

Міністерство транспорту та зв'язку України

Державний департамент з питань зв'язку та інформатизації
Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова

Кафедра теорії електричних кіл



ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ

Модуль 1

**Частина 1 Аналіз електричних кіл за постійних
та гармонічних впливів**

Частина 2 Методичні вказівки до лабораторних робіт

Навчальний посібник
для бакалаврів

телекомунікація
телекомунікаційні системи та мережі
інформаційні мережі зв'язку

Одеса 2006

Навчальний посібник розробили автори: *Арбузнікова Н.Ф., Новіков О.О., Калашніков А.Ю., Шкуліна А.В.*

Навчальний посібник розглянуто та прийнято на засіданні кафедри

Протокол № 4 від « 5 » січня 2006 р

Завідуючий кафедрою:

Шкуліна А.В.

Навчальний посібник розглянуто та прийнято методичною радою факультету інформаційні мережі

Протокол № 16 від « 29 » червня 2006 р

Декан факультета ІМ



І.В. Стрелковська

ЗМІСТ

Вступ. Короткий зміст курсу.....	5
ЧАСТИНА 1 Аналізування електричних кіл за постійних та гармонічних впливів.....	6
Зміст модуля 1.....	6
1 Основні поняття й закони теорії електричних кіл	7
1.1 Величини, які характеризують електричний струм.....	7
1.2 Класифікування електричних кіл.....	9
1.3 Ідеальні неавтономні двополюсні елементи кола.....	10
1.4 Ідеальні автономні елементи кола	13
1.5 Закони Кірхгофа.....	14
1.6 Схеми заміщування реальних кіл.....	15
1.7 Схеми заміщування із залежними джерелами.....	16
1.8 Основи топології кіл.....	17
1.9 Основні засади й теореми теорії електричних кіл.....	18
1.10 Еквівалентні перетворювання однотипних елементів	22
2 Методи аналізування лінійних електричних кіл за постійного впливу.....	25
2.1 Схеми заміщування за постійного впливу.....	25
2.2 Метод рівнянь Кірхгофа	25
2.3 Метод вузлових напруг	25
2.4 Метод накладання	28
2.5 Метод еквівалентного генератора	29
2.6 Метод контурних струмів	31
3 Режим гармонічних коливань у лінійних електричних колах.....	32
3.1 Гармонічні коливання. Основні поняття й означення.....	32
3.2 Спектральне (частотне) подавання гармонічних коливань.....	34
3.3 Гармонічні коливання в пасивних елементах	35
3.4 Векторне подавання гармонічних коливань однієї частоти.....	39
4 Метод комплексних амплітуд (символічний метод аналізування).....	41
4.1 Подання гармонічних коливань за допомогою комплексних чисел.....	41
4.2 Рівняння пасивних елементів у комплексній формі	42
4.3 Основні закони теорії електричних кіл у комплексній формі.....	43
4.4 Система вузлових рівнянь для комплексних амплітуд коливань.....	44
4.5 Аналізування гармонічних коливань у колах з індуктивними зв'язками.....	45
4.5.1 Індуктивні зв'язки в електричних колах	45
4.5.2 Послідовне сполучування зв'язаних індуктивностей.....	47
4.5.3 Особливості аналізування індуктивно зв'язаних кіл. Розв'язка індуктивних зв'язків	49
4.6 Баланс потужності	50

4.7	Режими роботи джерел та умови передавання максимальної потужності	52
4.8	Порядок обчислювання лінійних електричних кіл методом комплексних амплітуд.....	54
5	Аналізування нелінійних електричних кіл за постійного впливу.....	56
5.1	Елементи та їхні характеристики	56
5.2	Способи описування характеристик нелінійних елементів.....	57
5.3	Методи аналізування нелінійних кіл.....	58
	Список рекомендованої літератури.....	61
	ЧАСТИНА 2 Методичні вказівки до лабораторних робіт.....	62
	Лабораторна робота № 1. Досліджування автономних двополюсників.....	62
	Лабораторна робота № 2. Досліджування резистивних кіл з двома джерелами	63
	Лабораторна робота № 3. Досліджування елементів R , L , C за гармонічного впливу.....	66
	Лабораторна робота № 4. Досліджуванні вхідних функцій кіл RL , RC , RLC ..	68
	ДОДАТОК А Тест – запитання до лабораторних робіт.....	73
	ДОДАТОК Б Приклади розв’язування задач модуля 1.....	78

ВСТУП

Короткий зміст курсу

Курс „Теорія електричних кіл та сигналів” (ТЕКС) є базовим курсом, який читається на всіх факультетах технічних спеціальностей Одеської національної академії зв'язку ім. О. С. Попова. Призначення курсу полягає в тому, щоб закласти підґрунтя для наступних спецкурсів, пов'язаних з телекомунікаційними системами, мережами, теле- та радіозв'язком.

Для успішного засвоєння курсу ТЕКС потрібні знання з вищої математики, фізики, інформатики. Завдання курсу – дати розуміння головних ідей, засад та методів аналізу й синтезу електричних кіл та сигналів.

Розвинення сучасних інформаційних технологій не дозволяє обмежуватися лише аналоговими колами й сигналами, тому до програми долучено основи дискретних систем та сигналів.

Дану програму курсу дещо змінено й доповнено. В ній ураховано нову кредитно-модульну систему навчання. Розділи курсу розбито на шість модулів. Кожен модуль складається з кількох тем, з яких читаються лекції, проводяться лабораторно-практичні заняття. Підсумком кожного модуля є залік чи іспит.

Перший модуль – „Аналіз електричних кіл за постійних і гармонічних впливів” – містить основні поняття й закони електричних кіл, аналіз лінійних електричних кіл, аналіз нелінійних електричних кіл за постійного впливу.

Другий модуль – „Частотні методи аналізу електричних кіл” – містить частотні характеристики електричних кіл, резонансні явища в електричних колах, реактивні двополюсники, частотні методи аналізу (ряд та інтеграл Фур'є).

Третій модуль – „Часові і операторні методи аналізу електричних кіл” – містить аналіз перехідних процесів в електричних колах, операторні функції кіл, властивості перетворювання Лапласа, зв'язок частотних і часових характеристик.

Четвертий модуль – „Аналогова обробка сигналу” – містить математичні описи сигналів, аналіз нелінійних кіл за гармонічних впливів, теорію чотириполюсників, частотновибірні кола.

П'ятий модуль – „Дискретні кола та сигнали” – містить теорію дискретних сигналів та кіл.

Шостий модуль – „Основи цифрової фільтрації” – містить аналіз та синтез цифрових фільтрів.

Вважаємо своїм обов'язком виразити вдячність старшому лаборанту Гайдаренко Тетяні за допомогу в оформленні навчального посібника.

ЧАСТИНА 1

Аналіз електричних кіл за постійних та гармонічних впливів

Зміст модуля 1

Вид занять	Лк	Пр	Лб	Сам. роб.	Разом
Кількість годин	16	16	8	43	83

Вступ. Історія розвитку електротехніки, радіотехніки, електрозв'язку. Вчені, які зробили значний внесок у розвиток теорії електричних кіл та сигналів (ТЕКС). Завдання курсу ТЕКС; його роль в основних технічних курсах; зв'язок ТЕКС з іншими технічними дисциплінами.

1 Основні поняття й закони теорії електричних кіл

Основні означення: коло, схема, еквівалентна схема, схема заміщення.

Класифікування електричних кіл. Незалежні, залежні джерела. Елементи, рівняння елементів. Закони: Кірхгофа, Ома.

Основні засади й теореми електричних кіл.

Основи топології електричних кіл. Еквівалентні перетворювання однотипних елементів.

2 Аналіз лінійних резистивних кіл. Методи обчислювання кіл.

3 Лінійні електричні кола за гармонічних впливів. Властивості елементів R , L , C за гармонічних впливів. Часові діаграми, векторні діаграми, частотні залежності.

4 Основи методу комплексних амплітуд. Закони Ома й Кірхгофа для комплексних амплітуд. Аналіз кіл з індуктивними зв'язками. Поняття комплексної потужності. Визначання максимальної потужності в навантаженні.

5 Аналіз нелінійних електричних кіл за постійного впливу.

Лабораторні роботи.

- 1 Досліджування автономних двополюсників.
- 2 Досліджування резистивних кіл із двома джерелами.
- 3 Досліджування елементів R , L , C за гармонічного впливу.
- 4 Досліджування входних функцій кіл RC , RL , RLC .

Комплексне завдання.

- 1 Обчислювання резистивного кола з двома джерелами (метод накладання, метод вузлових напруг).
- 2 Обчислювання кола з елементами R , L , C . Символічний метод.
- 3 Обчислювання кола з нелінійними елементами.

Пропонований посібник містить короткий курс лекцій, методичні вказівки до лабораторних робіт, зразки завдань із розв'язками, тест-запитання до лабораторних робіт, список рекомендованої літератури.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ Й ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Електричним колом називають сукупність електротехнічних пристроїв, якими, за певних умов, може протікати електричний струм. До таких пристроїв належать резистори, котушки індуктивності, трансформатори, конденсатори, машинні генератори, акумуляторні батареї, електронні лампи, транзистори, провідні лінії, антени й інші електричні пристрої.

1.1 Величини, які характеризують електричний струм

Під **електричним струмом** розуміють процес упорядкованого руху електричних зарядів. У теорії електричних кіл як характеристики цього процесу використовують такі величини: струм, напруга, потужність та енергія.

Величина струму. *Величиною* (чи то значенням) *струму* називається величина i , яка дорівнює кількості електрики (заряду), яка переноситься через поперечний переріз провідника за одиницю часу.

У міжнародній системі одиниць СІ величина струму вимірюється в амперах (А), кількість електрики (заряд) – у кулонах (Кл) чи ампер-секундах (А-с), а час – у секундах (с).

Величина струму в момент t визначається за формулою

$$i = dq / dt, \quad (1.1)$$

де dq – нескінченно мала кількість електрики, яка переноситься через поперечний переріз провідника за нескінченно малий проміжок часу від t до $t + dt$. Інакше кажучи, величина струму визначається як похідна від заряду за часом.

За напрямок струму в колі узвичаємо вважати напрямок руху позитивних зарядів. Хоча величина струму являє собою скалярну величину, їй теж приписують напрямок, який зазначається стрілкою (рис. 1.1).

Струм, який не змінюється в часі, називається **постійним**; постійний струм позначається буквою I ; струм же, який змінюється в часі, називається **змінним**. Значення струму кожного моменту часу називається **миттєвим значенням струму** й позначається як функція $i(t)$.

Рисунок 1.1 –
Елемент
електричного
кола

Напруга. *Напругою* поміж точками 1 і 2 називається величина u , яка дорівнює енергії для перенесення одиничного позитивного заряду через розглянуту ділянку з точки 1 до точки 2.

У міжнародній системі одиниць СІ напруга вимірюється у вольтах (В), робота чи енергія – у джоулях (Дж).

Напруга визначається як похідна за зарядом від енергії w перенесення заряду q , тобто

$$u = dw/dq. \quad (1.2)$$

Напруга може бути величиною позитивною й негативною. Напруга, яка визначається в напрямку від точки 1 до точки 2, позначається через u_{12} і вважається за позитивну, якщо при перенесенні одиничного позитивного заряду в цьому напрямку витрачається енергія.

Напруга, яка не змінюється в часі, називається **постійною** і позначається через U ; напруга, яка змінюється в часі, називається **змінною**; значення напруги будь-якого моменту часу називається **миттєвим значенням напруги** й позначається як функція $u(t)$.

Надалі при викладанні курсу великими літерами в більшості випадків позначатимемо величини й параметри, котрі не залежать від часу (U , I), а малими – величини й параметри, котрі залежать від часу [$u(t)$, $i(t)$].

Умовно позитивні напрямки струму й напруги. Перш ніж аналізувати електричне коло, треба обрати й зазначити на кресленні кола (схемі) умовно позитивні напрямки для всіх струмів і напруг, котрі входять до обчислення. Цей вибір можна зробити цілковито довільно. Зазвичай на всіх елементах кола (окрім джерел) умовно позитивний напрямок напруги беруть збіжними з умовно позитивним напрямком струму.

Позитивний напрямок струму зазначається стрілкою. Позитивний напрямок напруги зазначається стрілкою, поверненою вістрям до „мінуса”.

Після обчислення кола, можна визначити справжні напрямки струмів і напруг у такий спосіб. Якщо внаслідок обчислення для струму, який проходить цього моменту через розглянуту ділянку кола, вийде позитивна величина, це означатиме, що „дійсний” напрямок струму (тобто напрямок руху позитивних зарядів) збігається з обраним. Якщо ж вийде негативна величина, „дійсний” напрямок струму буде протилежним до обраного. Все зазначене вище стосується й напруги.

Миттєва потужність та енергія. **Потужністю** називається величина, яка дорівнює роботі, зробленій за одиницю часу.

У міжнародній системі одиниць СІ потужність вимірюється у ватах (Вт).

У загальному разі, якщо в рівні проміжки часу виробляється неоднакова робота, користуються поняттям „миттєва потужність”.

Миттєвою потужністю p називається швидкість змінювання енергії даного моменту часу, тобто похідна енергії w за часом:

$$p = dw/dt. \quad (1.3)$$

У разі постійного струму потужність легко визначити, виходячи з таких міркувань.

На перенесення одиничного заряду через ділянку кола витрачається робота, дорівнювана напрузі U . За одиницю часу переноситься заряд, дорівнюваний струмові I . На перенесення такого заряду буде витрачено роботу UI , тобто, потужність

$$P = UI. \quad (1.4)$$

Отже, за впливу постійного струму потужність визначається як добуток значень напруги й струму. Відповідно енергія за проміжок часу від t_1 до t_2 визначиться формулою

$$w = UI(t_2 - t_1). \quad (1.5)$$

Одиницею електричної енергії є ватт-секунда (Вт-с), яка дорівнює одному джоулю (Дж).

У разі змінного струму миттєва потужність визначається також просто. Перемноживши рівняння (1.1) та (1.2) і врахувавши формулу (1.3), віднайдемо

$$p = ui. \quad (1.6)$$

Отже, миттєва потужність дорівнює добуткові миттєвих значень напруги й струму.

За проміжок часу від t_1 до t_2 сумарна кількість енергії

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} u i dt. \quad (1.7)$$

Зауважимо, що величини p та w можуть бути як позитивними, так і негативними. Відповідно до формул (1.4)...(1.7), потужність та енергія є позитивні за однакових знаків напруги й струму й негативні за неоднакових знаків. У першому разі енергія надходить з кола до розглянутої ділянки, у другому – з ділянки до кола.

1.2 Класифікування електричних кіл

При аналізуванні реальних електричних кіл їх замінюють („заміщують”) сукупністю ідеальних елементів, кожному з яких приписують певні властивості. Ідеальні елементи з'єднуються один з одним за допомогою затискачів, які називають також **полюсами**, чи **вузлами**. Мінімальна кількість затискачів дорівнює двом, тому такі елементи називають двополюсниками; при цьому струм, котрий входить до одного полюса, дорівнює струмові, котрий виходить з іншого полюса. Двополюсниками є схеми заміщування резисторів, котушок індуктивності, конденсаторів, генераторів із двома затискачами тощо. Графічно двополюсник позначається так само, як було позначено раніше ділянку кола (див. рис. 1.1).

Коло, котре може сполучатися та взаємодіяти з іншими колами лише через три, чотири й т. д. полюси, називається відповідно **триполюсником**, **чотириполюсником** і тощо. Приміром, електронну лампу й транзистор можна віднести до триполюсників. Їх можна вважати й за чотириполюсники, якщо подати загальний спільний полюс як два полюси, сполучені один з одним.

Коло загального вигляду, яке може сполучатися та взаємодіяти з іншими колами лише через N полюсів, називається **N -полюсником**, чи **багатополіусником**.

Вочевидь, що найпростішим N -полюсником є двополюсник.

Двополюсник повністю характеризується залежністю поміж напругою на його вузлах і струмом, який проходить через нього. За формою цієї залежності двополюсники поділяються на лінійні й нелінійні.

Лінійним двополюсником називається такий, у якого залежність поміж напругою та струмом – лінійна. У протилежному разі двополюсник називається **нелінійним**.

Двополюсники можна класифікувати ще за багатьма ознаками. Тут ми обмежимося класифікацією за енергетичними ознаками. Відповідно до цієї класифікації, двополюсники поділяються, насамперед, на неавтономні й автономні.

Неавтономним називається двополюсник, у якого після вимкнення його з кола напруга на затискачах відсутня, а за сполучування затискачів поміж собою струм в них є відсутній.

Автономним двополюсником називається такий, який за вимкнення з кола самостійно (автономно) створює напругу на своїх затискачах, а за їхнього сполучування через затискачі протікає струм. Інакше кажучи, автономний двополюсник є електричним колом, яке містить незалежні джерела енергії.

Неавтономні двополюсники своєю чергою можна поділити на пасивні й активні.

Пасивним називається неавтономний двополюсник, повна енергія якого за час від $t = 0$ (якщо за $t < 0$ вплив відсутній) до $t \rightarrow \infty$ є позитивна:

$$w = \int_0^{\infty} u(t)i(t)dt \geq 0. \quad (1.8)$$

Пасивний двополюсник, тобто, може лише одержувати (чи не одержувати) енергію від кола, але не подавати її до кола.

Активним називатимемо неавтономний двополюсник, який задовольняє такий умові: повна енергія двополюсника, увімкненого до кола, за час від $t = 0$ (якщо за $t < 0$ вплив відсутній) до $t \rightarrow \infty$ є негативна, тобто

$$w = \int_0^{\infty} u(t)i(t)dt < 0. \quad (1.9)$$

Такий двополюсник віддає енергію до кола, подібно до автономного двополюсника, однак поміж ними існує істотна різниця. Автономний двополюсник створює напругу на своїх затискачах навіть при вимкненні з кола; активний же двополюсник (за даного означення) має напругу на затискачах лише доти, доки його увімкнено до кола.

Активний двополюсник являє собою певний підсилювач зі сполученими входом і виходом, який повертає до кола більше енергії, аніж від неї одержує (за рахунок певного зовнішнього джерела).

1.3 Ідеальні неавтономні двополюсні елементи кола

До неавтономних двополюсних елементів кола належать:

- 1) опір і провідність;
- 2) індуктивність і зворотна індуктивність;
- 3) ємність і зворотна ємність.

Опір і провідність. Елементом опору (резистивним елементом), чи **опором** називається двополюсник, здатний розсіювати електромагнітну енергію і який можна описати рівнянням

$$u(t) = Ri(t), \quad (1.10)$$

де величина R не залежить ні від напруги, ані від струму. Величина R також називається опором.

За приклад реального пристрою, який наближається за своїми властивостями до елемента опору, може слугувати так званий резистор. У такому пристрої електрична енергія, котра надходить з кола, перетворюється переважно на теплову енергію.

Елемент опору зображується символом, поданим на рис. 1.2, а. Стрілки тут зазначають позитивні напрямки напруги й струму, які приймаємо однаковими для обох величин.

Рівняння (1.10) можна подати й в іншій формі:

$$i(t) = Gu(t), \quad (1.11)$$

де

$$G = 1/R. \quad (1.12)$$

Схарактеризувавши двополюсник рівнянням (1.11) замість рівняння (1.10), здобудемо елемент провідності, чи провідність. Величина G називається **провідністю**.

У системі міжнародних одиниць СІ опір вимірюється в омах (Ом), а провідність – у сіменсах (См).

Рисунок 1.2 – Пасивні елементи електричних кіл

Через те що опір і провідність відбивають одні й ті самі властивості фізичного об'єкта, елемент провідності позначається таким самим символом (див. рис. 1.2, а), що й елемент опору.

За час, наприклад, від 0 до t елемент опору чи провідності одержує чи віддає енергію

$$w = \int_0^t u(t)i(t)dt = R \int_0^t i^2(t)dt = G \int_0^t u^2(t)dt. \quad (1.13)$$

Зокрема, за впливу постійного струму $u(t) = U$, $i(t) = I$ енергія

$$w = RI^2t = GU^2t. \quad (1.14)$$

Опір R може бути позитивним і негативним (той самий знак може мати провідність G).

Як видно з формули (1.13), для елементів позитивного опору й позитивної провідності енергія є позитивна. Отже, ці елементи – пасивні, які одержують енергію з кола, у яке вони входять. Оскільки дані елементи здобуто шляхом ідеалізації резистора, за їхньою допомогою враховуються необоротні втрати енергії (розсіювання у вигляді тепла, випромінювання тощо).

Для елементів негативного опору й негативної провідності енергія є негативна. Отже, ці елементи – активні, вони віддають енергію до кола.

Індуктивність і зворотна індуктивність. *Елементом індуктивності (індуктивним елементом), чи індуктивністю* називається двополіусник, у якого напруга на його затискачах і струм, який ним протікає, пов'язані залежністю

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}, \quad (1.15)$$

де величина L не залежить ні від напруги, ані від струму. Індуктивність – елемент L , здатний нагромаджувати магнітну енергію.

Графічно елемент індуктивності зображується символом, поданим на рис. 1.2, б. Стрілка тут зазначає позитивний напрямок напруги й струму, який приймаємо однаковим для обох величин.

Подавши рівність (1.15) в формі

$$i_L(t) = \Gamma \int u_L(t) dt, \quad (1.16)$$

де

$$\Gamma = 1/L,$$

прийдемо до елемента, який називається *елементом зворотної індуктивності*, чи *зворотною індуктивністю* й позначається Γ .

У системі міжнародних одиниць СІ індуктивність вимірюється в генрі (Γ), а зворотна індуктивність – в 1/генрі ($1/\Gamma$).

Через те що елементи індуктивності й зворотної індуктивності відповідають одному й тому самому фізичному об'єктові, елемент зворотної індуктивності позначають тим самим графічним символом, як й елемент індуктивності (див. рис. 1.2, б).

За час від $-\infty$ до t елемент індуктивності (чи зворотної індуктивності) одержує чи віддає енергію

$$w = \int_{-\infty}^t u(t)i(t)dt = \frac{Li^2(t)}{2} = \frac{i^2(t)}{2\Gamma}. \quad (1.17)^*$$

Вважається, що за $t \rightarrow -\infty$ струм дорівнює нулеві. Дана формула показує, що повна енергія в індуктивності залежить лише від миттєвого значення струму й не залежить від того, в який спосіб цей струм установлювався. Індуктивність L може бути позитивною й негативною (той самий знак має й зворотна індуктивність).

Ємність і зворотна ємність. Елементом ємності (ємнісним елементом), чи ємністю називається двополіусник, у якого величина струму й прикладена напруга пов'язані рівністю

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}, \quad (1.18)$$

де величина C не залежить ні від напруги, ані від струму. Величина C називається ємністю.

* Рівність (1.17) пропонуємо самостійно довести, скориставшись рівністю (1.15).

Ємність – елемент, здатний накопичувати електричну енергію. До елемента ємності наближається за властивостями, приміром, електричний конденсатор. У такому пристрої енергія переважно нагромаджується у вигляді енергії електричного поля.

