перестановки
24  {
25  static int num = 1; // номер перестановки
26  cout.width (3); // ширина поля виведення номера перестановки
27  cout << num ++ << ":";
28  for (int i = 0; i <n; i ++)
29  cout << a [i] << "";
```

```
30  cout << endl;
31  }
32  int main ()
33  {
34  int n, * a;
35  cout << "N =";
36  cin >> n;
37  a = new int [n];
38  for (int i = 0; i <n; i ++)
39  a [i] = i + 1;
40  Print (a, n);
41  while (NextSet (a, n))
42  Print (a, n);
43  cin.get (); cin.get ();
44  return 0;
45  }
```

результат виконання

```
1:  1 2 3 4
2:  1 2 4 3
3:  1 3 2 4
4:  1 3 4 2
5:  1 4 2 3
6:  1 4 3 2
7:  2 1 3 4
8:  2 1 4 3
9:  2 3 1 4
10:  2 3 4 1
11:  2 4 1 3
12:  2 4 3 1
13:  3 1 2 4
```

14: 3 1 4 2

15: 3 2 1 4

16: 3 2 4 1

17: 3 4 1 2

18: 3 4 2 1

19: 4 1 2 3

20: 4 1 3 2

21: 4 2 1 3

22: 4 2 3 1

23: 4 3 1 2

24: 4 3 2 1

Перестановки з повтореннями

На особливу увагу заслуговує завдання генерації перестановок N елементів в разі якщо елементи послідовності можуть повторюватися. Припустимо, вихідна послідовність складається з елементів n_1, n_2 ... n_k, де елемент n_1 повторюється r_1 раз, n_2 повторюється r_2 раз і т.д. При цьому $n_1 + n_2 + ... + n_k = N$. Якщо ми будемо вважати всі $n_1 + n_2 + ... + n_k$ елементів перестановки з повтореннями різними, то всього різних варіантів перестановок $(n_1 + n_2 + ... + n_k)!$. Однак серед цих перестановок не всі різні. Справді, всі r_1 елементів n_1 ми можемо переставляти місцями один з одним, і від цього перестановка не зміниться. Точно так же, можемо переставляти елементи n_2, n_3 і т. д. В результаті маємо $r_1!$ варіантів запису однієї і тієї ж перестановки з різним розташуванням елементів n1 які повторюються. Таким чином, будь-яка перестановка може бути записана $r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!$ способами. Отже, число різних перестановок з повтореннями дорівнює

$$P_{(r1,r2,...rn)} = \frac{(n1+n2+\cdots+nk)!}{r1!r2!...rn!} \quad (3)$$

Для генерації перестановок з повтореннями можна використовувати алгоритм генерації перестановок без повторень, наведений вище.

Розглянемо, як зміниться кількість перестановок, якщо деякі з предметів що переставляються однакові.

Завдання. Скільки слів можна отримати, переставляючи літери слова «фавн»? Скільки слів можна отримати, якщо переставляти букви слова «мама»?

Рішення. Переставляючи літери слова «фавн» отримаємо 24 різні перестановки, так як всі елементи які переставляються різні.

Якщо ж деякі предмети які переставляються однакові, то виходить менше перестановок - деякі перестановки збігаються один з одним.

При перестановці букв слова «мама» маємо дві пари однакових букв мм і аа. Зробимо їх різними, дописавши до однакових буквах різні індекси: $м_1а_1м_2а_2$. Розглянемо всі можливі перестановки:

$м_1а_1м_2а_2$	$м_1м_2а_1а_2$	$а_1а_2м_1м_2$	$м_1а_1а_2м_2$	$а_1м_1м_2а_2$	$а_1м_1а_2м_2$
$м_2а_1м_1а_2$	$м_2м_1а_1а_2$	$а_2а_1м_1м_2$	$м_2а_1а_2м_1$	$а_1м_2м_1а_2$	$а_1м_2а_2м_1$
$м_1а_2м_2а_1$	$м_1м_2а_2а_1$	$а_1а_2м_2м_1$	$м_1а_2а_1м_2$	$а_2м_1м_2а_1$	$а_2м_1а_1м_2$
$м_2а_2м_1а_1$	$м_2м_1а_1а_1$	$а_2а_1м_2м_1$	$м_2а_2а_1м_1$	$а_2м_2м_1а_1$	$а_2м_2а_1м_1$

Отримали 24 різні перестановки, які розбиваються на четвірки однакових слів, якщо прибрати індекси при буквах «м» і «а». Значить, всього різних перестановок $\frac{24}{4} = 6.$

Завдання. Скількома способами можна поставити в ряд 3 червоних, 4 синіх і 5 зелених кубиків?

Рішення. За формулою перестановок з повтореннями отримуємо:

$$P_{(3,\,4,\,5)} = \frac{12!}{3!4!5!} = 27720.$$

Завдання. Слово - будь-яка кінцева послідовність літер українського алфавіту. Скільки різних слів можна скласти з слова перехрестя, якщо необхідно використовувати всі літери?

Рішення. У слові є 3 букви Е, 2 букви Р і ще 5 різних букв. За формулою перестановок з повтореннями отримуємо: $P_{(3,\,2)} = \frac{10!}{3!2!} = 302400.$

Контрольні питання

1. Що таке перестановка, перестановка з повторенням?

2. Визначити кількість перестановок в n- елементній множині.

3. Вказати відмінності між лексикографічнім та анті лексикографічнім порядком генерації перестановок.

4. Які перестановки є початковими й кінцевими в побудові їх з допомогою генератору перестановок?

5. Охарактеризувати існуючі алгоритми генерації перестановок. Вказати кількість елементарних підмножин в n- елементній множині.

6. Привести приклад алгоритму, що генерує послідовність всіх підмножин n-елементної множини.

Завдання

1. Для варіантів з непарними номерами вибрати алгоритм генерації перестановок в лексикографічному порядку, для варіантів з парними номерами - у анті лексикографічному порядку.

2. Використовуючи вказані алгоритми, побудувати 10 перестановок, наступних за вказаною перестановкою:

1) 124356	6) 214365	11) 643215	16) 431 256	21) 132465	26) 653124
2) 213465	7) 342165	12) 165342	17) 213456	22) 216345	27) 162354
3) 341256	8) 123456	13) 153426	18) 432156	23) 231546	28) 523146
4) 431256	9) 426153	14) 132645	19) 341256	24) 612435	29) 564123
5) 132465	10) 421 563	15) 126435	20) 432165	25) 256431	30) 351462

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика : підручник. 2-ге вид. перероблене і доп. Київ: Вища школа, 2007. 383 с.

2. Назарова І. А. Дискретний аналіз: навч. методич. посіб. / Донецьк: ДВНЗ ДонНТУ, 2012. 277 с.

3. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика : підручник. Харків, Компанія СМІТ, 2004. 480 с.

4. Нікольский Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика : Київ: Видавнича група BHV, 2007. 368 с.