Графічно елемент ємності зображується символом, поданим на рис. 1.2, в. Тут, як і раніш, позитивні напрямки напруги й струму обрано однаковими й позначено однією стрілкою.

Подавши рівняння (1.18) у формі

$$u_C(t) = S \int i_C(t) dt, \quad (1.19)$$

де

$$S = 1/C, \quad (1.20)$$

прийдемо до елемента, який називається **елементом зворотної ємності**, чи **зворотною ємністю**. Величину S називають зворотною ємністю.

У системі міжнародних одиниць СІ ємність вимірюється у фарадах (Ф), а зворотна ємність – в 1/фараду (1/Ф).

Через те що елементи ємності й зворотної ємності відповідають одному й тому самому фізичному об'єктові, елемент зворотної ємності зображується тим самим символом, як й елемент ємності (див. рис. 1.2, в).

Повна енергія, яку елемент ємності (чи зворотної ємності) одержує чи віддає за час від $-\infty$ до t

$$w = \int_{-\infty}^t u(t)i(t)dt = \frac{Cu^2(t)}{2} = \frac{u^2(t)}{2S}. \quad (1.21)**$$

Вважається, що за $t \rightarrow -\infty$ напруга дорівнює нулеві. Вочевидь, що повна енергія в ємності залежить лише від миттєвого значення напруги й не залежить від того, як воно встановлювалося. Ємність C може бути позитивною й негативною (той самий знак має й зворотна ємність S).

1.4 Ідеальні автономні елементи кола

До автономних ідеальних елементів кола належать ідеальне джерело напруги й ідеальне джерело струму.

Ідеальне джерело напруги. *Ідеальним джерелом напруги*, чи *джерелом напруги* називається умовний двополюсник, у якого напруга поміж вузлами не залежить від струму, котрий протікає через них, тобто

$$u(t) = e(t). \quad (1.22)$$

Величину $e(t)$ називають задаючою напругою, чи напругою джерела.

Якщо до джерела напруги $e(t)$ долучити елемент опору R , струм в останньому визначається формулою

** Рівність (1.21) пропонуємо самостійно довести, скориставшись рівністю (1.18).

$$i(t) = e(t) / R,$$

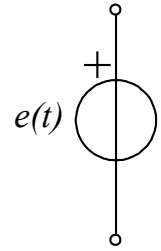


Рисунок 1.3 –
Ідеальне дже-
рело напруги

котру записано на підставі (1.10). За зменшення величини R цей струм зростатиме. У граничному разі, коли $R = 0$, струм стає нескінченно великим. Але й тоді напруга поміж вузлами елемента опору залишається дорівнюваною $e(t)$. Тому такий режим роботи джерела напруги є неприпустимий.

Графічно ідеальне джерело напруги зображується символом, поданим на рис. 1.3.

За своїми властивостями до ідеального джерела напруги наближається стартерний кислотний акумулятор: його внутрішній опір може дорівнювати 0,01 Ом.

Ідеальне джерело струму. *Ідеальним джерелом струму*, чи *джерелом струму* називається двополіусник, у якого струм не залежить від напруги на його затискачах, тобто

$$i(t) = j(t). \quad (1.23)$$

Величину $j(t)$ називають *задаючим струмом*, чи *струмом джерела*. Якщо до джерела струму $j(t)$ залучити елемент провідності G , напруга на останньому подаватиметься формулою

$$u(t) = j(t) / G,$$

котру записано на підставі (1.11). За зменшення величини G ця напруга зростатиме. У граничному разі, коли $G = 0$, напруга стає нескінченно великою. Але й тоді струм поміж вузлами елемента провідності залишається дорівнюваним $j(t)$. Тому такий режим роботи джерела струму є неприпустимий.

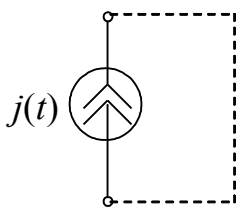


Рисунок 1.4 – Ідеальне
джерело струму

До ідеального джерела струму наближаються за своїми властивостях, наприклад, електростатичний генератор, лужний акумулятор. За допомогою ідеального джерела струму так само, як і за допомогою ідеального джерела напруги, враховують надходження енергії в кола ззовні.

Графічно ідеальне джерело струму зображується символом, поданим на рис. 1.4.

1.5 Закони Кірхгофа

Якщо в одному вузлі сходяться лише два елементи, то таке сполучування елементів називають *послідовним*.

Якщо обидва вузли одного елемента відповідно з'єднані із цими ж вузлами іншого, сполучування називається *паралельним*.

Гілкою називають елемент чи сукупність елементів, увімкнених поміж двома вузлами, якщо струм, який виходить з одного вузла, дорівнює струмові, який входить до іншого вузла. Сукупність елементів, котрі утворюють замкнений шлях для струму, називається *контуром*.

Коло, яке складається винятково з лінійних елементів, називається *лінійним*; якщо ж у колі є хоча б один нелінійний елемент, коло називається *нелінійним*.

Закони Кірхгофа. *Перший закон Кірхгофа*, чи закон Кірхгофа для струмів, говорить: *алгебрична сума струмів у гілках, які сходяться в будь-якому вузлі кола, дорівнює нулеві*, тобто

$$\sum i(t) = 0. \quad (1.24)$$

Цілковито зрозуміло, що до суми струмів мають входити й задаючі струми, якщо до вузла долучено джерела струму. При записуванні даного рівняння струми, спрямовані від вузла, слід брати з одним знаком, а спрямовані до вузла – з іншим знаком.

Другий закон Кірхгофа, або закон Кірхгофа для напруг, говорить: *алгебрична сума напруг на елементах будь-якого контура кола (як лінійного, так і нелінійного) дорівнює нулеві*, тобто

$$\sum u(t) = 0. \quad (1.25)$$

До суми напруг мають увійти й задаючі напруги, якщо в розглянутому контурі є джерела напруги. При записуванні даного рівняння треба враховувати напрямки напруг на елементах контура, а саме: напруги, спрямовані „за обходом контура”, слід брати з одним знаком, а спрямовані „проти обходу” – з іншим знаком.

1.6 Схеми заміщування реальних кіл

Теорія електричних кіл займається не реальними, а ідеалізованими колами. Тому для аналізу й обчислення реального кола потрібно, насамперед, замінити кожний пристрій, який входить до кола, на відповідне сполучення ідеальних елементів. Таке сполучення називається *схемою заміщування* даного пристрою.

При побудові схеми заміщування домагаються того, щоби залежності поміж напругами й струмами на зовнішніх вузлах схеми з *необхідним*

ступенем точності збігалися з відповідними залежностями на затискачах реального пристрою, відзначеними шляхом вимірювань. Чим вищою є точність, з якою схема заміщування має відбити властивості реального об'єкта, тим складнішою буде схема. Отже, для одного й того самого об'єкта схема заміщування може мати різний вигляд, залежно від умов поставленого завдання. Придатність схеми заміщування визначається за допомогою вимірювань.

Розглянемо схеми заміщування деяких електротехнічних пристроїв, котрі часто зустрічаються на практиці.

Схеми заміщування автономних двополюсників (неідеальних джерел енергії).

Виміряну вольт-амперну характеристику автономного двополюсника зображено на рис. 1.5, де E – напруга на затискачах автономного двополюсника в режимі ненавантаженого стану, J – струм, який протікає за замкнутих накоротко затискачів.

На цьому рисунку подано вольт-амперні характеристики ідеальних джерел штриховою лінією – ідеальне джерело напруги (ІДН), штрих-пунктирною лінією – ідеальне джерело струму (ІДС).

Рисунок 1.5 – Вольт-амперні характеристики

Рівняння цієї прямої, яка містить точки E і J на рис. 1.5, можна записати у вигляді:

$$U_{12} = E - R \cdot i. \quad (1.26)$$

Зазначена формула описує двополюсник, поданий на рис. 1.6, а.

Рисунок 1.6 – Схеми заміщування неідеальних джерел:
а) джерело напруги; б) джерело струму

З рівняння (1.26) струм i можна подати як:

$$i = \frac{E - U_{12}}{R} = \frac{E}{R} - \frac{U_{12}}{R} = J - \frac{U_{12}}{R} = J - U_{12}G.$$

Остання рівність дозволяє зобразити другу схему заміщування автономного двополюсника, рис. 1.6, б. За приклади автономних двополюсників слугують: акумуляторна батарея, генератори постійного струму, гальванічні електричні елементи. На схемі рис. 1.6 R_H і G_H – опір та провідність навантаження (струми протікають за замкненого кола).

1.7 Схеми заміщування із залежними джерелами

Залежні джерела. Дотепер розглядалися схеми заміщування, складені з двополюсних елементів. При цьому під джерелом розуміли елемент, у якого напруга чи струм не залежать від напруг і струмів інших елементів кола, до якого дане джерело входить. Таке джерело називається незалежним.

Виявляється, є пристрої (наприклад підсилювальна електронна лампа чи транзистор), схеми заміщування яких не можна побудувати з одних двополюсних елементів. До цих схем треба ввести триполюсні чи то чотириполюсні ідеальні елементи. З таких елементів надто широко застосовуються залежні джерела. Так називаються чотириполюсники, які складаються з двох гілок: перша гілка являє собою чи коротке замикання чи то розрив. Друга гілка являє

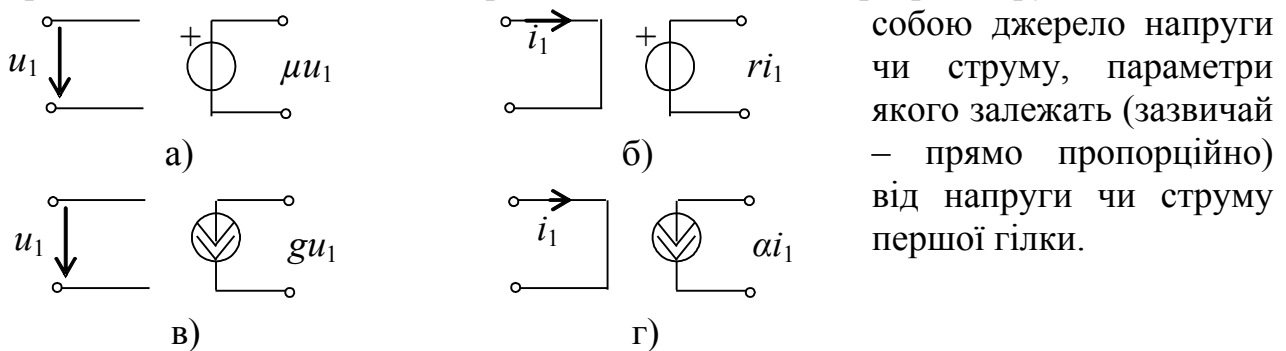


Рисунок 1.7 – Залежні джерела:

а – ДНКН; б – ДНКС; в – ДСКН; г – ДСКС

У відповідності зі сказаним, розрізняють такі чотири види залежних джерел: ДНКН – джерело напруги, кероване напругою (рис. 1.7, а); ДНКС – джерело напруги, кероване струмом (рис. 1.7, б); ДСКН – джерело струму, кероване напругою (рис. 1.7, в); ДСКС – джерело струму, кероване струмом (рис. 1.7, г).

Коефіцієнти пропорційності r та g мають відповідно розмірність опору й провідності, а коефіцієнти α та μ є безрозмірними величинами.

1.8 Основи топології кіл

Якщо відволіктися від характеру елементів електричного кола й замінити кожний елемент на відрізок лінії, схему кола можна зобразити у вигляді певної геометричної фігури. Наприклад, для кола, поданого на рис. 1.8, а, можна здобути геометричний образ, наведений на рис. 1.8, б.

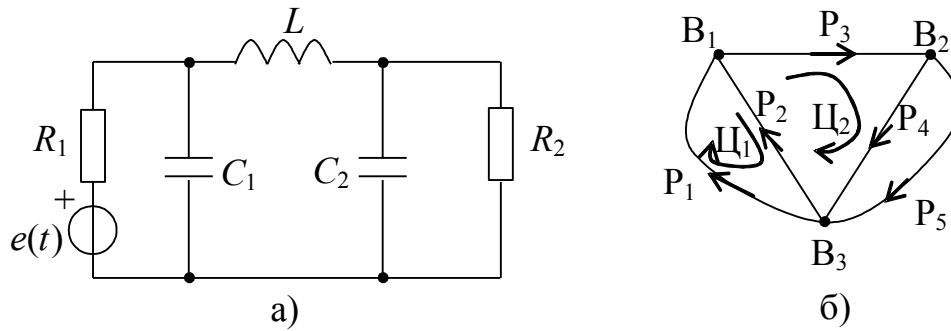


Рисунок 1.8 – Коло і граф кола
а – електричне коло; б – граф електричного кола

Цей образ називається графом кола. Із графом пов'язано нижчеподані поняття.

Вершиною називається точка, сполучена з кінцем відрізка лінії, а також ізольована точка.

Ребром називається відрізок лінії, який закінчується вершинами.

Графом називається сукупність вершин та ребер, у якій ребра сполучуються кінцями лише у вершинах. Кожний кінець ребра у графі має бути неодмінно сполучений з вершиною.

Якщо кожному ребру приписано напрямок, зазначуваний стрілкою, граф називається **орієнтованим** (граф струмів на рис. 1.8, б). У протилежному разі граф називається **неорієнтованим**.

Підграф. Підграфом даного графа називається його частина, в якій кожна вершина й кожне ребро є водночас вершиною й ребром вихідного графа. Зокрема, підграф може являти собою лише одну ізольовану вершину чи лише одне ребро з вершинами на кінцях.

Шлях. Шляхом називається послідовність з m ребер і $m + 1$ вершин графа, в якій кожна вершина, окрім початкової й кінцевої, є спільною для двох ребер цієї послідовності. Наприклад, на графі рис. 1.8, б поміж V_1 та V_3 існують шляхи через ребра: 1) P_1 , 2) P_3 та P_4 й т. д. Вершини V_1 та V_3 є для цих шляхів початковими й кінцевими вершинами.

Циклом називається шлях, у якого початкова й кінцева вершини збігаються. Наприклад, на рис. 1.8, б можна зазначити цикли $V_1 - V_2 - V_3 - V_1$ і т. д., які скорочено позначаємо через Π_1 , Π_2 і т. д.

В орієнтованому графі циклам, як і ребрам, приписують напрямок (за, чи то проти ходу годинникової стрілки), який зазначається (як на рис. 1.8, б) заокругленою стрілкою.

Планарний граф. Граф називається **планарним**, якщо його може бути накреслено на площині чи то на сфері в такий спосіб, що жодні два ребра не перетинатимуться, окрім як у вершинах (де вони сполучуються). У протилежному разі, граф називається **непланарним**. Приміром графи рис. 1.8, б та 1.9, а – планарні. Неplanарний граф подано на рис. 1.9, б.

Зв'язаний граф – граф, у якому є шлях поміж кожною парою вершин.

Дерево – зв'язаний ациклічний граф, у якого всі вершини сполучено поміж собою, але немає жодного циклу.

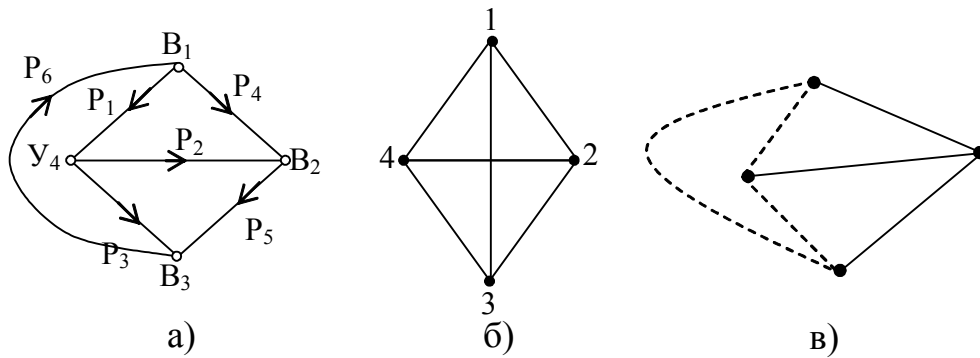


Рисунок 1.9 – Графи кіл:

а – планарний; б – непланарний; в – дерево графа

1.9 Основні засади й теореми теорії електричних кіл

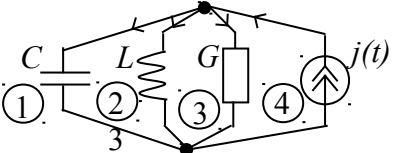
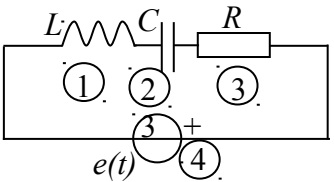
Засада накладання (суперпозиції). Для лінійних кіл слушна є така теорема: якщо в колі діють кілька джерел, то спричинені ними струми (чи напруги) у будь-якому місці кола можна обчислити як суму струмів (чи напруг), які спричинило би в цьому місці кожне джерело, діючи окремо, тобто коли задаючі напруги і струми інших джерел дорівнювали б нулеві. Інакше кажучи, у лінійному колі відгуки на окремі впливи складаються незалежно.

Справедливість засади накладання випливає з такої властивості системи лінійних рівнянь: якщо система рівнянь містить кілька заданих функцій, то розв'язок цієї системи може бути здобуто підсумовуванням окремих розв'язків, здобутих для кожної функції у припущенні, яке існує лише ця функція, а решта дорівнюють нулеві.

Засада дуальності. Поняття подвійності дій, явищ у природі, науці існує вже давно. Тому на зорі розвинення вчення про електрику на цю обставину звернув увагу Хевісайд наприкінці XIX сторіччя. Це стало поштовхом для розвинення засади дуальності. У підґрунті засади в теорії кіл лежать постулати (закони) Кірхгофа про залежність струмів у вузлах і напруг у контурах (див. табл. 1.1). Істотного розвинення ця засада набула лише в середині XX століття. Великий внесок у розвинення цієї засади зробили вчені в області теорії електричних кіл Е.В.Зелях та А.М.Іваницький.

Засаду дуальності можна подати в такий спосіб: якщо у відомому законі, правилі, теоремі зробити заміну величин і термінів дуальними величинами й терміни відповідно до таблиці 1.1, то нове формулювання зберігає зміст. У таблиці наведено пари (ліворуч і праворуч) дуальних відповідностей. Ці відповідності належать до дуальних кіл. Наприклад струм одного кола (елемента) відповідає напрузі дуального кола (елемента) й навпаки. Відповідно до засади дуальності, кожній закономірності, правилу, методів відповідають дуальні закономірність, правило, метод. Останній рядок таблиці являє собою пари дуальних кіл (послідовний контур $\leftrightarrow$ паралельний контур), які містять дуальні елементи ($L, C, R \leftrightarrow C, L, G$) і дуальні сполучування (контур $\leftrightarrow$ вузол).

Таблиця 1.1 – Дуальні відповідності

Вихідні положення	Дуальні положення
$\sum i_k(t) = 0$	$\sum u_k(t) = 0$
Вузол	Контур
$i = G u$	$u = R i$
Провідність G	Опір R
$i_C = C \frac{du_C}{dt}$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$
Ємність C	Індуктивність L
$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$
$\dot{I}_L = \frac{1}{j\omega L} \dot{U}_L$	$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C$
Комплексна провідність індуктивності Y_L	Комплексний опір ємності Z_C
$\dot{I}_C = j\omega C \cdot \dot{U}_C$	$\dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I}_L$
Комплексна провідність ємності Y_C	Комплексний опір індуктивності Z_L
$\sum \dot{I}_k = 0$	$\sum \dot{U}_k = 0$
	

Дуальні кола. Два кола, в яких за заміни величин та термінів на дуальні величини й терміни рівняння одного кола переходять у рівняння іншого, є **дуальними**.

Становить великий інтерес таке завдання: відзнати коло, дуальне відносно до заданого. Це завдання розв'язується надто просто, якщо вихідне коло складене лише з послідовно й паралельно сполучених елементів, як, наприклад, коло на рис. 1.10, а. У цьому разі дуальне коло можна здобути шляхом заміни у вихідному колі послідовного сполучення на паралельне, паралельного сполучення – на послідовне, опору – на провідність, індуктивності – на ємність, ємності – на індуктивність, джерела напруги – на джерело струму й джерела струму – на джерело напруги.

Як приклад на рис. 1.10, б показане коло, дуальне колу рис. 1.10, а.

Рисунок 1.10 – Дуальні кола: а – вихідне; б – дуальне

Теорема заміщування. Теорему заміщування сформулюємо в такий спосіб:

- 1 Двополюсник (Д), сполучений з колом К (рис. 1.11, а), можна, не змінюючи струмів та напруг у цьому колі, замінити на джерело напруги, рівної за величиною й напрямком напрузі на затискачах двополюсника (рис. 1.11, б).
- 2 Двополюсник (Д) можна також замінити на джерело струму, рівного за величиною й напрямком струмові двополюсника (рис. 1.11, в).



Рисунок 1.11 – Заміщування двополюсника Д:
а – вихідний двополюсник; б – заміщування джерелом напруги;
в – заміщування джерелом струму

Доведення. Увімкнемо послідовно поміж двополюсником Д і колом К два джерела, задаючи напруги яких спрямовано назустріч (рис. 1.12, а) і рівні кожна напрузі поміж затискачами двополюсника в схемі рис. 1.11, а. При цьому струми й напруги в колі залишаться, напевне незмінними. Далі, враховуючи, що напруга поміж точками 1 та 1' дорівнює нулеві, ці точки можна сполучити накоротко, не змінюючи струмів та напруг у колі.

Накресливши схему у вигляді рис. 1.12, б і застосувавши перший закон Кірхгофа до вузла 1, бачимо, що струм у перемичці 1-1' дорівнює нулеві. Отже,

цю перемичку можна вимкнути, також не змінюючи струмів та напруг у колі. В наслідок цього здобуваємо схему рис. 1.11, б, яка доводить слушність першої частини теореми. У деяких підручниках цю теорему називають **теоремою компенсації**.

Рисунок 1.12 – Доказ теореми заміщення:
а – два однакових різнополярних джерела в одному ребрі;
б – два автономних кола

Теорема про еквівалентний генератор. Користуючись поняттям „автономний двополюсник”, сформулюємо цю теорему в такий спосіб:

- 1 Струм i й напруга u навантаження N , долученого до затискачів автономного лінійного двополюсника АД (рис. 1.13, а), не зміняться, якщо замінити цей двополюсник на коло (рис. 1.13, б), складене з послідовно сполучених двополюсника D_1 та джерела напруги, рівного напрузі $u_{\text{ннв.с}}$ ненавантаженого стану двополюсника АД.
- 2 Струм та напруга навантаження також не зміняться, якщо замінити автономний двополюсник АД колом (рис. 1.13, в), яке складене з паралельно сполучених двополюсника D_1 та джерела струму, дорівнюваного струму $i_{\text{кз}}$ короткого замикання двополюсника АД.



Рисунок 1.13 – До теореми про еквівалентний генератор:
а – автономний двополюсник з навантаженням; б – еквівалентне джерело напруги; в – еквівалентне джерело струму

У відповідності до сказаного, D_1 автономного двополюсника називається неавтономним двополюсником, котрий виходить з автономного, в якому замінено джерела напруги на короткі замикання (КЗ), а джерела струму – на обриви (ННВ.С).

Напругою ненавантаженого стану автономного двополюсника називається напруга, яка має місце на його затискачах, коли їх розімкнuto, тобто коли струм, який протікає через ці затискачі, дорівнює нулеві.

Струмом короткого замикання автономного двополюсника називається струм, який протікає поміж його затискачами, коли їх сполучено накоротко.

1.10 Еквівалентні перетворювання однотипних елементів

А Послідовне сполучування однотипних елементів

Послідовне сполучування опорів. Сполучування елементів, показане на рис. 1.14, є послідовним (всі елементи сполучуються поміж собою за допомогою усувних вузлів).

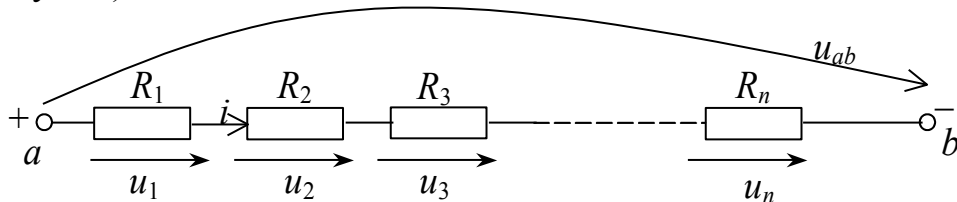


Рисунок 1.14 – Послідовне сполучування елементів R

Напруга на кожному з резисторів рис. 1.14 визначається за законом Ома:

$$u_1 = R_1 i, u_2 = R_2 i, u_3 = R_3 i \dots u_n = R_n i.$$

Сумарна напруга на всій ділянці ab визначиться як арифметична сума напруг на кожному з опорів:

$$u_{ab} = R_1 i + R_2 i + R_3 i + \dots + R_n i = i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n) = iR_E,$$

де R_E – це еквівалентний опір ділянці ab (рис. 1.15), дорівнюваний арифметичній сумі всіх опорів ділянки ab .

Рисунок 1.15 – Еквівалентний опір

Послідовне сполучування індуктивностей. Це сполучування наведено на рис. 1.16.

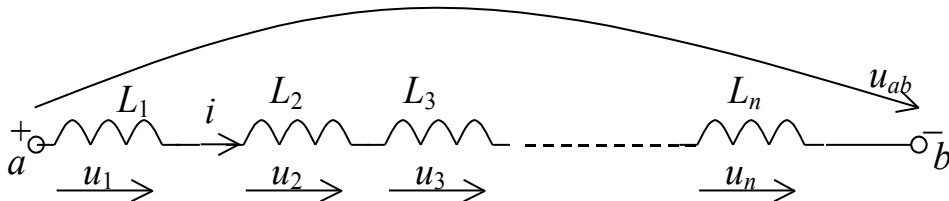


Рисунок 1.16 – Послідовне сполучування індуктивностей

На кожній з індуктивностей рис. 1.16 матиме місце відповідно напруга:

$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt}, u_2 = L_2 \frac{di}{dt} \text{ й т. д.}$$

Напруга на ділянці ab подається формулою

$$u_{ab} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} (L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n) = \frac{di}{dt} L_E,$$

де L_E – еквівалентна ділянці ab індуктивність (рис. 1.17), дорівнює арифметичній сумі всіх індуктивностей ділянки ab .

Рисунок 1.17 – Еквівалентна індуктивність

Послідовне сполучування ємностей. Це сполучування подано на рис. 1.18.

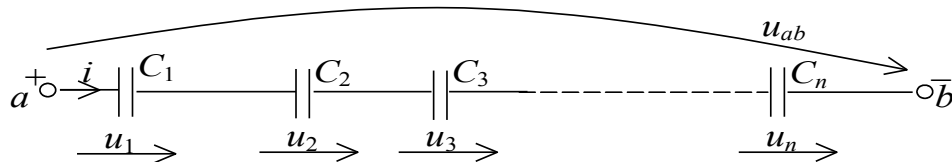


Рисунок 1.18 – Послідовне сполучування ємностей

На кожній ємності рис. 1.18 матиме місце відповідно напруга:

$$u_1 = \frac{1}{C_1} \int idt \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{C_2} \int idt \quad \text{і т. д.}$$

Напруга на ділянці ab подаватиметься формулою

$$u_{ab} = \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt + \frac{1}{C_3} \int idt + \dots + \frac{1}{C_n} \int idt = \int idt \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) = \int idt \frac{1}{C_E},$$

де $1/C_E$ – величина, зворотна до еквівалентної ємності (рис. 1.19) на ділянці ab :

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

Рисунок 1.19 – Еквівалентна ємність

Послідовне сполучування ідеальних джерел напруги. За послідовного сполучення незалежних джерел напруги вони замінюються на одне еквівалентне джерело напруги із задаючою напругою E_E , яка дорівнює алгебричній сумі задаючих напруг окремих джерел. Причому зі знаком "+" беруться напруги, збіжні з напругою еквівалентного джерела за напрямком, а зі знаком "-" – незбіжні (рис. 1.20).

Приклад такого сполучування трьох джерел наведено на рис. 1.20.

Рисунок 1.20 – Еквівалентне перетворювання ідеальних джерел напруги:
а – послідовне сполучування джерел; б – еквівалентне джерело

На підставі другого закону Кірхгофа,

$$u_{12} = E_E = -E_1 - E_2 + E_3.$$

Б Паралельне сполучування однотипних елементів

Використовуючи засаду дуальності, можна здобути формули еквівалентних параметрів паралельного сполучування однотипних елементів. Цей аналіз пропонується виконати самостійно.

Контрольні запитання

- 1 Що називається струмом? Напругою?
- 2 Які напрямки струмів та напруг прийнято за позитивні?
- 3 Що називається потужністю? Енергією?
- 4 Що таке двополюсник? Триполюсник? Чотириполюсник?
- 5 Які двополюсники називаються автономними? Неавтономними?
- 6 Які двополюсники називаються активними? Пасивними?
- 7 Що називається ідеальним опором? Індуктивністю? Ємністю?
- 8 Що називається ідеальним джерелом напруги? Струму?
- 9 Як формулюються закони Кірхгофа?
- 10 Які схеми заміщування автономного двополюсника Вам відомі?
- 11 Які й скільки залежних джерел використовується в теорії електричних кіл?
- 12 Що таке вузол? Гілка? Контур?
- 13 Які засади й теореми використовуються в курсі теорії електричних кіл?
- 14 Що таке дуальне коло?
- 15 Про що йдеться в теоремі заміщування?
- 16 Поміж якими колами встановлюється еквівалентність у теоремі про еквівалентний генератор?
- 17 Як визначити еквівалентну величину за послідовного сполучування двох і більш опорів? Індуктивностей? Ємностей?
- 18 Як визначити еквівалентну величину за паралельного з'єднання опорів? Індуктивностей? Ємностей?
- 19 На який елемент можна замінити послідовне сполучування джерел напруги?
- 20 На який елемент можна замінити паралельне сполучування джерел струму?

2 МЕТОДИ АНАЛІЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ЗА ПОСТІЙНОГО ВПЛИВУ

2.1 Схеми заміщування за постійного впливу

Завдання аналізу *лінійних електричних кіл (ЛЕК)* полягає у тім, щоби для заданої схеми й величин її елементів визначити струми, напруги, потужності на кожному елементі. Існує кілька методів аналізування електричних кіл. При аналізуванні кіл, які містять джерела постійного впливу, слід перейти від схеми за довільних впливів до схеми заміщування за постійних впливів.

У табл. 2.1 наведені зображення елементів електричного кола за довільних впливів, за постійних впливів та їхні еквіваленти.

2.2 Метод рівнянь Кірхгофа

Метод ґрунтується на складанні рівнянь за законами Кірхгофа. Невідомими в цих рівняннях є струми в гілках кола.

Нехай коло містить n гілок, включаючи джерела напруги, та n_v вузлів. Покладемо, що в колі відсутні джерела струму.

Заданося довільно позитивними напрямками струмів у гілках кола й пронумеруємо ці струми в довільному порядку. Тоді за першим законом Кірхгофа можна скласти для $(n_v - 1)$ вузлів таку саму кількість лінійно-незалежних рівнянь. За другим законом Кірхгофа можна скласти $(n_l - n_v + 1)$ лінійно-незалежних рівнянь для напруг u_k гілок кола (де k – номер гілки).

Отже, сукупність з $(n_v - 1)$ рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа, та $(n_l - n_v + 1)$ рівнянь, складених за другим законом Кірхгофа, утворять систему з $n_v - 1 + n_l - n_v + 1 = n_l$ лінійно-незалежних алгебричних рівнянь відносно такого самого числа невідомих.

Подібна система рівнянь, як відомо, має єдиний розв'язок, який дозволяє віднайти струми в гілках кола, а за ними і значення напруг поміж кожною парою вузлів кола.

2.3 Метод вузлових напруг

Метод вузлових напруг (потенціалів) базується на законі Кірхгофа й законі Ома. Це найбільш загальний і широко застосовуваний метод для обчислювання електричних кіл.

У підґрунті методу лежить обчислення напруг у $(n_v - 1)$ вузлах кола відносно базисного вузла, потенціал якого приймається за нульовий. Після цього на підставі закону Ома обчислюють струми у відповідних гілках. Розглянемо сутність методу вузлових напруг на прикладі резистивного кола, зображеного на рис. 2.1.

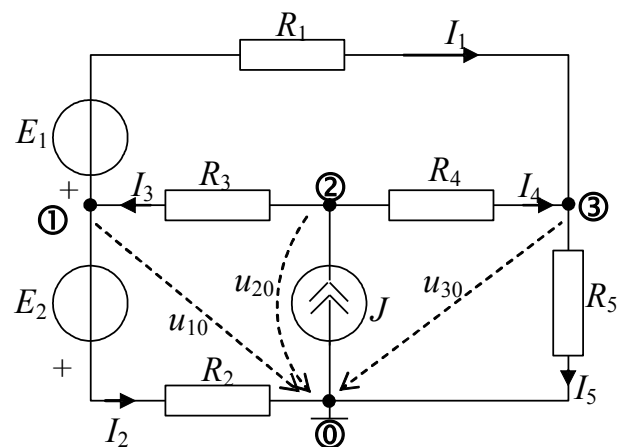
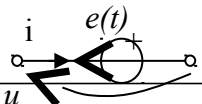
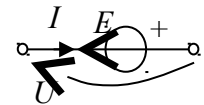
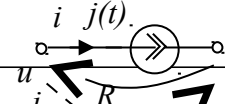
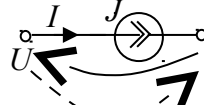
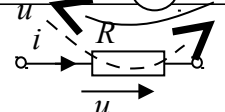
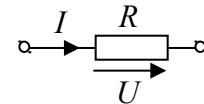
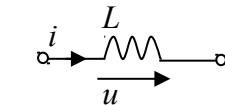
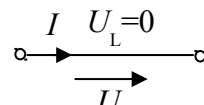
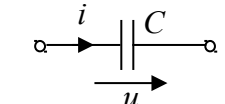
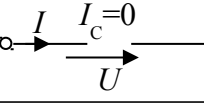
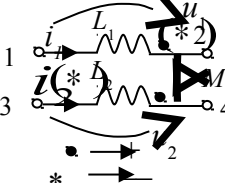
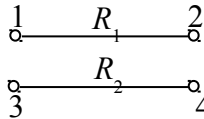


Рисунок 2.1 – Електричне коло з чотирма вузлами

Таблиця 2.1 – Відповідність елементів за постійних впливів

Елементи схем заміщування електричних кіл за довільних впливів $u(t), i(t)$			Елементи схем заміщування електричних кіл за сталих значень $u(t) = U, i(t) = I$		
назва	умовне зображення	зв'язок i з u	назва	умовне зображення	зв'язок I з U
Ідеальне джерело напруги		$u = e(t)$ i не залежить від величини й напрямку струму i	Ідеальне джерело постійної напруги		$U = E$ i не залежить від величини й напрямку I
Ідеальне джерело струму		$i = j(t)$ i не залежить від величини й напрямку напруги	Ідеальне джерело постійного струму		$I = J$ i не залежить від величини й напрямку U
Опір		$u = iR$	Опір		$U = I \cdot R$ $R = \frac{U}{I}$
Індуктивність		$u = L \frac{di}{dt}$	Перемичка; коротке замикання (КЗ)		$R = \frac{U}{I} = 0$
Ємність		$i = C \frac{du}{dt}$	Розрив; ненавантажений стан (Ннв.с)		$R = \frac{U}{I} \rightarrow \infty$
Сполучені індуктивності		$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$	Перемички; короткі замикання (КЗ)		$R_1 = 0$ $R_2 = 0$

Оберемо довільно опорний вузол; позначимо цей вузол як нульовий. Решту вузлів довільно пронумеруємо: 1, 2, 3 – дістали три незалежних вузли ($n_b - 1$).

Напруги цих вузлів, відносно опорного вузла, позначимо як u_{10} , u_{20} та u_{30} відповідно до номерів вузлів. Назвемо їх вузловими напругами даного кола. Оберемо довільно напрямки струмів у кожній з гілок кола (окрім гілки, яка містить джерело струму) і складемо рівняння за першим законом Кірхгофа для обраних незалежних вузлів кола (вузли 1, 2, 3):

$$\begin{aligned} \text{Вузол ① } I_3 - I_1 - I_2 &= 0; \\ \text{Вузол ② } J - I_3 - I_4 &= 0; \\ \text{Вузол ③ } I_4 + I_1 - I_5 &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тепер подамо кожен зі струмів відповідно до закону Ома:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{u_{10} - u_{30} - E_1}{R_1} = (u_{10} - u_{30} - E_1) G_1; \\ I_2 &= \frac{u_{10} + E_2}{R_2} = (u_{10} + E_2) G_2; \\ I_3 &= \frac{u_{20} - u_{10}}{R_3} = (u_{20} - u_{10}) G_3; \\ I_4 &= \frac{u_{20} - u_{30}}{R_3} = (u_{20} - u_{30}) G_4; \\ I_5 &= \frac{u_{30}}{R_5} = u_{30} G_5, \end{aligned}$$

де

$$G_1 = \frac{1}{R_1}; G_2 = \frac{1}{R_2}; G_3 = \frac{1}{R_3}; G_4 = \frac{1}{R_4}; G_5 = \frac{1}{R_5}$$

– провідності відповідних гілок кола.

Далі підставимо подані через вузлові напруги й провідності гілок струми до системи рівнянь (2.1), складеної для незалежних вузлів кола за першим законом Кірхгофа:

$$\begin{cases} (u_{20} - u_{10}) G_3 - (u_{10} - u_{30}) G_1 + E_1 G_1 - u_{10} G_2 - E_2 G_2 = 0; \\ J - (u_{20} - u_{10}) G_3 - (u_{20} - u_{30}) G_4 = 0; \\ (u_{20} - u_{30}) G_4 + (u_{10} - u_{30}) G_1 - E_1 G_1 - u_{30} G_5 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Згрупуємо частини в рівняннях системи (2.2) за однакових вузлових напруг, помножимо кожні частини рівняння на (-1) і частини, які не містять вузлових напруг, перенесемо до правих частин рівнянь:

$$\begin{cases} u_{10} G_{11} - u_{20} G_{12} - u_{30} G_{13} = I_{11}; \\ - u_{10} G_{21} + u_{20} G_{22} - u_{30} G_{23} = I_{22}; \\ - u_{10} G_{31} - u_{20} G_{32} + u_{30} G_{33} = I_{33}, \end{cases} \tag{2.3}$$

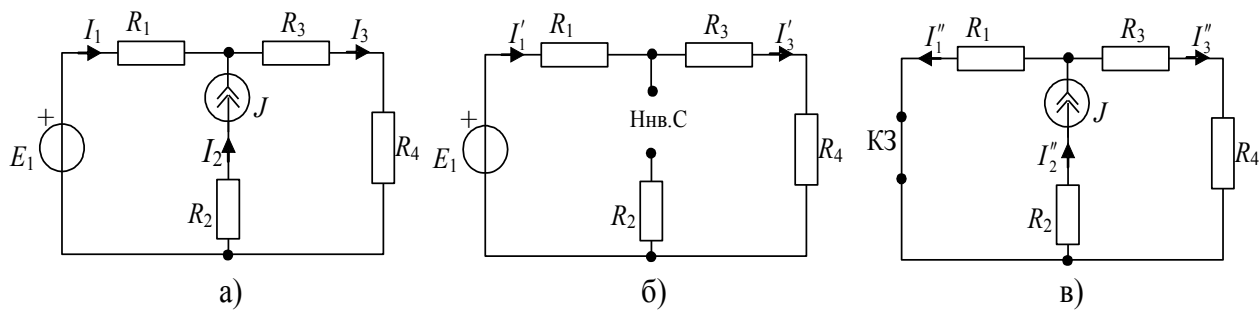


Рисунок 2.2 – До розв'язку методом накладання:
а – вихідне коло; б – джерело струму вимкнено;
в – джерело напруги вимкнено

Розв'язок

У колі рис. 2.2, а позначимо умовно позитивні напрямки всіх струмів.

1 Усунемо вплив джерела струму J і визначимо, чому дорівнюють струми в резисторах, створені лише за рахунок впливу джерела напруги E_1 . На місці вмикання джерела струму J залишимо в колі його внутрішній опір ($R \rightarrow \infty$). При цьому коло набере вигляду рис. 2.2, б.

У колі рис. 2.2, б наявне одне джерело напруги. Обчислення струмів у резисторах R_1 , R_3 та R_4 виконаємо за законом Ома:

$$I'_2 = 0; \quad I'_1 = I'_3 = I'_4 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4}.$$

2 Усунемо вплив джерела напруги E_1 і визначимо, чому дорівнюють струми в резисторах, створені лише за рахунок впливу джерела струму J .

На місці вмикання джерела напруги E_1 залишимо в колі його внутрішній опір ($R = 0$). При цьому коло набере вигляду рис. 2.2, в.

Вочевидь, що $I''_3 = I''_4$, а $I''_2 = J$. Струми I''_1 та I''_3 обчислюємо за формулою "чужого" опору:

$$I''_1 = J \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_3 + R_4};$$

$$I''_3 = J \frac{R_1}{R_1 + R_3 + R_4}.$$

3 Тепер, враховуючі напрямки струмів у колах рис. 2.2, б та в, а також їхні величини, можна визначити величину й дійсний напрямок струмів у вихідному колі рис. 2.2, а:

$I_1 = I'_1 - I''_1$, якщо $|I'_1| > |I''_1|$ і спрямовано струм I_1 у бік струму I'_1 ;

$I_4 = I_3 = I'_3 + I''_3$ і спрямовано I_3 у бік струмів I'_3 і I''_3 ; $I_2 = I'_2 + I''_2 = J$.

Отже, аналіз кола за методом накладання зводиться до обчислювання кількох кіл (за кількістю джерел у вихідному колі) з одним джерелом.

2.5 Метод еквівалентного генератора

Метод еквівалентного генератора доцільно застосовувати в тих випадках, коли треба визначити струм (чи напругу) лише в одній з гілок кола.

Цей метод можна подати у двох варіантах:

- 1 метод еквівалентного джерела напруги,
- 2 метод еквівалентного джерела струму.

Обидва методи ґрунтуються на теоремі про еквівалентний генератор (див. 1.9), що у свою чергу складається з двох частин відповідно.

Розглянемо метод еквівалентного джерела напруги, який базується на теоремі про еквівалентне джерело напруги.

Відповідно до даного методу, гілка, в якій треба визначити струм, розмикається й відносно точок розривання визначають напругу й опір кола, яке залишилося. При визначанні опору всі джерела кола замінюються на власні внутрішні опори. Потім невідомий струм гілки визначається відповідно до теореми про еквівалентне джерело напруги.

Розглянемо приклад. Дано коло, рис. 2.3, а.

Задано значення E_1, E_2, R_1, R_2, R_3 і R_4 . Треба визначити струм у резисторі R_4 .

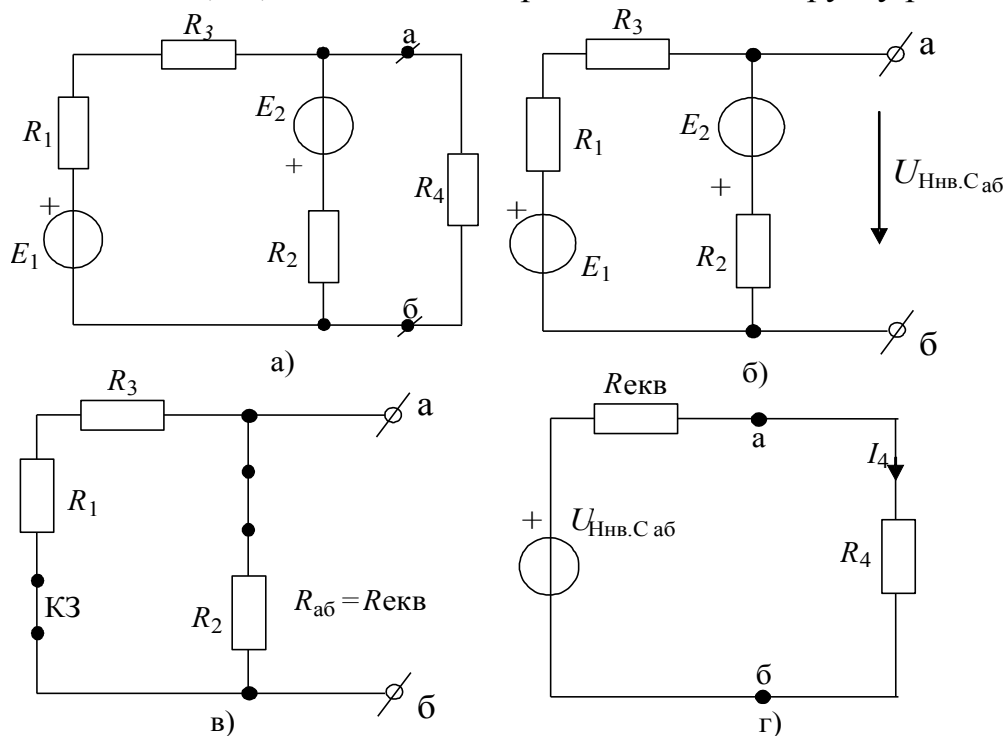


Рисунок 2.3 – До обчислювання методом еквівалентного джерела напруги
 а – вихідне коло; б – визначення напруги ненавантаженого стану;
 в – визначення еквівалентного опору; г – визначення шуканого току

Розв'язок

1 Вимикаємо гілку, в якій треба відзначити струм, від решти кола й у точках вимикання (точки а, б) визначаємо напругу ненавантаженого стану $U_{\text{Ннв.С аб}}$ (див. рис. 2.3, б).

$$U_{\text{Ннв.С аб}} = -E_2 + I R_2,$$

де

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

2 Визначаємо еквівалентний опір $R_{\text{екв}}$ (рис. 2.3, в) відносно точок а та б:

$$R_{\text{екв}} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

3 Застосовуючи теорему про еквівалентне джерело напруги, визначаємо струм у резисторі R_4 (див. рис. 2.3, г):

$$I_4 = \frac{U_{\text{ННВ.Саб}}}{R_{\text{екв}} + R_4}.$$

При використуванні методу еквівалентного джерела струму гілка, в якій треба визначити струм, замикається накоротко й визначається струм короткого замикання.

Потім визначається опір кола за вимкненої гілки, в якій треба визначити струм, у такий самий спосіб, як і за методом еквівалентного джерела напруги. Напруга гілки R_4 визначається відповідно до теореми про джерело струму:

$$U_4 = \frac{I_{\text{кз}}}{G_{\text{екв}} + G_4}, \text{ де } I_{\text{кз}} - \text{струм короткого замикання, } G_{\text{екв}} = \frac{1}{R_{\text{екв}}}, G_4 = \frac{1}{R_4} \text{ (рис. 2.4).}$$

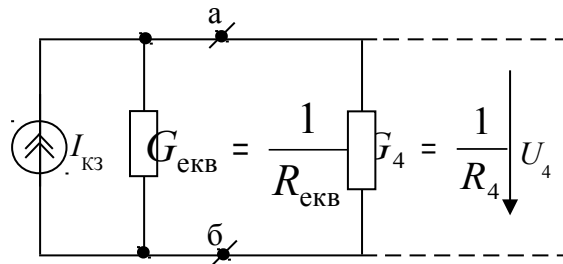


Рисунок 2.4 – До обчислювання методом еквівалентного джерела струму

2.6 Метод контурних струмів

Використовуючи засаду дуальності (див. 1.9), стосовно методу вузових напруг (див. 2.2), можна здобути рівняння, складені відповідно до методу контурних струмів.

Рекомендуються всі викладки для цього методу виконати самостійно.

Контрольні запитання

- 1 В який спосіб можна записати й сформулювати закони Кірхгофа?
- 2 Скільки рівнянь треба скласти для електричного кола, користуючись методом законів Кірхгофа?
- 3 Скільки рівнянь треба скласти, обчислюючи коло за методом вузових напруг?
- 4 В який спосіб визначається власна провідність вузла?
- 5 В який спосіб визначається взаємна провідність поміж двома вузлами кола?
- 6 В який спосіб визначається вузовий струм?
- 7 У чому полягає поняття “опорний” вузол?

- 8 Яку засаду покладено у підгрунття методу суперпозиції й у чому полягає його суть?
- 9 На якій теоремі базується метод еквівалентного генератора?
- 10 З яких варіантів складається метод еквівалентного генератора?
- 11 У яких випадках доцільно застосовувати метод еквівалентного генератора?
- 12 Скільки рівнянь треба скласти для ЛЕК, користуючись методом контурних струмів?
- 13 В який спосіб визначається власний опір контура?
- 14 В який спосіб визначається взаємний опір контурів?
- 15 В який спосіб визначається контурна напруга?
- 16 В який спосіб можна визначити струми в гілках за методом контурних струмів?

3 РЕЖИМ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

3.1 Гармонічні коливання. Основні поняття й означення

Окрім джерел постійних впливів (струмів та напруг), в електричних колах можуть діяти джерела, в яких струми й напруги змінюються в часі, наприклад періодично. Для періодичного коливання справедлива є рівність

$$i(t) = i(t + T),$$

де T – **період коливання**, тобто найменший проміжок часу, впродовж якого функція проходить всі свої значення й після якого значення функції $i(t)$ повторюються.

Найпоширенішим видом періодичного коливання в електричних колах є гармонічне. Миттєве значення гармонічного струму можна описати функцією синуса чи косинуса:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m \sin \psi_i(t), \quad (3.1)$$

де I_m – амплітуда, максимальне абсолютне значення синусоїдного коливання;

φ_i – початкова фаза коливання (радіани чи градуси);

$\psi_i(t) = \omega t + \varphi_i$ – поточна фаза коливання;

$\omega = d\psi_i / dt$ – кутова частота, котра являє собою швидкість змінювання аргумента (рад/с).

Період T та кутова частота ω пов'язані співвідношенням

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Кількість періодів в одиницю часу називають **циклічною частотою** – $f = 1 / T$. Одиницею виміру частоти є герц (Гц). У європейських країнах прийнято стандартну частоту промислового змінного струму 50 Гц.

Вочевидь, що $\omega = 2\pi f$ рад/с.

Подане в (3.1) коливання може бути записано косинусоїдною функцією

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi'_i); \quad (3.2)$$

$$\varphi'_i = \varphi_i + \pi/2.$$

На рис. 3.1 наведено часову діаграму гармонічного струму.

У телекомунікаційних технологіях використовують гармонічні коливання від одиниць герців до сотень гігагерц.

Окрім величини амплітуди I_m струму, у гармонічному коливанні розрізняють діюче значення I й середнє $I_{\text{сеп.}}$. **Діюче значення** гармонічного струму $i(t)$ (його називають ще середньоквадратичним) визначається за формулою:

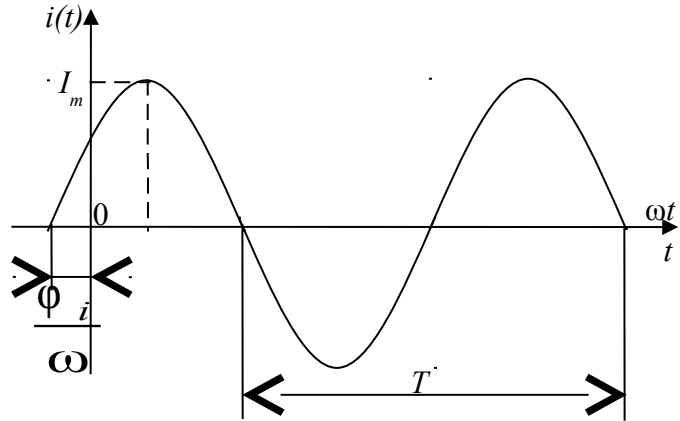


Рисунок 3.1 – Часова залежність гармонічного струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3.3)$$

За струмом

$$i(t) = I_m \cos \omega t \quad (3.4)$$

$$\int_0^T i^2 dt = \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt = (I_m^2 / 2) \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt = (I_m^2 / 2) T.$$

Згідно з (3.3),

$$I = I_m / \sqrt{2} \approx 0,707 I_m. \quad (3.5)$$

В аналогічний спосіб визначається діюче значення гармонічної напруги:

$$U \approx 0,707 U_m.$$

Піднісши (3.3) до квадрата і помноживши обидві частини дістаного виразу на RT , визначимо теплову енергію, яка виділяється гармонічним коливанням $i(t)$ за період T у резистивному елементі з опором R :

$$w_R = \int_0^T p dt = \int_0^T Ri^2 dt = TRI^2 \quad (3.6)$$

Звідси випливає, що діюче значення гармонічного струму дорівнює за величиною такому постійному струмові, який, протікаючи через опір R за час, дорівнюваний T , виділяє таку саму кількість тепла, що й гармонічний струм.

Природно, що середнє значення гармонічного струму (напруги) за період

$$I_{\text{сеп}} = 1/T \int_0^T i dt \quad (3.7)$$

дорівнює нулеві, тому що площа позитивної півхвилі компенсується площею негативної півхвилі гармонічної функції (див. рис. 3.1). У зв'язку з цим використовується поняття середнього півперіодового значення:

$$I'_{\text{сеп}} = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} i dt = \frac{2I_m}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} \sin \omega t \Big|_{-T/4}^{T/4} = (2/\pi) I_m \approx 0,637 I_m. \quad (3.8)$$

Аналогічно середнє півперіодове значення гармонійної напруги

$$U_{\text{сеп}}(1) \approx 0,637 U_m.$$

3.2 Спектральне (частотне) подавання гармонічних коливань

Гармонічний струм $i(t)$ подано часовою діаграмою рис. 3.1. Часове подавання гармонічних коливань є наочне, але при розв'язанні завдань аналізування кін воно потребує громіздких тригонометричних перетворювань. Далі буде розглянуто й інші способи подавання гармонічних коливань, вибір яких залежить від характеру поставленого завдання.

Гармонічне коливання $i(t)$ (див. рис. 3.1) повністю схарактеризовуються такими головними параметрами: амплітудою I_m , кутовою частотою ω й початковою фазою φ_i . Ці параметри використовуються за спектрального подавання гармонічних коливань у вигляді амплітудного й фазового спектрів. Амплітудний та фазовий спектри відбиваються за допомогою відрізків ліній, відповідних значенням амплітуд та початкових фаз у прямокутній системі координат.

На рис. 3.2 подано амплітудний (рис. 3.2, а) і фазовий (рис. 3.2, б) спектри гармонічного струму, заданого рівнянням

$$i_I(t) = I_{m1} \cos (\omega_1 t + \varphi_1). \quad (3.9)$$

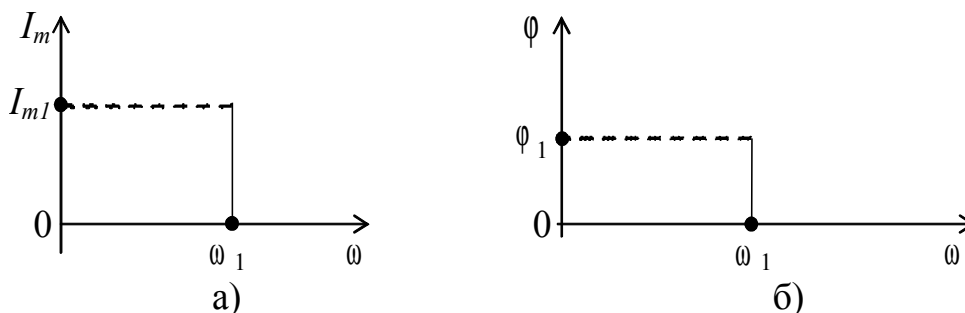


Рисунок 3.2 – Спектри гармонічного коливання:

а – спектр амплітуди; б – спектр початкової фази

Спектральне подавання гармонічних коливань у низці випадків є значно зручніше за часове. Надалі докладно розглядається спектральне подавання гармонічних коливань та методи, ґрунтовані на ньому.

3.3 Гармонічні коливання в пасивних елементах

Резистивний елемент

Якщо до резистивного елемента з опором R прикладено гармонічну напругу:

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u), \quad (3.10)$$

то, за законом Ома, через цей резистор протікатиме струм

$$i = u / R = (U_m / R) \cos(\omega t + \varphi_u) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i), \quad (3.11)$$

де амплітуда струму

$$I_m = U_m / R;$$

початкова фаза

$$\varphi_i = \varphi_u = \varphi.$$

Отже, напруга на затискачах резистора й струм, який ним протікає, збігаються за фазою: $\varphi_u - \varphi_i = 0$.

Миттєва потужність, виділювана в резистивному елементі:

$$p = ui = U_m I_m \cos^2(\omega t + \varphi) = UI[1 + \cos 2(\omega t + \varphi)] = UI + UI \cos 2(\omega t + \varphi). \quad (3.12)$$

З (3.12) випливає, що миттєва потужність, виділювана в резисторі, має дві складові:

сталу – UI і гармонічну $UI \cos 2(\omega t + \varphi)$ складову подвоєної частоти 2ω . У зв'язку з тим, що напруга й струм збігаються за фазою на резистивному елементі, миттєва потужність P завжди є позитивна. Це означає, що в резисторі відбуваються необоротні втрати енергії.

На рис. 3.3 подано часові діаграми струму, напруги й миттєвої потужності на резистивному елементі.

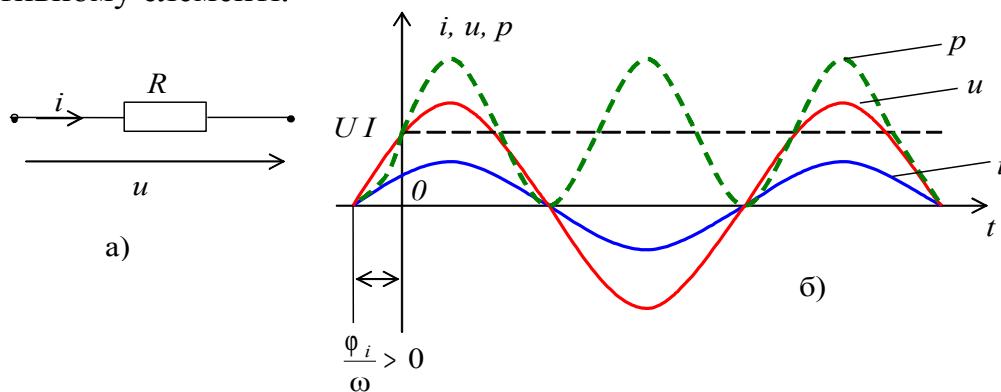


Рисунок 3.3 – Часові залежності u , i , p резистивного елемента:

а – резистивний елемент; б – залежності $i(t)$, $u(t)$, $p(t)$

Середнє за період T значення потужності, яка виділяється в резисторі,

$$P_{\text{сеп}} = 1/T \int_0^T p dt = 1/T \int_0^T u i dt \quad (3.13)$$

називається **активною потужністю** й вимірюється у ватах (Вт). З виразу (3.12) та рис. 3.3 видно, що

$$P_{\text{сер}} = UI = I^2 R = U^2 G. \quad (3.14)$$

Індуктивний елемент

Через індуктивний елемент протікає струм

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i).$$

Відповідно до рівняння індуктивного елемента, напруга на ньому

$$u = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_m \cos(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u), \quad (3.15)$$

де

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2},$$

$$U_m = I_m \omega L, \quad U = I \omega L.$$

Величина ωL має розмірність опору, називається **індуктивним опором** і позначається X_L . Зворотна до неї величина

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$$

називається **індуктивною провідністю**. Отже,

$$I_m = B_L U_m, \quad I = B_L U.$$

З (3.15) випливає, що початкові фази струму й напруги на індуктивному елементі відрізняються на кут $\pi/2$. Прийнято вважати, що напруга на індуктивному елементі випереджає струм на кут $\pi/2$.

Миттєва потужність, яка надходить до індуктивного елемента, визначається виразом

$$p = ui = UI \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_i) = \omega L I^2 \sin(2\omega t + 2\varphi) \quad (3.16)$$

і змінюється за гармонічним законом з подвоєною частотою (у цьому вираженні напруга й струм індуктивного елемента відповідають рис. 3.4).

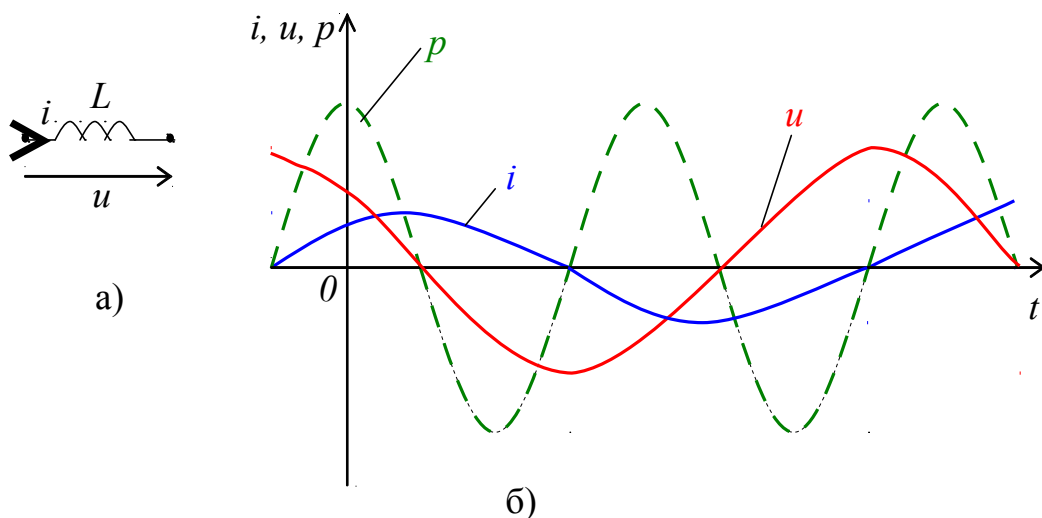


Рисунок 3.4 – Часові залежності u , i , p індуктивного елемента:

а – індуктивний елемент; б – залежності $i(t)$, $u(t)$, $p(t)$

Наявність негативних ділянок свідчить про те, що індуктивність віддає енергію. Вочевидь, що середня потужність за період в індуктивному елементі дорівнює нулеві.

Енергія магнітного поля індуктивності:

$$w_L = \frac{L i^2}{2} = \frac{L I_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_i) = \frac{L I_m^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_i)] \quad (3.17)$$

змінюється з частотою 2ω у межах від 0 до $L I_m^2/2$. Вона дорівнює нулеві, коли струм індуктивності дорівнює нулеві й сягає максимуму за амплітудного значення струму. Отже, відбувається обмін енергією поміж джерелом та індуктивним елементом. Надходячи від джерела, енергія нагромаджується в магнітному полі індуктивності й потім повертається до джерела за зникнення магнітного поля.

Ємнісний елемент

Нехай до ємнісного елемента прикладено напругу

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u).$$

Відповідно до рівняння ємнісного елемента, струм

$$i = C \frac{du}{dt} = -\omega C U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \cos(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (3.18)$$

де

$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Амплітудні й діючі значення струму й напруги пов'язані співвідношенням

$$I_m = \omega C U_m; \quad I = \omega C U.$$

Величина

$$B_C = \omega C$$

має розмірність провідності й називається **ємнісною провідністю**. Зворотна до неї величина, відповідно, є **ємнісним опором**

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Початкові фази ємнісного струму й напруги відрізняються на кут $\pi/2$. Узвичаємо вважати, що напруга на ємності відстає від струму на кут $\pi/2$.

Часові діаграми струму й напруги ємності наведено на рис. 3.5.

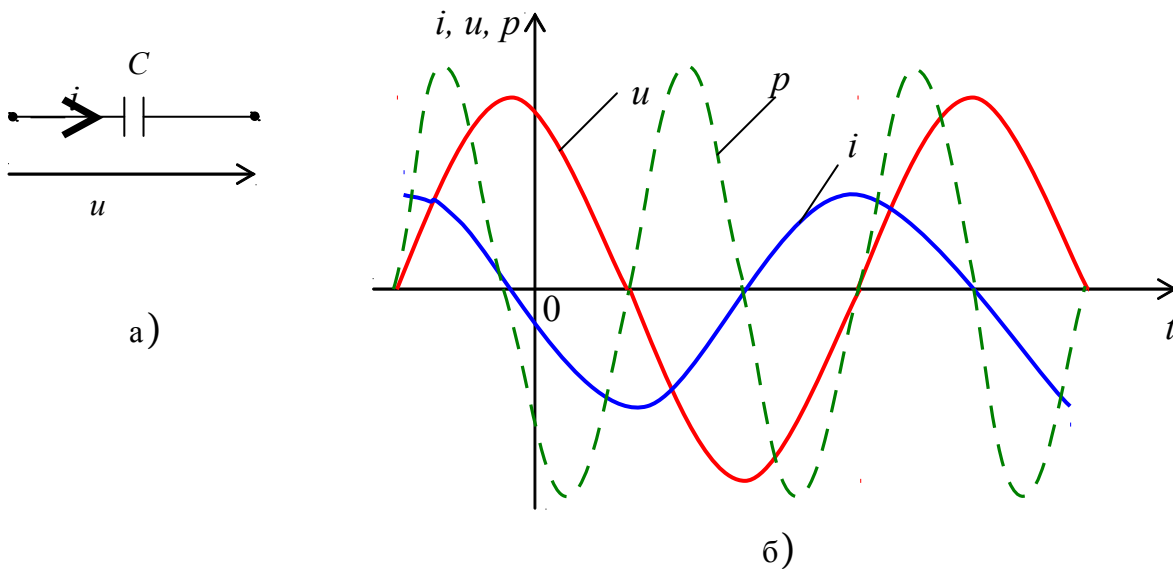


Рисунок 3.5 – Часові залежності u , i , p ємнісного елемента:
а – ємнісний елемент; б – залежності $i(t)$, $u(t)$, $p(t)$

Миттєва потужність, яка надходить до ємнісного елемента, має той самий характер, що й у разі індуктивного елемента:

$$p = ui = UI \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u) = \omega C U^2 \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \quad (3.19)$$

При цьому середня потужність за період у ємнісному елементі дорівнює нулеві. Енергія, пов'язана з електричним полем ємнісного елемента, визначається як

$$w_c = \int_0^T p dt = \frac{C u^2}{2} \quad (3.20)$$

Так само як в індуктивному колі, у ємнісному відбувається обмін енергією поміж джерелом та ємністю. Надходячи від джерела, енергія нагромаджується в електричному полі ємності й потім повертається до джерела за зникнення електричного поля.

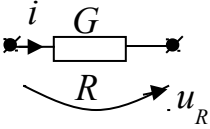
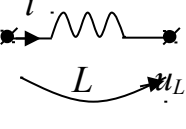
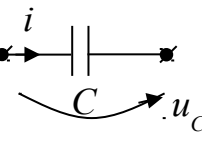
На завершення слід зазначити, що визначання діючих значень струму й напруги (3.3), а також середньої потужності за період (3.13) є слушні для періодичних напруг та струмів якої завгодно форми.

З розглянутого вище режиму гармонічних коливань у лінійних електричних колах впливає надто важливий висновок:

якщо в лінійному колі, що містить R , L , C елементи, діє гармонічне джерело певної частоти $\omega_{дж}$, то напруги й струми, котрі виникають на всіх ділянках цього кола, змінюються також за гармонічним законом з тією самою частотою.

У табл. 3.1 наведено рівняння елементів кола в часовій формі для миттєвих та діючих значень за гармонічного режиму.

Таблиця 3.1 – Рівняння елементів кола

Елемент	Часова форма	Гармонічний режим	
		миттєві значення	діючі значення
Резистивний 	$u_R = Ri$ $i_G = Gu$	$u_R = RI_m \cos(\omega t + \varphi)$ $i_R = GU_m \cos(\omega t + \varphi)$	$U = RI$ $I = GU$
Індуктивний 	$u_L = L \frac{di}{dt}$ $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$	$u_L = \omega LI_m \cos(\omega t + \varphi)$ $i_L = \frac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$	$U = \omega LI$ $I = \frac{1}{\omega L} U$
Ємнісний 	$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$ $i_C = C \frac{du}{dt}$	$u_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \varphi)$ $i_C = \omega C U_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$	$U = \frac{1}{\omega C} I$ $I = \omega C U$

3.4 Векторне подавання гармонічних коливань однієї частоти

При аналізуванні електричних кіл векторне подавання гармонічного коливання є більше зручною формою, аніж часове.

Вище зазначалося, що в лінійному колі з гармонічним джерелом певної частоти $\omega_{дж}$ всі струми й напруги мають також гармонічний характер тієї самої частоти. Це дозволяє при аналізуванні кола вилучити частоту $\omega_{дж}$ з числа аргументів коливань струмів та напруг і схарактеризувати їх лише за двома параметрами – амплітудою й початковою фазою. При цьому кожному коливанню ставиться у відповідність обертий вектор певної довжини із заданою початковою фазою. Ці вектори зображуються в полярній системі координат, і всі операції над ними виконуються відповідно до векторної алгебри.

Застосовування векторного подавання гармонічних коливань пропонується розглянути на прикладі кола рис. 3.6.

При проходженні через це коло гармонічного струму

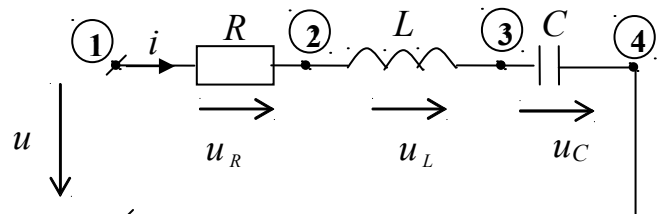


Рисунок 3.6 – Послідовне RLC коло

$$i = I_m \cos \omega t$$

на його затискачах створюється гармонічна напруга, яка за ЗНК має вигляд

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Відповідно до таблиці 3.1,

$$u = RI_m \cos \omega t + \omega LI_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

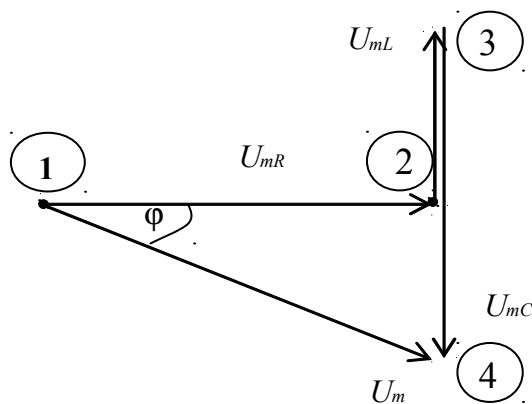
Сумі гармонічних коливань відповідає сума векторів:

$$RI_m \angle 0 + \omega LI_m \angle \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\omega C} I_m \angle -\frac{\pi}{2} = U_m \angle \varphi,$$

або

(3.21)

$$U_{mR} \angle 0 + U_{mL} \angle \frac{\pi}{2} + U_{mC} \angle -\frac{\pi}{2} = U_m \angle \varphi.$$



На рис. 3.7 подано цю векторну суму в полярній системі координат, причому початок кожного наступного вектора відповідає кінцеві попереднього. Така векторна діаграма називається **топографічною**. Дану діаграму зображено для випадку $X_L < X_C$.

З рис. 3.7 витікає, що амплітуда прикладеної напруги:

Рисунок 3.7 – Векторна діаграма напруги в колі

$$U_m = \sqrt{U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2},$$

а початкова фаза її

$$\varphi = \arctg \frac{U_{mL} - U_{mC}}{U_{mR}}.$$

Маючи у розпорядженні ці параметри прикладеної до кола рис. 3.6 напруги, дістають її миттєве значення

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Використовування векторних діаграм робить аналізування кіл у гармонічному режимі наочним і є зручним способом перевірки обчислень. Приклад зображення векторної діаграми струмів для паралельного контура, пропонується виконати самостійно.

Контрольні запитання

1 Яка напруга (струм) називається гармонічною?

- 2 Що називається миттєвим, середнім та діючим значеннями гармонічного струму (напруги)?
- 3 Як відрізняються початкові фази струму й напруги в індуктивності (ємності)?
- 4 Що таке векторні діаграми напруг? Струмів?
- 5 Яким чином можна подати гармонічне коливання?
- 6 Що собою являє індуктивний опір? Провідність?
- 7 Що собою являє ємнісний опір? Провідність?

4 МЕТОД КОМПЛЕКСНИХ АМПЛІТУД (СИМВОЛІЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУВАННЯ)

4.1 Подавання гармонічних коливань за допомогою комплексних чисел

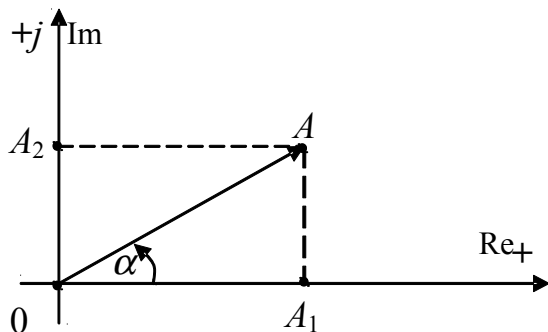


Рисунок 4.1 – Точка A на комплексній площині (Re – дійсна вісь, Im – уявна вісь)

Відомо, що кожна точка на комплексній площині визначається радіус-вектором цієї точки. Так називають вектор, початок якого збігається з початком координат, а кінець перебуває в точці, яка відповідає даному комплексному числу (рис. 4.1). У **полярній**, чи **показниковій** формі певне комплексне число $\dot{A}$ подається в такий спосіб:

$\dot{A} = A \angle \alpha = A e^{j\alpha}$ де A – модуль, α – аргумент, $j = \sqrt{-1}$.

Re

Застосувавши формулу Ейлера, дістають тригонометричну форму запису комплексного числа:

$$\dot{A} = A \cos \alpha + j A \sin \alpha$$

або відповідно алгебричну форму:

$$\dot{A} = A_1 + j A_2, \text{ де } A_1 = A \cos \alpha; A_2 = A \sin \alpha.$$

Цілковито є очевидно, що

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}.$$

Якщо вектор обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω , то кожного моменту часу його положення визначається комплексною величиною

$$A e^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{A} e^{j\omega t}, \quad (4.1)$$

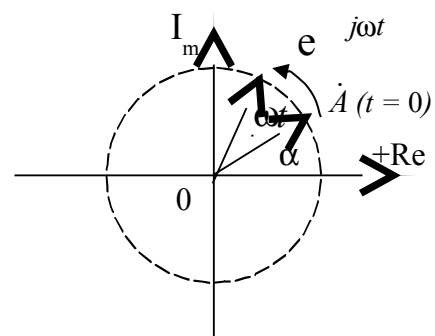


Рисунок 4.2 – Обертний вектор на комплексній площині

де

$$\dot{A} = A e^{j\alpha}$$

– комплексна амплітуда, яка являє собою даний вектор у момент $t = 0$ (рис. 4.2), тобто $\dot{A}$ – це комплексна величина, котра не залежить від часу. Модуль і аргумент, відповідно, дорівнюють амплітуді й початковій фазі гармонічного коливання.

Множення комплексної амплітуди $\dot{A}$ на оператор обертання $e^{j\omega t}$ означає поворот вектора $\dot{A}$ на кут ωt в позитивному напрямку. Із тригонометричної форми комплексної функції (4.1)

$A e^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + j A \sin(\omega t + \alpha)$ випливає, що гармонічна функція $A \cos(\omega t + \alpha)$ може розглядатися як дійсна частина комплексної функції (4.1), або як проекція обертого вектора на дійсну вісь. Умовно це записується в такий спосіб:

$$A \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}). \quad (4.2)$$

Якщо є струм $i = 14,1 \left(\cos \omega t + \frac{\pi}{6} \right)$, то вираження комплексної амплітуди цього струму ($I_m = 14,1$, $\varphi = \pi/6$) $\dot{I}_m = 14,1 e^{j\pi/6}$. При цьому комплексне діюче значення струму дорівнює

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = 10 e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

4.2 Рівняння пасивних елементів у комплексній формі

Комплексні струми й напруги за суттю своєю є символами (зображеннями) реальних гармонічних струмів та напруг.

Умовимося комплексним опором двополюсника Z , яким протікає комплексний струм $\dot{I}_m$, створюючий комплексну напругу $\dot{U}_m$, називати вираз:

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}.$$

Резистивний елемент

Якщо резистивним елементом опору R протікає гармонічний струм

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

якому відповідає комплексна амплітуда

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi},$$

то, відповідно до рівняння цього елемента $u = Ri$, на ньому виникає напруга

$$u = R I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

якій відповідає комплексна амплітуда

$$\dot{U}_m = R I_m e^{j\varphi}.$$

Тоді вочевидь, що

$$Z_R = \frac{RI_m e^{j\varphi}}{I_m e^{j\varphi}} = R. \quad (4.3)$$

Індуктивний елемент

Якщо індуктивним елементом протікає той самий струм

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow I_m e^{j\varphi},$$

то, відповідно до рівняння індуктивного елемента

$$u = L \frac{di}{dt},$$

виникає напруга

Тоді

$$u = \omega L I_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \omega L I_m e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$Z_L = \frac{\dot{U}_{mL}}{\dot{I}_{mL}} = \frac{\omega L I_m e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}}{I_m e^{j\varphi}} = \omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

За формулою Ейлера,

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j.$$

Підставивши це значення до останнього виразу, дістанемо

$$Z_L = j\omega L \quad (4.4)$$

або

$$Z_L = jX_L.$$

Ємнісний елемент

Аналогічно до резистивного і індуктивного елементів, для ємнісного елемента

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

або

$$Z_C = -jX_C. \quad (4.5)$$

4.3 Основні закони теорії електричних кіл у комплексній формі

Наведені вище рівняння пасивних елементів у комплексній формі мають однакову структуру:

$$\dot{U}_{mR} = \dot{I}_{mR} R; \quad \dot{U}_{mL} = \dot{I}_{mL} Z_L; \quad \dot{U}_{mC} = \dot{I}_{mC} Z_C,$$

тому вирази

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m Z; \quad (4.6a)$$

$$\dot{U} = \dot{I} Z, \text{ а } \dot{I} = \dot{U} \cdot Y, \quad (4.66)$$

де

$$Y = \frac{1}{Z}$$

називають **законом Ома в комплексній формі для амплітудних та діючих значень**. При цьому для комплексних струмів та напруг зберігається та сама система напрямків відліку, що прийнята для миттєвих значень струмів та напруг. Відповідно до першого закону Кірхгофа (ЗСК), у кожному вузлі кола, яке перебуває в режимі гармонічних коливань,

$$\sum_{k=1}^l i_k = \sum_{k=1}^l I_{mk} \cos(\omega t + \varphi_{ik}) = 0.$$

Замінивши миттєві значення струмів i_k на їхні комплексні амплітуди $\dot{I}_{mk}$, дістанемо:

для амплітудних значень струмів

$$\sum_{k=1}^l \dot{I}_{mk} = 0; \quad (4.7a)$$

для діючих значень струмів

$$\sum_{k=1}^l \dot{I}_k = 0. \quad (4.76)$$

Аналогічно, за другим законом Кірхгофа (ЗНК), для кожного контура

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_{mk} = 0 \quad (4.8a)$$

та

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = 0. \quad (4.86)$$

Звідси випливає, що існує повна аналогія запису основних законів для кіл постійного струму й для кіл, які перебувають у режимі гармонічних коливань. Тому всі методи аналізування кіл постійного струму є формально справедливі й для кіл за гармонічних впливів.

4.4 Система вузлових рівнянь для комплексних амплітуд коливань

Розглянемо аналізування кола в режимі гармонічних коливань методом вузлових напруг.

У канонічній формі запису система рівнянь для комплексних амплітуд коливань відрізняється від системи, складеної для кола постійного струму, лише позначаннями. Для спрощення позначань замість комплексних амплітуд $\dot{U}_m$, $\dot{I}_m$ узвичаєно складати рівняння для комплексних діючих значень

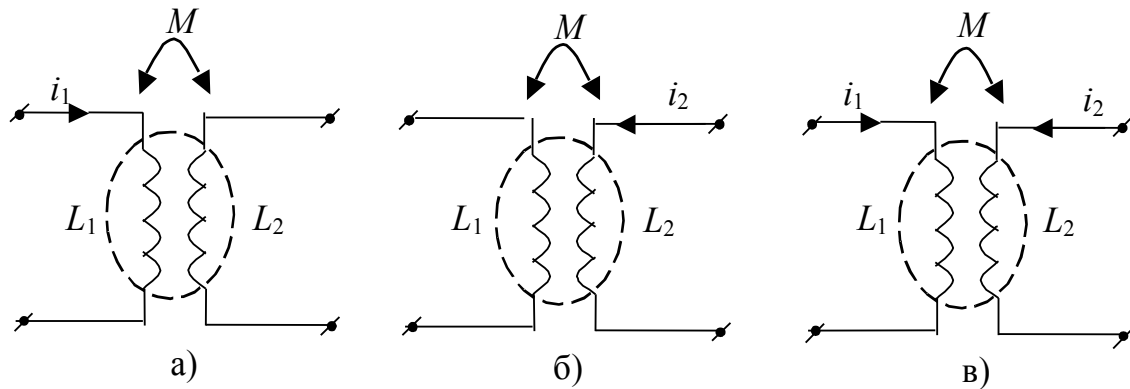


Рисунок 4.4 – Індуктивності, пов'язані спільним магнітним потоком

а – діє один струм i_1 ; б – діє один струм i_2 ;

в – діють два струми i_1 та i_2

Розглянемо випадок, коли індуктивністю L_1 протікає струм i_1 , а затискачі другої індуктивності розімкнuto (рис. 4.4, а). Частина магнітного потоку, створюваного струмом i_1 , пронизує обвитки другої індуктивності.

Потокозчеплення першої котушки (сума магнітних потоків, зчеплених з окремими обвитками індуктивності L_1) позначимо ψ_1 , а потокозчеплення другої індуктивності ψ_{12} . Обидва потокозчеплення пропорційні струму i_1

$$\psi_1 = L_1 i_1 \text{ і } \psi_{12} = M i_1,$$

де M – взаємна індуктивність. Одиниця виміру взаємної індуктивності M – генрі (Гн).

Взаємна індуктивність визначається співвідношенням

$$M = k \sqrt{L_1 L_2},$$

де коефіцієнт зв'язку k може набирати значення $0 \leq k \leq 1$. Коли весь магнітний потік, який пронизує обвитки однієї індуктивності, пронизує й обвитки іншої, $k = 1$ (так званий **твердий зв'язок**). За відсутності зв'язку поміж індуктивностями $k = 0$.

Аналогічно, при протіканні струму i_2 через індуктивність L_2 (рис. 4.4, б), коли затискачі першої індуктивності розімкнuto, $\psi_2 = L_2 i_2$ й $\psi_{21} = M i_2$.

Коли струми протікають через обидві індуктивності (рис. 4.4, в), спільне потокозчеплення першої й другої має вигляд

$$\psi_{11} = \psi_1 \pm \psi_{21} \quad \text{та} \quad \psi_{22} = \psi_2 \pm \psi_{12}$$

чи

$$\psi_{11} = L_1 i_1 \pm M i_2 \quad \text{і} \quad \psi_{22} = \pm M i_1 + L_2 i_2.$$

(4.10)

Знаки доданків в (4.10) залежать від напрямку магнітних потоків в індуктивностях. А напрямок магнітних потоків залежить від напрямку струмів, які протікають через індуктивності. Якщо індуктивності увімкнено у такий спосіб, що потокозчеплення ψ_1 та ψ_{21} , (а отже ψ_2 та ψ_{12}) складаються, то таке увімкнення називається узгодженим і в (4.10) йому відповідає знак «плюс», а знак «мінус» відповідає зустрічному вмиканню, коли потокозчеплення віднімаються.

Для зручності зображування схем електричних кіл з взаємною індуктивністю впроваджується поняття однойменних затискачів. **Однойменними затискачами** називають вузли, відносно яких однаково зорієнтовані струми створюють магнітні потоки, які складаються.

На рис. 4.5 позначено однойменні затискачі для випадку узгодженого (рис. 4.5, а) й зустрічного (рис. 4.5, б) вмикання індуктивностей L_1 та L_2 .

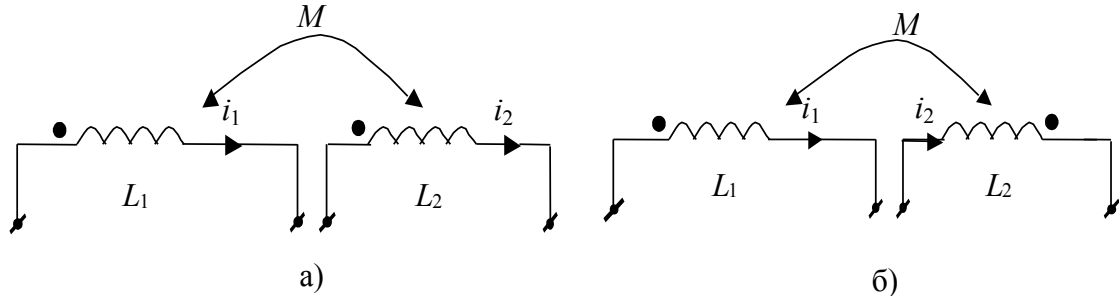


Рисунок 4.5 – Вмикання індуктивностей: а – узгоджене; б – зустрічне

Продиференціювавши рівняння (4.10) за змінною t , відзнаходимо співвідношення поміж струмами й напругами на зовнішніх затискачах двох пов'язаних індуктивностей:

Якщо коло перебуває в режимі гармонічних коливань, то в комплексній формі ці співвідношення наберуть вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Аналогічно враховуються індуктивні зв'язки й у більш складних випадках, коли спільним магнітним потоком охоплено три й більш індуктивності:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M_{12} \dot{I}_2 \pm j\omega M_{13} \dot{I}_3 \pm \dots \pm j\omega M_{1N} \dot{I}_N; \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M_{23} \dot{I}_3 \pm \dots \pm j\omega M_{2N} \dot{I}_N; \\ \dot{U}_3 &= \pm j\omega M_{31} \dot{I}_1 \pm j\omega M_{32} \dot{I}_2 + j\omega L_3 \dot{I}_3 \pm \dots \pm j\omega M_{3N} \dot{I}_N; \\ &\vdots \\ \dot{U}_N &= \pm j\omega M_{N1} \dot{I}_1 \pm j\omega M_{N2} \dot{I}_2 \pm j\omega M_{N3} \dot{I}_3 \pm \dots + j\omega L_N \dot{I}_N. \end{aligned}$$

4.5.2 Послідовне сполучування зв'язаних індуктивностей

Розглянемо послідовне узгоджене вмикання індуктивностей з втратами (рис. 4.6, а). Згідно із законом Кірхгофа, напруга на зовнішніх затискачах зазначеного кола в комплексній формі

$$\dot{U} = (R_1 + R_2) \dot{I} + j\omega (L_1 + L_2 + 2M) \dot{I}. \quad (4.13)$$

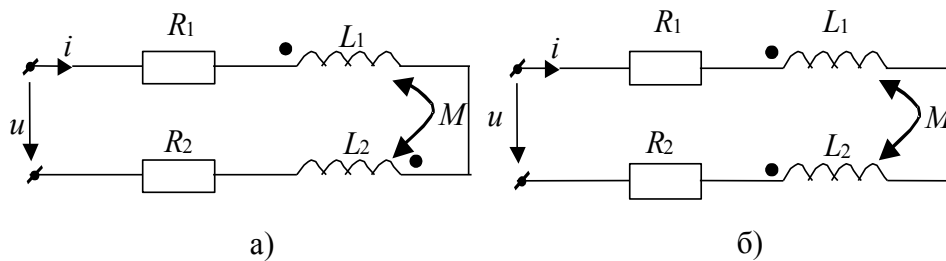


Рисунок 4.6 – Послідовне сполучування двох індуктивностей:
а – узгоджене; б – зустрічне.

Звідси комплексний еквівалентний опір кола за узгодженого вмикання індуктивностей:

де

$$Z_{E.Y} = R_E + j\omega L_{E.Y},$$

Тоді рівняння (4.13) можна записати у вигляді

$$R_E \dot{U} = R_1 \dot{U}_1 + R_2 \dot{U}_2 = U e^{j\varphi_u} = L_1 + L_2 + 2M. \quad (4.15)$$

Зсув фаз поміж прикладеною напругою й струмом:

$$\varphi_{EY} = \varphi_u - \varphi_i = \arctg \frac{\omega L_{EY}}{R_E} \quad (4.16)$$

Комплексна напруга на кожній індуктивності з втратами за узгодженого вмикання

$$\dot{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 + M)]\dot{I} \text{ й } \dot{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 + M)]\dot{I}.$$

За зустрічного вмикання індуктивностей (рис. 4.6, б) комплексний еквівалентний опір кола

де

$$Z_{E3} = R_E + j\omega L_{E3},$$

Зсув фаз поміж прикладеною напругою й струмом

$$L_{E3} = L_1 + L_2 - 2M. \quad (4.17)$$

Комплексна напруга на кожній індуктивності за зустрічного їхнього вмикання має вигляд

$$\dot{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 - M)]\dot{I} \text{ й } \dot{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 - M)]\dot{I}.$$

Нижче подано векторні діаграми напруг за узгодженого (рис. 4.7, а) та зустрічного (рис. 4.7, б) вмикання котушок L_1 та L_2 .

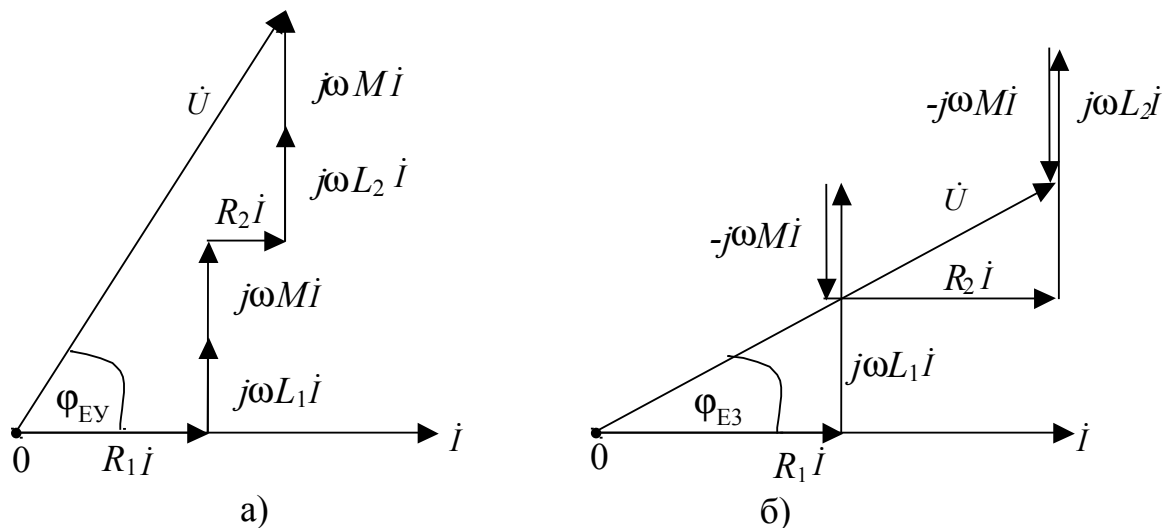


Рисунок 4.7 – Векторна діаграма напруг кола рис. 4.6:
а – за узгодженого; б – за зустрічного вмикання

4.5.3 Особливості аналізування індуктивно сполучених кіл. Розв'язка індуктивних зв'язків

Зазвичай при обчисленні індуктивно сполучених кіл використовують метод струмів гілок, або метод контурних струмів. Метод вузлових напруг і метод еквівалентного генератора є неприйнятні через наявність індуктивних зв'язків.

Для того щоби можна було використовувати всі відомі методи обчислювання, застосовують перетворювання кола, називане **розв'язкою індуктивних зв'язків**.

Нижче подано дві зв'язані індуктивності, сполучені у вузлі однойменними затискачами (рис. 4.8, а), а на рис. 4.8, б зображено еквівалентну заміну цього сполучення після “розв'язки”, яка не містить у явному вигляді індуктивних зв'язків.

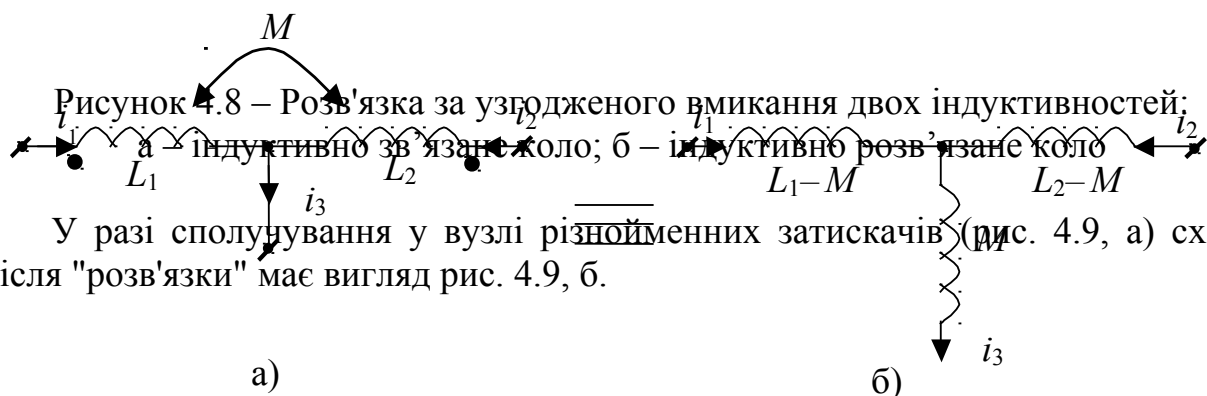


Рисунок 4.8 – Розв'язка за узгодженого вмикання двох індуктивностей;
а – індуктивно зв'язане коло; б – індуктивно розв'язане коло
У разі сполучування у вузлі різноіменних затискачів (рис. 4.9, а) схема після “розв'язки” має вигляд рис. 4.9, б.

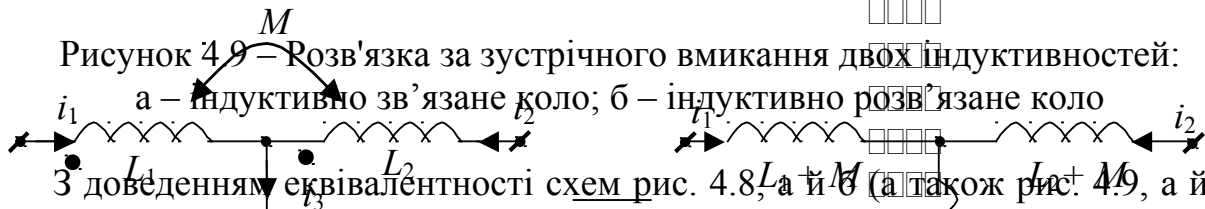


Рисунок 4.9 – Розв'язка за зустрічного вмикання двох індуктивностей:
а – індуктивно зв'язане коло; б – індуктивно розв'язане коло
З доведенням еквівалентності схем рис. 4.8, а й б (а також рис. 4.9, а й б), виконаним за законами Кірхгофа, можна ознайомитися в рекомендованій літературі.

а)

4.6 Баланс потужності

б)

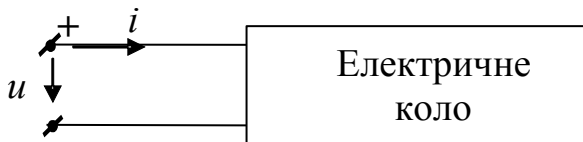


Рисунок 4.10 – Коло під впливом джерела

Нехай до входу певного пасивного електричного кола (рис. 4.10) підімкнено джерело гармонічної напруги

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u).$$

Під впливом цього джерела в колі протікає струм

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i).$$

За період T джерелом до кола віддається середня потужність

$$P_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \frac{1}{2} \cos(\varphi_u + \varphi_i) dt + \\ + \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = U I \cos \varphi,$$

де $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

$$P_{\text{сеп}} = U I \cos \varphi = z I \cdot I \cdot \cos \varphi = I^2 \cdot z \cdot \cos \varphi. \quad (4.19)$$

Середню потужність за період частіше називають *споживаною*. Вона залежить від середньоквадратичних значень струму I , напруги U і косинуса кута поміж ними. Якщо врахувати, що $Z = R + jX = z \cdot \cos \varphi + jz \cdot \sin \varphi$, то

$$z = \frac{R}{\cos \varphi}$$

і рівняння (4.19) можна подати в такий спосіб:

$$P_{\text{сеп}} = P = I^2 R = U^2 G. \quad (4.20)$$

Отже, середня за період потужність P дорівнює потужності, яка розсіюється на резистивному елементі (провідності). Звідси ще одна назва середньої потужності – **активна потужність**. Вимірюється активна потужність у ватах (Вт). Поряд з активною потужністю P у колах гармонічного струму використовується поняття **реактивної потужності**

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 X = U^2 B \quad (4.21)$$

та **комплексної потужності**

$$\tilde{S} = P + jQ = \dot{U} \cdot I^*, \quad (4.22)$$

де I^* – сполучений комплекс струму: якщо $\dot{I} = I \cdot e^{j\varphi}$, то $I^* = I \cdot e^{-j\varphi}$.

Модуль комплексної потужності називається **повною потужністю**

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (4.23)$$

Одиниця виміру реактивної потужності – ВАр; повної – вольт-ампер (В×А).

Використовуючи відомі співвідношення, потужності P , Q , S можна подати й у такій формі:

$$\tilde{S} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi. \quad (4.24)$$

Отже,

$$P = \operatorname{Re}[\dot{U} I^*] = \operatorname{Re}[\tilde{S}]; \quad Q = \operatorname{Im}[\dot{U} I^*] = \operatorname{Im}[\tilde{S}];$$

$$S = UI = |\tilde{S}|; \quad (4.25)$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (4.26)$$

Косинус φ в енергетиці **називають коефіцієнтом потужності**. Чим більше $\cos \varphi$, тим менше втрати енергії. Максимальне значення $\cos \varphi = 1$ за $P = S$, $Q = 0$ (тобто коло має чисто активний характер).

Розглянемо умову балансу потужності в колах за гармонійного впливу. Для цього запишемо теорему про потужність (Теллегена) у комплексній формі (так як закони Кірхгофа є слушні для комплексних діючих значень струмів $\dot{I}$ та напруг $\dot{U}$):

$$\sum_{k=1}^{n_\Gamma} \dot{U}_k \dot{I}_k = 0. \quad (4.27)$$

Враховуючи, що закони Кірхгофа є слушні і стосовно сполучених струмів I_k^* , то рівняння (4.27) можна подати в такий спосіб:

$$\sum_{k=1}^{n_\Gamma} \dot{U}_k I_k^* = \sum_{k=1}^{n_\Gamma} \tilde{S}_k^* = 0, \quad (4.28)$$

звідки випливає, що сума комплексних потужностей, споживаних всіма гілками кола, дорівнює нулеві. Це рівняння відбиває баланс комплексної потужності. Можна використовувати й інше формулювання балансу потужності: сума

комплексних потужностей, віддаваних джерелами, дорівнює сумі комплексних потужностей, споживаних іншими гілками електричного кола:

$$\sum_{k=1}^{n_{\Gamma}} \tilde{S}_{k \text{ джс}} = \sum_{k=1}^{n_{\Gamma}} \tilde{S}_{k \text{ спож}} \quad (4.29)$$

З (4.29) дістаємо умови балансу активних та реактивних потужностей:

$$\sum_{k=1}^{n_{\Gamma}} P_{k \text{ джс}} = \sum_{k=1}^{n_{\Gamma}} P_{k \text{ спож}}; \quad (4.30)$$

$$\sum_{k=1}^{n_{\Gamma}} Q_{k \text{ джс}} = \sum_{k=1}^{n_{\Gamma}} Q_{k \text{ спож}}. \quad (4.31)$$

4.7 Режим роботи джерел та умови передавання максимальної потужності

Активне двополюсне електричне коло, здатне генерувати гармонічні коливання, є джерелом гармонічних коливань. Відповідно до теореми про еквівалентний генератор, існують дві схеми заміщування джерела гармонічних коливань (рис. 4.11, а й б).

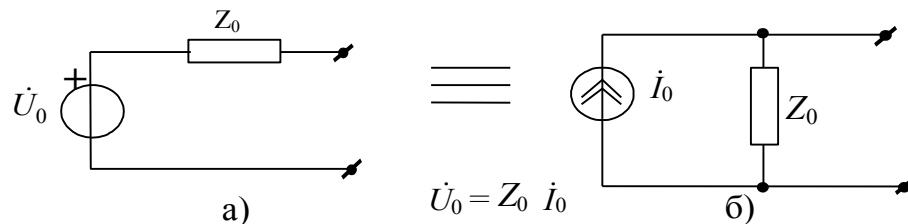


Рисунок 4.11 – Джерела: а – напруги; б – струму

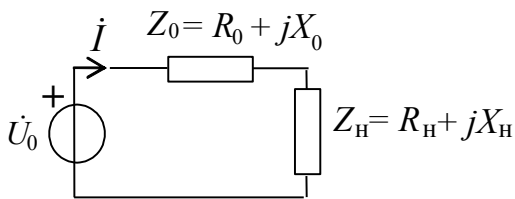


Рисунок 4.12 – Навантажене джерело напруги

Задаюча напруга джерела $\dot{U}_0$ (рис. 4.11, а) дорівнює комплексній напрузі на його розімкнених затискачах. Задаючий струм $\dot{I}_0$ (рис. 4.11, б) дорівнює комплексному струмові через коротко замкнуті затискачі. Комплексний опір двополюсника

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = R_0 + jX_0 \text{ називають } \textbf{внутрішнім}$$

опором джерела. Підімкнемо до джерела як навантаження певний двополюсник з опором

$$Z_H = R_H + jX_H$$

(рис. 4.12) і здобудемо умову виділення в ньому максимальної потужності. Відповідно до закону Ома, комплексний струм у колі рис. 4.12

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_0}{Z_0 + Z_H} = \frac{\dot{U}_0}{R_0 + R_H + j(X_0 + X_H)}.$$

При цьому активна потужність у навантаженні

$$P = I^2 R_n = \frac{U_0^2 R_n}{(R_0 + R_n)^2 + (X_0 + X_n)^2}.$$

Цілковито очевидно, що виділювана в навантаженні потужність буде максимальна, коли

$$X_0 + X_n = 0, \text{ тобто якщо } X_n = -X_0, \quad (4.32)$$

тоді

$$P = \frac{U_0^2 R_n}{(R_0 + R_n)^2}.$$

На рис. 4.13 наведено графік функції $P(R_n)$ (суцільна лінія). Максимального значення функція $P(R_n)$ набирає за

$$R_n = R_0. \quad (4.33)$$

Отже, виділення максимальної потужності в навантаженні в режимі гармонічних коливань є можливе, якщо опір навантаження сполучений з внутрішнім опором генератора:

$$Z_n = R_0 - jX_0.$$

У цьому разі говорять, що дже-

рело навантажене на сполучене навантаження. При цьому максимально можливе значення середньої потужності в навантаженні буде

$$P_{\text{макс}} = \frac{U_0^2}{4R_0}. \quad (4.34)$$

Коефіцієнт корисної дії джерела η за сполученого навантаження становить лише 50 % (бо на внутрішньому опорі генератора виділяється така сама середня потужність, що й у навантаженні). Зі збільшенням R_n середня потужність у навантаженні спадає, але к.к.д. зростає. Графік залежності к.к.д. джерела від R_n / R_0 подано на рис. 4.13 штриховою лінією. З умови (4.32) випливає, що забезпечити такий режим максимальної потужності можна лише на одній частоті чи у вузькому діапазоні частот.

У системах передавання інформації зазвичай опір навантаження обирають порівнюваним внутрішньому опорі генератора:

$$Z_n = Z_0 = R_0 + jX_0. \quad (4.35)$$

У цьому разі узвичаєно вважати, що джерело навантажене узгоджено. На рис. 4.14 наведено схему джерела, навантаженого узгоджено.

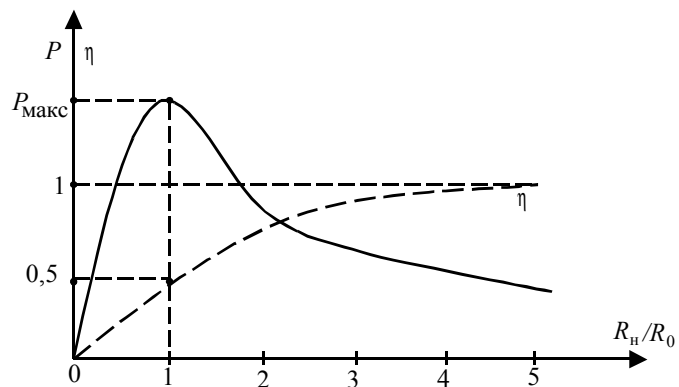


Рисунок 4.13 – Залежності активної потужності P і к.к.д. η від навантаження

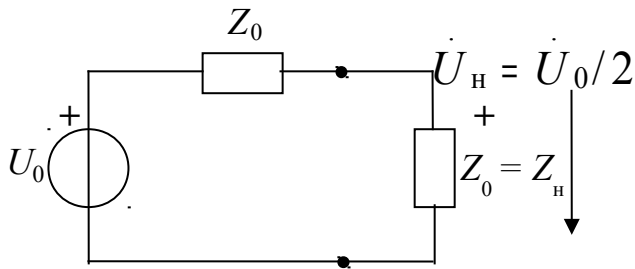


Рисунок 4.14 – Узгоджене вмикання навантаження

За узгодженого навантаження, незалежно від частоти, напруга на його затискачах завжди дорівнює половині напруги джерела. Далі буде доведено, що це дозволяє уникнути спотворювань передаваного таким колом сигналу.

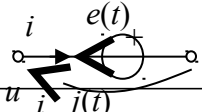
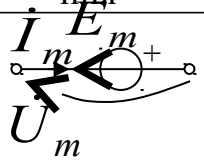
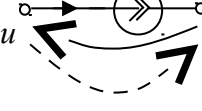
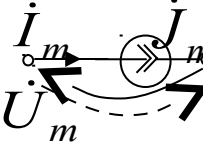
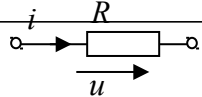
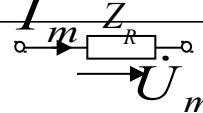
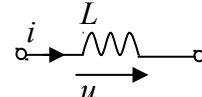
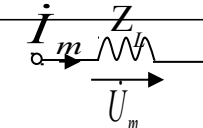
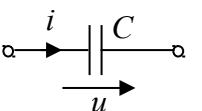
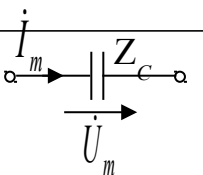
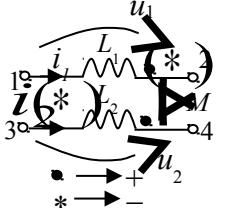
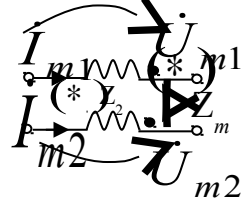
4.8 Порядок обчислювання лінійних електричних кіл методом комплексних амплітуд

- 1 Всі елементи вихідної схеми замінюються їхніми комплексними відображеннями в відповідності до табл. 4.1.
- 2 Визначаються комплексні опори (провідності) пасивних елементів кола.
- 3 Обирається оптимальний метод аналізування й складається система алгебричних рівнянь у комплексній формі.
- 4 Розв'язується система рівнянь щодо невідомих комплексних струмів та напруг.
- 5 Виконується перевірка обчислень складанням балансу потужностей у комплексній формі чи побудовою векторних діаграм.
- 6 Записуються миттєві значення струмів та напруг (оригінали) на підставі їхніх комплексних зображень.

Контрольні запитання

- 1 В який спосіб записуються комплексні значення струмів та напруг за гармонічного впливу?
- 2 Що називається комплексним опором (провідністю) двополюсника?
- 3 В який спосіб записуються рівняння за законами Кірхгофа й вузлові рівняння для комплексних амплітуд?
- 4 Які індуктивності називаються взаємозалежними?
- 5 В який спосіб обчислюють струми й напруги за зустрічного (узгодженого) вмикання індуктивностей?
- 6 Який вигляд мають рівняння балансу потужностей за гармонічного впливу?
- 7 За якої умови передається максимальна активна потужність від джерела в навантаження?

Таблиця 4.1 – Комплексні відповідності елементів

Елементи схем заміщування електричних кіл за довільних впливів $u(t)$, $i(t)$			Елементи схем заміщування електричних кіл для комплексних амплітудних значень $\dot{U}_m$ та $\dot{I}_m$		
назва	умовне зображення	зв'язок i з u	назва	умовне зображення	зв'язок $\dot{I}_m$ з $\dot{U}_m$
Ідеальне джерело напруги		$u = e(t)$ і не залежить від величини й напрямку струму i	Символічне зображення джерела напруги		$\dot{U}_m = \dot{E}_m$ і не залежить від $\dot{I}_m$, $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$
Ідеальне джерело струму		$i = j(t)$ і не залежить від величини й напрямку напруги	Символічне зображення джерела струму		$\dot{I}_m = \dot{J}_m$ і не залежить від $\dot{U}_m$. $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$
Опір		$u = iR$	Опір		$\dot{U}_m = Z_R \dot{I}_m$, $Z_R = R$
Індуктивність		$u = L \frac{di}{dt}$	Комплексне зображення індуктивності		$\dot{U}_m = Z_L \dot{I}_m$ $Z_L = j\omega L$
Ємність		$i = C \frac{du}{dt}$	Комплексне зображення ємності		$\dot{U}_m = Z_C \dot{I}_m$ $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$
Зв'язані індуктивності		$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$	Комплексне зображення зв'язаних індуктивностей		$\dot{U}_{m1} = Z_1 \dot{I}_{m1} \pm Z_M \dot{I}_{m2}$ $\dot{U}_{m2} = Z_2 \dot{I}_{m2} \pm Z_M \dot{I}_{m1}$ $Z_1 = j\omega L_1$, $Z_2 = j\omega L_2$, $Z_M = j\omega M$

5. АНАЛІЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ЗА ПОСТІЙНОГО ВПЛИВУ

5.1 Елементи та їхні характеристики

Елемент електричного кола, в якого параметр залежить від струму, котрий протікає через нього, та прикладеної до нього напруги, називається **нелінійним елементом (НЕ)**. Його можна описати у вигляді функцій

$$i = f(u) \text{ чи } u = f'(i). \quad (5.1)$$

Електричне коло, в якому є хоча б один НЕ, буде **нелінійним (НК)**.

Нелінійні елементи, як і лінійні, можна розділити на **резистивні, індуктивні і ємнісні**.

Нелінійне коло, у якому відсутні реактивні елементи, називається **резистивним (безінерційним)**.

Умовне графічне зображення нелінійного елемента подано на рис. 5.1.

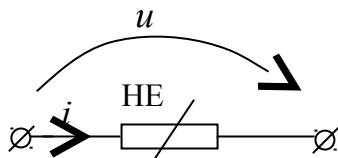


Рисунок 5.1 – Умовне зображення нелінійного елемента

Графічне зображення функції, яка описує НЕ в декартовій системі координат, називається вольт-амперною характеристикою (ВАХ).

Прикладом резистивного НЕ є напівпровідниковий діод, умовне зображення якого й приблизну ВАХ подано на рис. 5.2, а і б відповідно. Якщо уявити собі ідеальний діод (вентиль), то його ВАХ буде такою, як на рис. 5.2, в.

Рисунок 5.2 – Зображення:

- а – напівпровідникового діода та вольт-амперних характеристик діодів:
б – неідеального; в – ідеального

Характеристику (ВАХ) НЕ може бути подано й у вигляді таблиці відповідних значень напруг та струмів.

Класифікувати НЕ можна за різними критеріями:

- 1 симетричність ВАХ відносно початку координат;
- 2 монотонність ВАХ;
- 3 за кількістю затискачів НЕ: двополюсні (діоди), триполюсні (тріоди) тощо.

Пропонуємо самостійно розібрати питання класифікування НЕ.

Для повного визначення властивостей НЕ потрібне завдання всієї ВАХ, але для окремих точок цієї характеристики впроваджуються поняття статичного і динамічного (диференційного) опорів.

Статичним опором НЕ називають відношення напруги в обраній точці характеристики до струму в цій самій точці (рис. 5.3, а):

$$R_{\text{ст}} = \frac{u_1}{i_1}. \quad (5.1)$$

Динамічним опором називають відношення малого приросту напруги в обраній точці до відповідного приросту струму:

$$R_{\text{дин}} = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}; \quad (5.2)$$

на спадаючих ділянках ВАХ він може набувати негативного значення.

Часто застосовують параметр, величина якого є оберненою до величині $R_{\text{д}}$, її називають крутизною ВАХ:

$$S = \frac{di}{du}. \quad (5.3)$$

На рис. 5.3, а зображено ВАХ і точку на ній, яка пояснює віднаходження параметрів НЕ. На рис. 5.3, б зображена ВАХ тунельного діода; на ділянці $(u_1 - u_2)$ динамічний опір набирає негативного значення. Слід зазначити, що на рис. 5.3, б існує три точки, в яких динамічні опори є різні за різних значень напруг.

Рисунок 5.3 – Характеристики нелінійних елементів та віднаходження за ними параметрів:

а – з однією робочою точкою на ВАХ; б – з трьома точками за одного току i_1

5.2 Способи описування характеристик нелінійних елементів

Вольт-амперні характеристики НЕ здобувають експериментально. А задля обчислень потрібна характеристика у вигляді функційної залежності. У зв'язку з цим виникає завдання добирання такої функції, яка б з достатньою мірою

точності відбивала експериментальну характеристику. Це завдання називається **апроксимацією**.

Кусочно-лінійна апроксимація. Спосіб полягає в тому, що реальну характеристику замінюють на відрізки прямих ліній з різним нахилом $i = i_0 + iu$.

Ступенева апроксимація. Найпоширеніший спосіб, полягає у використуванні полінома n -го ступеня:

$$i = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \dots + a_nu^n,$$

де коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ — дійсні числа, визначаються за формулою:

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n i}{du^n} \right|_{u = U_0},$$

де U_0 — робоча точка.

Неважко помітити, що $a_1 = \frac{di}{du}$ — крутизна ВАХ у точці $u = U_0$; a_2 — перша похідна крутизни (з коефіцієнтом $1/2!$); a_3 — друга похідна крутизни (з коефіцієнтом $1/3!$) і т. д. Кількість членів розкладання визначається заданою точністю обчислень. Існують і інші способи апроксимації: експонентні й тригонометричні поліноми, гіперболічні функції.

5.3 Методи аналізування нелінійних кіл

Аналітичний метод обчислювання нелінійних кіл передбачає складання системи рівнянь Кірхгофа. Особливість такої системи рівнянь полягає в тому, що в ній неодмінно будуть присутні функції, які описують НЕ. Тому система рівнянь у цілому буде нелінійною. Завдання полягає в тому, щоби розв'язати цю систему нелінійних рівнянь.

Приклад. Коло на рис. 5.4 містить два вузли й три гілки. Якби коло було лінійним, то треба було б розв'язати систему з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} 1\text{к. } u_1 + u_2 - E &= 0, \\ 2\text{к. } u_3 + u_n - u_2 &= 0, \\ \textcircled{1} i_1 - i_2 - i_n &= 0. \end{aligned}$$

Окрім резисторів, у колі є НЕ, для нього треба записати апроксимуючу функцію $i_n = f(u_n)$. Для більшості складних кіл аналітичний розв'язок являє ускладнення, тому найбільш ефективними є числові методи розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Графо-аналітичний метод застосовується для порівняно простих кіл, які містять один нелінійний елемент. У цьому разі оптимальним є метод еквівалентного генератора. Наприклад, коло рис. 5.4 можна замінити на еквівалентне коло рис. 5.5, а, де

Рисунок 5.5 – Еквівалентні перетворювання кола рис. 5.4:

а – схема еквівалентного джерела напруги; б – віднаходження напруги $U_{\text{ННВ.с}}$,
в – віднаходження еквівалентного опору.

$$U_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ННВ.с}} = i_{2\text{X}} R_2 = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} \text{ за рис. 5.5, б,}$$

а

$$R_{\text{ЕГ}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \text{ за рис. 5.5, в.}$$

Для визначення робочої точки НЕ можна скористатися методом оберненої характеристики нелінійного елемента, тобто навантажувальна характеристика будується за двома точками:

- 1) $u_{\text{н}} = 0, i_{\text{кз}} = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}}}$;
- 2) $i_{\text{н}} = 0, U_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ННВ.с}}$.

На рис. 5.6 побудовано цю лінію. Точка, де перетинаються дві характеристики, є робочою точкою (РТ), шуканими величинами є $u_{\text{н}}$ та $i_{\text{н}}$.

Тепер можна виконати перевірку закону Кірхгофа:

$$u_{\text{н}} + i_{\text{н}} \cdot R_{\text{Е}} = E_{\text{ЕГ}}.$$

Знаючи величини $u_{\text{н}}$ та $i_{\text{н}}$ можна обчислити інші величини в колі рис. 5.4.

Формули рекомендується записати самостійно.

Графічний метод еквівалентного перетворення нелінійних кіл. Суть методу полягає в замінюванні ділянок з послідовним чи паралельним сполучуванням елементів однією ВАХ. Заміна виконується підсумовуванням заданих характеристик за осями струмів (за паралельного з'єднання елементів) чи по осях напруг (за послідовного з'єднання елементів).

На рис. 5.7, а зображені дві характеристики елементів.



Рисунок 5.7 – Перетворювання ВАХ:

а – за послідовного сполучування елементів; б – за паралельного сполучування елементів

За послідовного їхнього сполучування ці характеристики слід скласти, як показано на рис. 5.7, а, і здобути третю – еквівалентну.

За паралельного сполучування двох елементів слід складати струми за одного фіксованого значенні напруги, як показано на рис. 5.7, б. Достоїнства цього методу полягають в тому, що в перебігу еквівалентних перетворювань виявляються впливи на розв'язок характеристик окремих елементів, вид вихідних характеристик не має значення, не потрібне складання рівнянь. До недоліку цього методу слід віднести велику похибку здобуваних величин (15...20 %).

Контрольні запитання

- 1 Яке коло називається нелінійним?
- 2 Що називається статичним (динамічним) опором НЕ?
- 3 Що таке крутизна вольт-амперної характеристики?
- 4 Що розуміють під апроксимацією ВАХ НЕ?
- 5 Як розуміти кусочно-лінійну апроксимацію?
- 6 В чому полягає аналітичний розрахунок нелінійного кола?
- 7 В чому полягає графічний розрахунок нелінійного кола?
- 8 Від чого залежить точність графічного методу?

Список рекомендованої літератури

- 1 Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2 Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – М.: Энергия, 1986.
- 3 Зелях Э.В. Теория линейных электрических цепей: Учеб. пособие. Разд. первый – Одесса: ОЭИС им. О.С. Попова, 1978.
- 4 Атабеков Г.И. Теоретические основы электромеханики. Ч. 1. – М.: Энергия, 1978.
- 5 Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. – М.: Высшая школа, 1990.
- 6 Зевеке Г.В. и др. Основы теории цепей: Учебник для вузов. – М.: Энергия, 1975.
- 7 Воробиенко П.П. Теория линейных электрических цепей. Сборник задач и упражнений: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1989.
- 8 Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие для электро- и радиотехнических спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1990.

ЧАСТИНА 2

Методичні вказівки до лабораторних робіт

Лабораторна робота № 1 ДОСЛІДЖУВАННЯ АВТОНОМНИХ ДВОПОЛЮСНИКІВ

1 Мета роботи

- 1.1 Дослідити кілька автономних двополіусників (АД) шляхом зняття вольт-амперних характеристик (ВАХ) двополіусників.
- 1.2 Визначити їхні внутрішні опори й можливі схеми заміщування.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П., Воробієнко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Воробієнко П.П. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989. – № 2.11, 2.12, 2.13

3 Тест-запитання

- 3.1 Тест-запитання задля виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Дати відповіді на тест-запитання.
- 4.2 Ознайомитися з описом лабораторної роботи та змістом лабораторного завдання.
- 4.3 Скласти таблиці для зняття ВАХ АД.

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Зняти ВАХ АД (схема рис. 5.1). Результати вимірювань занести до таблиці.
- 5.2 Побудувати відповідні вольт-амперні характеристики.
- 5.3 Обчислити внутрішні опори АД для кожного разу й навести можливі схеми заміщування даних двополіусників.

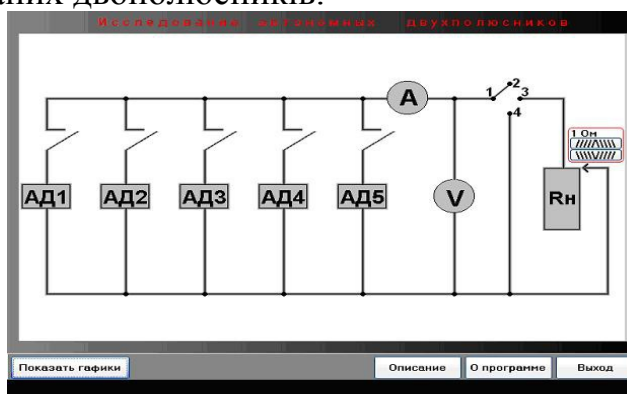


Рисунок 5.1– Схема вимірювань для зняття ВАХ АД

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 Для зняття ВАХ двополюсника треба підімкнути досліджуваний двополюсник (наприклад АД1) до кола. Для цього слід навести курсор миші на ключ, сполучений послідовно з даним двополюсником, і натиснути ліву кнопку миші. При цьому ключ замикається й підмикає даний двополюсник до кола.
- 6.2 Кожен АД досліджується у трьох режимах: режимі ненавантаженого стану (Ннв.с) (перемикач в положенні „2”), під навантаженням (перемикач в положенні „3”) і в режимі короткого замикання (к.з.) (перемикач в положенні „4”). Перемикання поміж режимами здійснюється за допомогою миші. В режимах Ннв.с. та к.з. слід зафіксувати покази амперметра A та вольтметра V .
- 6.3 За допомогою миші підімкнути досліджуваний АД до навантаження (встановити перемикач в положення „3”). Змінюючи опір навантаження R_n , зафіксувати значення амперметра A й вольтметра V для кожного значення R_n . Змінювання опору здійснюється натисканням кнопок „вгору” й „дони-зу” поряд з опором R_n .
- 6.4 Результати вимірювань оформити у вигляді таблиць.
- 6.5 Аналогічно знімається ВАХ інших АД.
- 6.6 За даними вимірювань слід побудувати графіки залежності струму від напруги (ВАХ) для кожного АД.
- 6.7 За побудованими ВАХ треба визначити внутрішній опір (провідність) кожного АД і навести можливі схеми заміщення.
- 6.8 За ВАХ визначити, до якого з ідеальних джерел (струму чи напруги) наближується кожен з досліджуваних АД.

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Схема вимірювань.
- 7.3 Таблиці вимірювань та графіки ВАХ АД.
- 7.4 Результати обчислень.
- 7.5 Еквівалентні схеми заміщення АД.
- 7.6 Висновки.

Лабораторна робота № 2 ДОСЛІДЖУВАННЯ РЕЗИСТИВНИХ КІЛ ІЗ ДВОМА ДЖЕРЕЛАМИ

1 Мета роботи

- 1.1 Засвоїти застосовування законів Ома та Кірхгофа при обчислюванні електричного кола.
- 1.2 Засвоїти метод накладання.
- 1.3 Експериментально перевірити правильність розрахунків.

2 Список літератури

- 2.1 Белецкий А.Ф. Теория линейных цепей. – М.: Радио и связь, 1986.– С. 49...62, 31...39.
- 2.2 Воробийченко П.П. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989.– задачи № 1.13, 1.18; № 2.1, 2.2; № 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.8, 3.

3 Тест-запитання

- 3.1 Тест-запитання задля виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Вивчити теоретичний матеріал з даної теми та надати відповіді на тест-запитання.
- 4.2 Зобразити задану схему з двома джерелами (схему вимірювань взяти з додатку до даної роботи).
- 4.3 Зобразити задану схему з одним джерелом напруги (при цьому джерело струму замінюється на Ннв.с.)
- 4.4 Обчислити $R_{\text{екв}}$ відносно джерела.
- 4.5 Виконати обчислення струмів у всіх гілках і показати їхній умовно-позитивний напрямок на схемі.
- 4.6 Перевірити правильність обчислювань за допомогою ЗСК та ЗНК.
- 4.7 Зобразити схему з одним джерелом струму (при цьому джерело напруги замінюється на к.з.)
- 4.8 Виконати пункти 4.4...4.6 для набутої схеми.
- 4.9 Обчислити струми у вихідній схемі (з двома джерелами) методом накладання, використовуючи результати обчислень в п. п. 4.5, 4.8.
- 4.10 Перевірити виконання ЗСК та ЗНК для вихідної схеми.

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Виміряти всі струми в схемі з одним джерелом напруги. Порівняти з обчисленням.
- 5.2 Виміряти всі струми в схемі з одним джерелом струму. Порівняти з обчисленням.
- 5.3 Виміряти всі струми в схемі з двома джерелами. Порівняти з обчисленням.
- 5.4 Змінити напрям джерела струму на протилежний, виміряти всі струми, порівняти з результатами п. 5.3.
- 5.5 Зробити висновки.

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 Зібрати задану схему з двома (трьома) джерелами енергії. Для цього треба навести покажчик миші на кожний з двополюсників $Z1...Z6$ (див. рис. 6.1) і натиснути ліву кнопку миші. При цьому символ двополюсника зміниться на символ елемента R , E чи J (за повторного натискання символ замінюється на черговий). При виборі джерел особливу увагу слід звернути на їхню полярність чи напрямок. Після завершення збирання схеми слід по-

твердити вибір, натиснувши кнопку „Схема выбрана” у правому нижньому кутку вікна макета.

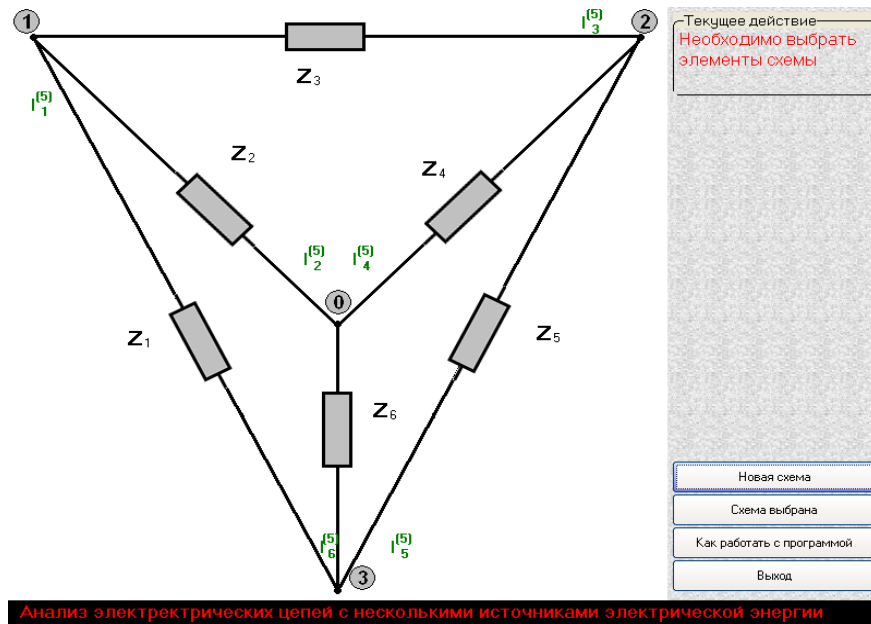


Рисунок 6.1 – Віртуальний макет для аналізування розгалужених кіл за постійного впливу

- 6.2 У правому верхньому кутку макета з'являться поля для введення величин елементів схеми. В ці поля з клавіатури треба ввести величини елементів (в системі СИ) і потвердити свій вибір, натискаючи кнопку „Значения элементов введены” в правому нижньому кутку вікна макета. При цьому автоматично відкривається перша окрема схема (з одним із джерел) із зазначеними напрямками окремих струмів, значення яких подано праворуч схеми.
- 6.3 Для проглядання решти окремих схем та спільної (початкової) схеми й визначання відповідних струмів слід натискати кнопки від „2” до „6” (залежно від кількості окремих схем) або кнопку „Р” – задля виведення початкової схеми; кнопки розташовано у правому нижньому кутку вікна макета.
- 6.4 Для кожної із схем слід порівняти здобуті результати з попередніми обчисленнями і зробити відповідні висновки.
- 6.5 Для змінювання напрямку джерела (досліджування нової схеми) слід натиснути кнопку „Новая схема” у правому нижньому кутку вікна макета і повторити пп. 6.1...6.4.

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Схема вимірювань.
- 7.3 Результати обчислень.
- 7.4 Результати експерименту.
- 7.5 Висновки.

Лабораторна робота № 3
ДОСЛІДЖУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ R , L , C
ЗА ГАРМОНІЧНОГО ВПЛИВУ

1 Мета роботи

- 1.1 Дослідити властивості послідовного та паралельного сполучування елементів R , L та C за гармонічного впливу.

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Воробиенко П.П. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989. – № 2.11, 2.12, 2.13.

3 Тест-запитання

- 3.1 Тест-запитання задля виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Вивчити теоретичний матеріал за рекомендованою літературою та конспектом лекцій.
- 4.2 Відповісти на тест-запитання.
- 4.3 Уміти визначати основні параметри гармонічного коливання (частоту, амплітуду, початкову фазу) за графіком часової залежності струму чи напруги.
- 4.4 Уміти визначати різницю початкових фаз двох гармонічних коливань за графіками.
- 4.5 Уміти зображати задане коливання в частотній області та на комплексній площині.
- 4.6 Уміти записувати аналітичний вираз за графіком часової залежності струму чи напруги.

5 Лабораторне завдання

- 5.1 Дослідити послідовне сполучування елементів R , L та C (канонічний послідовний коливальний контур).
- 5.1.1 Визначити резонансну частоту ω_0 , амплітудні й діючі значення напруг на елементах, максимальні значення реактивних потужностей, накреслити часові залежності напруг і потужностей.
- 5.1.2 Повторити п. 5.1.1 для частот $\omega_1 = \omega_0 / 2$ і $\omega_2 = 2 \omega_0$.
- 5.1.3 За часовими залежностями напруг записати аналітичні вирази й побудувати векторні діаграми напруг.
- 5.1.4 Визначити опори реактивних елементів для кожної частоти.
- 5.2 Дослідити паралельне сполучування елементів R , L та C (канонічний паралельний коливальний контур):

- 5.2.1 Виконати пп. 5.1.1...5.1.4, як об'єкти досліджень обравши струми через елементи та активну потужність.
- 5.3 Для довільної частоти, відмінної від ω_1 , ω_0 та ω_2 , визначити різницю початкових фаз поміж напругами на елементах для послідовного та струмів через елементи – для паралельного коливальних контурів; побудувати векторні діаграми.

6 Порядок виконання роботи

- 6.1 У вікні програми лабораторної роботи обрати закладку „Последовательный контур” (див. рис. 6.1). При цьому на екрані з'явиться стенд досліджування послідовного сполучування елементів R , L та C : у правому верхньому кутку – схема контура й аналітичний вираз гармонічного впливу – вхідного струму; в лівому кутку – кнопки збільшування (напряmlена за годинниковою стрілкою) і зменшування (напряmlена проти годинникової стрілки) частоти; внизу – графіки часових залежностей напруг та потужностей (колір кривої відповідає кольорові елемента на схемі).
- 6.1.1 Змінюючи частоту струму за допомогою кнопок збільшування та зменшування частоти, визначити резонансну частоту контура (при цьому напруги на реактивних елементах є рівні за значенням і протилежні за знаком).

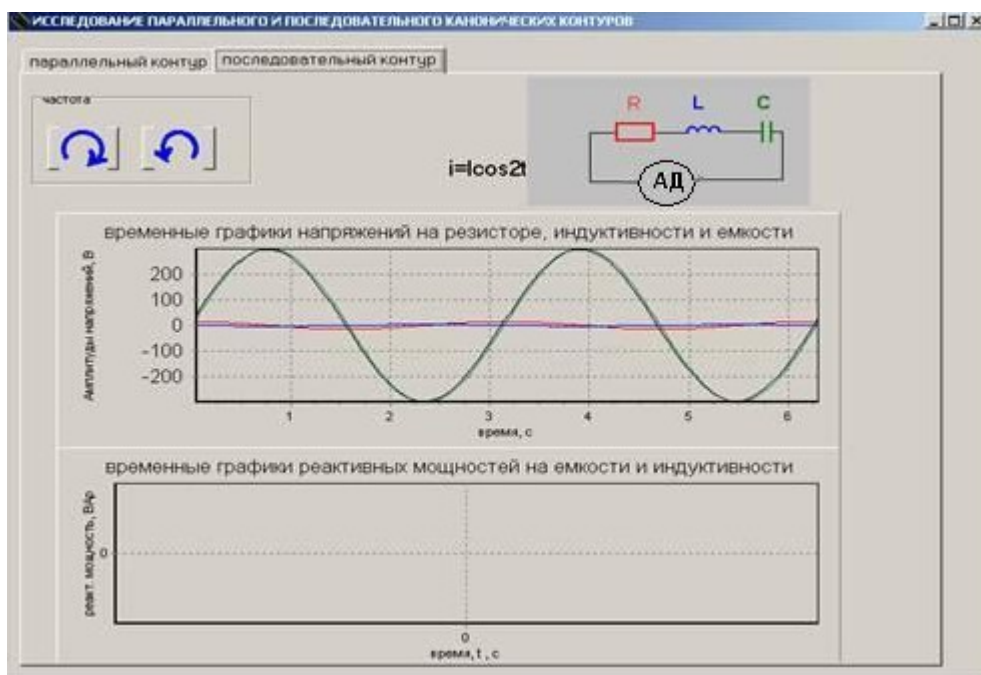


Рисунок 6.1 – Віртуальний макет для досліджування послідовного сполучування елементів R , L та C

- 6.1.2. Резонансну частоту й відповідні до неї графіки занести до протоколу.

- 6.1.3 За допомогою кнопок збільшення та зменшення частоти встановити частоти ω_1 та ω_2 . Відповідні до них графіки напруг та потужностей занести до протоколу.
- 6.1.4 Для кожної кривої записати аналітичний вираз і навести векторні діаграми напруг для всіх трьох частот.
- 6.2 Для досліджування паралельного сполучування елементів R , L та C слід обрати закладку „параллельный контур” (див. рис. 6.2). З'являється стенд, аналогічний до попереднього, на часових діаграмах наводяться графіки струмів та активної потужності.
- 6.2.1 Всі досліджування виконуються аналогічно, але стосовно струмів через елементи та миттєвої потужності на резистивному елементі.

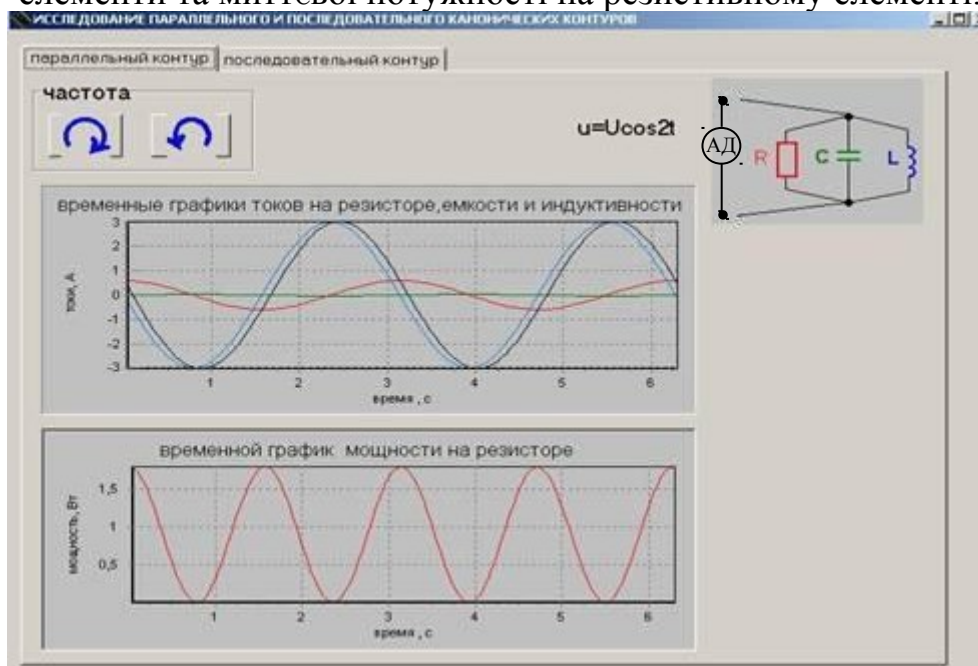


Рисунок 6.2 – Віртуальний макет для досліджування паралельного сполучування елементів R , L та C

7 Зміст протоколу

- 7.1 Тема й мета роботи.
- 7.2 Результати виконання домашнього завдання.
- 7.3 Схеми вимірювань, графіки, векторні діаграми, аналітичні вирази.
- 7.4 Висновки.

Лабораторна робота № 4 ДОСЛІДЖУВАННЯ ВХІДНИХ ФУНКЦІЙ КІЛ RL , RC , RLC

1 Мета роботи

- 1.1 Досліджування частотних залежностей лінійних пасивних двополюсників, що містять елементи R , L , C .

2 Список літератури

- 2.1 Бакалов В.П., Воробієнко П.П., Крук Б.И. Теория электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1998.
- 2.2 Воробієнко П.П. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989. – № 2.11, 2.12, 2.13.

3 Тест-запитання

- 3.1 Тест-запитання задля виявлення ступеня готовності до виконання лабораторної роботи наведено в додатку А.

4 Домашнє завдання

- 4.1 Вивчити властивості пасивних елементів R , L , C за гармонічного впливу.
- 4.2 Визначити величини елементів за формулами:

$$R = n, \text{ Ом}; \quad L = \frac{n}{m + n}, \text{ мГн}; \quad C = \frac{10}{n(m + n)}, \text{ мкФ},$$

де m – номер академічної групи на потоці (наприклад ТС–25, $m=5$), n – порядковий номер студента за журналом.

- 4.3 Виконати обчислювання для трьох схем рис. 4.1.

Рисунок 4.1 – Досліджувані схеми

Розрахункові формули для схеми 1: $Z_{RL} = R + jX_L = z_{RL} \cdot e^{j\varphi_{RL}}$;

$$X_L = \omega L; \quad z_{RL} = \sqrt{R^2 + X_L^2}; \quad I_{RL} = \frac{U_{\Gamma}}{z_{RL}}; \quad \varphi_{RL} = \arctg \frac{X_L}{R}.$$

Обчислювання виконувати на частотах: $0; 0,25 \omega_{11}; 0,5 \omega_{11}; \omega_{11}; 2 \omega_{11}; 3 \omega_{11}; \infty$,

де ω_{11} – опорна частота, визначається з співвідношення $X_L = R$, звідки

$$\omega_{11} = \frac{R}{L}, \quad \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad U_{\Gamma} = 10 \text{ В}.$$

Обчислювання звести до таблиці 4.1, за результатами обчислювання побудувати частотні характеристики.

Таблиця 4.1

$\omega, \text{ p/c}$	$X_L, \text{ Ом}$	$z_{RL}, \text{ Ом}$	$I_{RL}, \text{ mA}$	φ_{RL}°

Обчислюванні формули для схеми 2: $Z_{RC} = R - jX_C = z_{RC} e^{j\varphi_{RC}}$;

$$X_C = \frac{1}{\omega C}; \quad z_{RC} = \sqrt{R^2 + X_C^2}; \quad I_{RC} = \frac{U_{\Gamma}}{z_{RC}}; \quad \varphi_{RC} = -\arctg \frac{X_C}{R}.$$

Обчислювання виконувати на частотах: $0; 0,25 \omega_{12}; 0,5 \omega_{12}; \omega_{12}; 2 \omega_{12}; 3 \omega_{12}; \infty$,

де ω_{12} – опорна частота, визначається з співвідношення $X_C = R$, звідки

$$\omega_{12} = \frac{1}{RC}, \frac{\text{рад}}{\text{с}}; U_{\Gamma} = 10 \text{ В.}$$

Обчислювання звести до таблиці 4.2, за результатами обчислювань побудувати частотні характеристики.

Таблиця 4.2

ω , p/c	X_C , Ом	z_{RC} , Ом	I_{RC} , мА	φ°_{RC}

Обчислювальні формули для схеми 3: $Z = R + jX_{LC} = z_{RLC} e^{j\varphi_{RLC}};$

$$X_{LC} = X_L - X_C; z_{RLC} = \sqrt{R^2 + X_{LC}^2}; I_{RLC} = \frac{U_{\Gamma}}{z_{RLC}}; \varphi_{RLC} = \arctg \frac{X_{LC}}{R}.$$

Обчислювання виконувати на частотах: $0; 0,25 \omega_0; 0,5 \omega_0; \omega_0; 2 \omega_0; 3 \omega_0; \infty$, де ω_0 – опорна частота, визначається: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ [рад/с].

Обчислювання звести до таблиці 4.3, за результатами обчислювань побудувати частотні характеристики.

Таблиця 4.3

ω , p/c	X_L , Ом	X_C , Ом	X_{LC} , Ом	z_{RLC} , Ом	I_{RLC} , мА	φ°_{RLC}

5 Лабораторне завдання

5.1 Зібрати схему 1 (див. рис. 4.1); встановити значення елементів, напругу генератора.

5.2 Змінюючи частоту f [Гц] джерела гармонічних коливань, виміряти й записати покази вольтметрів до таблиці 5.1. Вимірювання виконувати на частотах:

$$0,25 f_{11}; 0,5 f_{11}; f_{11}; 2 f_{11}; 3 f_{11} \left(f_{11} = \frac{\omega_{11}}{2\pi} \right).$$

Таблиця 5.1

f , Гц	U_R , В	U_L , В	I_{RL} , мА	X_L , Ом	z_{RL} , Ом	φ°_{RL}

5.3 За результатами вимірювань обчислити параметри кола за формулами:

$$I_{RL} = \frac{U_R}{R}; X_L = \frac{U_L}{I_{RL}}; z_{RL} = \frac{U_{\Gamma}}{I_{RL}}; \varphi_{RL} = \arctg \frac{U_L}{U_R},$$

а результати обчислювання занести до таблиці 5.1.

5.4 Повторити пункти 5.1...5.3 для схеми 2. Обчислювальні формули за даними вимірювань:

$$I_{RC} = \frac{U_R}{R}; X_C = \frac{U_C}{I_{RC}}; z_{RC} = \frac{U_{\Gamma}}{I_{RC}}; \varphi_{RC} = -\arctg \frac{U_C}{U_R}.$$

Обчислювання звести до таблиці 5.2

Таблиця 5.2

$f, \text{Гц}$	$U_R, \text{В}$	$U_C, \text{В}$	$I_{RC}, \text{мА}$	$X_C, \text{Ом}$	$z_{RC}, \text{Ом}$	φ_{RC}°
----------------	-----------------	-----------------	---------------------	------------------	---------------------	------------------------

5.5 Повторити пункти 5.1...5.3 для схеми 3. Обчислювальні формули за даними вимірювань:

$$I_{RLC} = \frac{U_R}{R}; X_L = \frac{U_L}{I_{RLC}}; X_C = \frac{U_C}{I_{RLC}}; z_{RLC} = \frac{U_{\Gamma}}{I_{RLC}}; \varphi_{RLC} = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R}.$$

Результати вимірювань і розрахунків по них звести в таблицю 5.3.

Таблиця 5.3

$f[\text{Гц}]$	$U_R (\text{В})$	$U_L (\text{В})$	$U_C (\text{В})$	$U_{LC} (\text{В})$	$I_{RLC} (\text{мА})$	$X_L (\text{Ом})$	$X_C (\text{Ом})$	$z_{RLC} (\text{Ом})$	φ_{RLC}°

За даними таблиць побудувати відповідні графіки.

6 Порядок виконання роботи

Зібрати схему досліджуваного кола (RL , RC , RLC). Для цього слід натиснути кнопку „Выбор элементов” зверху віртуального макета (див. рис. 6.1). У вікні, що з'явилося, кожному з двополюсників Z_1 , Z_2 , Z_3 слід поставити у відповідність елемент кола (R , L чи C). При досліджуванні двополюсників RL та RC елемент Z_3 слід замінити на коротке замикання (КЗ). Приклад схеми для досліджування RL кола наведено на рис. 6.2.

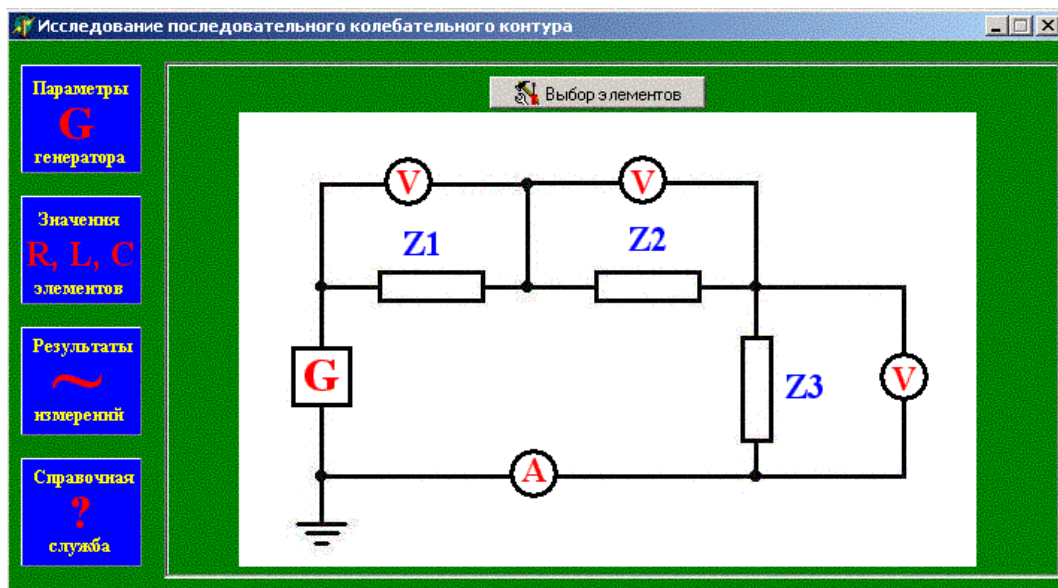


Рисунок 2 – Віртуальний макет досліджуваного кола

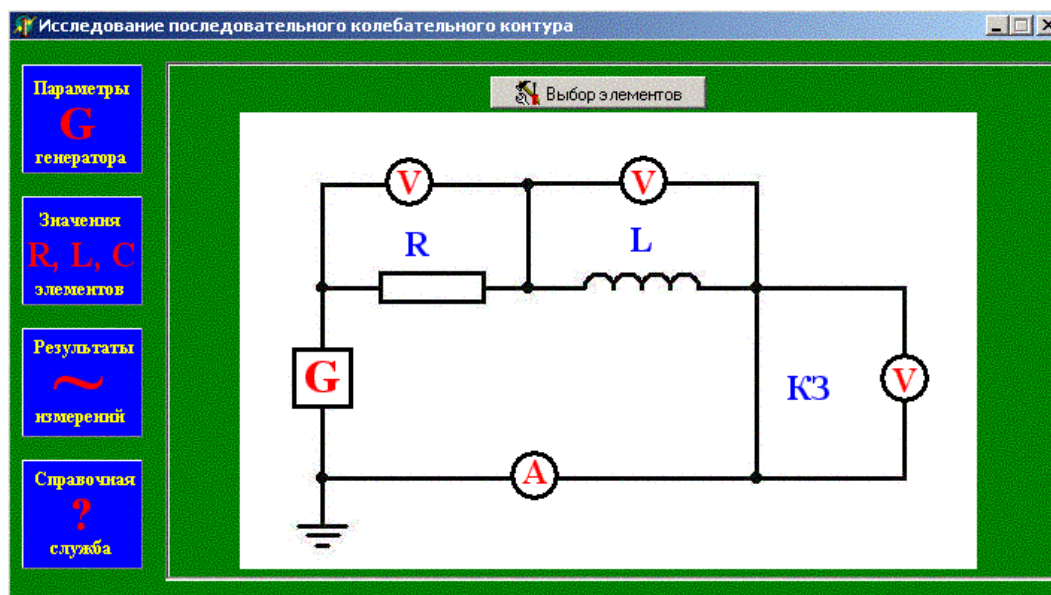


Рисунок 3 – Віртуальний макет для досліджування RL кола

6.2 Встановити значення елементів R , L , C згідно із заданим варіантом. Для цього треба натиснути кнопку „Значения элементов” лабораторного макета. У вікні, що з'явилося, ввести значення елементів в системі СІ й натиснути кнопку „ОК”.

Примітка. Кратні одиниці зручніше вводити за допомогою показника порядку, наприклад 5 мкФ – „ $5e-6$ ” Ф .

6.3 Встановити параметри генератора. Для цього натиснути кнопку „Параметры генератора”. У вікні, що з'явилося, ввести задану напругу (встановлюється один раз), частоту з табличних даних, початкову фазу (зазвичай 0 градусів) і натиснути кнопку „ОК”.

Зауваження. Частоту, дорівнювану 0 й ∞ , на генераторі встановити не можна.

6.4 Зафіксувати покази приладів. Для цього слід навести курсор миші на вимірювальний прилад і натиснути ліву кнопку миші. У вікні, що з'явилося, наведено покази приладу в системі СІ.

6.5 Для зняття частотних характеристик кола треба виконати пункти 6.3 та 6.4 для всіх значень частоти.

6.6 Для змінювання схеми треба повторити пункти 6.1 та 6.2.

6.7 Приблизні графіки частотних характеристик даного кола можна спостерігати, натиснувши кнопку „Результаты измерений”. Повертання здійснюється за допомогою кнопки „Изменить схему”.

7 Зміст протоколу

7.1 Тема й мета роботи.

7.2 Результати виконання домашнього завдання.

7.3 Схеми вимірювання, графіки, аналітичні вирази, таблиці.

7.4 Висновки.

ДОДАТОК А

Тест-запитання до лабораторних робіт

Лабораторна робота № 1

ДОСЛІДЖУВАННЯ АВТОНОМНИХ ДВОПОЛЮСНИКІВ

- 1 Що називається електричним колом?
- 2 Що розуміють під схемою заміщування?
- 3 Які схеми називаються еквівалентними?
- 4 Які електричні елементи називаються автономними?
- 5 Які електричні елементи називаються активними?
- 6 Що таке миттєва потужність?
- 7 Що таке електрична схема?
- 8 Що таке лінійний елемент?
- 9 Що називають ідеальним джерелом напруги?
- 10 Що називають ідеальним джерелом струму?
- 11 Сформулювати закон Кірхгофа для напруг?
- 12 Сформулювати закон Кірхгофа для струмів?
- 13 Яке сполучування двополюсників називається послідовним?
- 14 Яке сполучування двополюсників називається паралельним?
- 15 З чого складається схема заміщування неідеального джерела напруги.
- 16 З чого складається схема заміщування неідеального джерела струму.
- 17 Які джерела називаються залежними?
- 18 Скільки залежних джерел можете привести?
- 19 Чи слушне є твердження, що алгебрична сума напруг в контурі дорівнює нулеві?
- 20 Чи слушне є твердження, що сума всіх струмів в контурі дорівнює нулеві?
- 21 Як записати рівняння за першим законом Кірхгофа для зазначеного вузла?
- 22 Як записати рівняння ємності C ?
- 23 Як записати рівняння індуктивності L ?
- 24 Як записати ВАХ неідеального джерела напруги?
- 25 Як записати ВАХ неідеального джерела струму?
- 26 Як визначити кількість енергії?
- 27 Який елемент називається нелінійним?
- 28 В яких одиницях вимірюється провідність?
- 29 У чому відмінність джерела напруги від джерела струму?

Лабораторна робота № 2**ДОСЛІДЖУВАННЯ РЕЗИСТИВНИХ КІЛ
З ДВОМА ДЖЕРЕЛАМИ**

- 1 Як пов'язані поміж собою струми й величини провідностей у резистивному подільнику струму?
- 2 Як пов'язані поміж собою струми й величини ємностей у ємнісному подільнику струму?
- 3 Як пов'язані поміж собою струми й величини індуктивностей у індуктивному подільнику струму?
- 4 Як пов'язані поміж собою напруги й величини опорів у резистивному подільнику напруги?
- 5 Як пов'язані поміж собою напруги й величини ємностей у ємнісному подільнику напруги?
- 6 Як пов'язані поміж собою напруги й величини індуктивностей у індуктивному подільнику напруги?
- 7 В чому полягає суть методу накладання за обчислювання електричного кола?
- 8 В чому полягає суть методу вузлових напруг за обчислювання електричного кола?
- 9 В чому полягає суть методу еквівалентного джерела напруги за обчислювання електричного кола?
- 10 В чому полягає суть методу еквівалентного джерела струму за обчислювання електричного кола?
- 11 Що називається подільником струму?
- 12 Що називається подільником напруги?
- 13 У який спосіб записати рівняння подільника напруги?
- 14 У який спосіб записати рівняння подільника струму?
- 15 Що таке власна провідність вузла?
- 16 Чи слушне є твердження, що послідовне сполучування елементів – це таке сполучування, за якого всі елементи сполучено до одного вузла?
- 17 Чи слушне є твердження, що алгебрична сума напруг у контурі дорівнює нулеві?
- 18 Чи слушне є твердження, що сума усіх струмів у контурі дорівнює нулеві?
- 19 У який спосіб записати рівняння за першим законом Кірхгофа для зазначеного вузла?
- 20 У який спосіб записати рівняння ємності C ?
- 21 У який спосіб записати рівняння індуктивності L ?
- 22 Який вигляд має ВАХ неідеального джерела напруги?
- 23 Що називається графом електричного кола?
- 24 Що називається вершиною графа?
- 25 Що називається ребром графа?
- 26 Що називається циклом графа?
- 27 Що розуміється під деревом графа?

- 28 Які графи називаються ізоморфними?
- 29 Що таке направлений сигнальний граф?
- 30 Який граф називають планарним?

Лабораторна робота № 3

ДОСЛІДЖУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ R , L , C ЗА ГАРМОНІЧНОГО ВПЛИВУ

- 1 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних напруги і струму в резистивному елементі?
- 2 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних напруги і струму в індуктивності?
- 3 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних напруги і струму в ємності?
- 4 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних напруг на елементах L та C , якщо їх сполучено послідовно?
- 5 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних напруг на елементах R та L , якщо їх сполучено послідовно?
- 6 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних напруг на елементах R та C , якщо їх сполучено послідовно?
- 7 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних напруги на RLC контурі і струму, який протікає через елементи, якщо $U_R = U_C = U_L = 1$ В?
- 8 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних струмів в елементах L та C , якщо їх сполучено паралельно?
- 9 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних струмів на елементах R та C , якщо їх сполучено паралельно?
- 10 Чому дорівнює різниця початкових фаз гармонічних струмів в елементах R та L , якщо їх сполучено паралельно?
- 11 Який вплив називається гармонічним?
- 12 В яких одиницях вимірюється кутова частота ω ?
- 13 Як визначити амплітуду напруги, якщо відоме її діюче значення?
- 14 В яких одиницях вимірюється циклічна частота f ?
- 15 Що називається періодом гармонічного коливання?
- 16 Як пов'язані поміж собою кутова частота та період гармонічного коливання?
- 17 Що являє собою середнє значення гармонічного коливання?
- 18 Як визначити енергію в резистивному елементі?
- 19 Як визначити індуктивний опір?
- 20 Як визначити індуктивну провідність?
- 21 Як визначити ємнісний опір?
- 22 Як визначити ємнісну провідність?
- 23 Який режим електричного кола називають резонансом?
- 24 Як визначити реактивний опір кола?
- 25 Як визначити реактивну провідність кола?

Лабораторна робота № 4

ДОСЛІДЖУВАННЯ ВХІДНИХ ФУНКЦІЙ КОЛА

- 1 У якій формі слід подавати комплексні опори за послідовного з'єднання елементів?
- 2 У якій формі слід подавати числа, щоби помножити комплексні провідності?
- 3 Чому дорівнює сумарна напруга на двох послідовно сполучених елементах L та R , якщо напруги на кожному з них дорівнюють $2V$?
- 4 Чому дорівнює кут поміж векторами напруг, якщо $U_L = U_R = 10\text{ В}$, а елементи R та L сполучено послідовно?
- 5 Чому дорівнює кут поміж векторами сумарної напруги і напруги на резистивному елементі, якщо $U_L = U_R = 1\text{ В}$, а елементи R та L сполучено послідовно?
- 6 Чому дорівнює повний опір послідовно сполучених елементів R та C , якщо $R = 3\text{ Ом}$, $X_C = 4\text{ Ом}$?
- 7 Що розуміють під частотною характеристикою?
- 8 Що розуміють під фазо-частотною характеристикою?
- 9 Як залежить опір індуктивності від частоти?
- 10 Як залежить опір ємності від частоти?
- 11 Як змінюється струм у двополюснику, який складається з послідовно сполучених індуктивності та резистора?
- 12 Як змінюється струм у двополюснику, який складається з послідовно сполучених ємності та резистора?
- 13 Як залежить від частоти провідність індуктивності?
- 14 Як залежить від частоти провідність ємності?
- 15 У якому вигляді треба подати два комплексні опори, щоби відняти їх?
- 16 У якому вигляді треба подати напругу та струм, щоби визначити опір чи провідність RLC кола?
- 17 Чому дорівнюватиме струм у двох паралельно сполучених елементах R та C , якщо $I_R = I_C = 1\text{ А}$?
- 18 Чому дорівнюватиме кут поміж векторами струмів, якщо $I_R = I_C = 1\text{ А}$, а елементи R та C сполучено паралельно?
- 19 Чому дорівнюватиме кут поміж векторами сумарного струму та струму у резистивному елементі, якщо $I_R = I_C = 1\text{ А}$, а елементи R та C сполучено паралельно?
- 20 Чому дорівнюватиме сумарний струм у паралельному сполученні елементів, якщо $I_G = I_C = 1\text{ А}$?
- 21 Чому дорівнюватиме напруга в послідовному сполученні елементів, якщо $U_R = U_C = 2\text{ В}$?
- 22 Чому дорівнюватиме сумарний струм за паралельного сполучення елементів R та L , якщо $I_R = 3\text{ А}$, $I_L = 4\text{ А}$?
- 23 Чому дорівнюватиме сумарна напруга за послідовного сполучення елементів R та C , якщо $U_R = 2\text{ В}$, $U_C = 1\text{ В}$?

- 24 Чому дорівнюватиме частота ω , якщо $X_L = R = 100 \text{ Ом}$, а $L = 0,1 \text{ Гн}$?
- 25 Чому дорівнюватиме частота ω , якщо $X_C = R = 100 \text{ Ом}$, а $C = 10 \text{ мкФ}$?
- 26 Чому дорівнюватиме струм, який протікає через послідовне сполучення елементів R та L , якщо до них прикладено постійну напругу $U = 10 \text{ В}$, а $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГн}$?
- 27 Чому дорівнюватиме струм, який протікає через послідовне сполучення елементів R та C , якщо до них прикладено постійну напругу $U = 10 \text{ В}$, а $R = 10 \text{ Ом}$, $C = 10 \text{ мкФ}$?
- 28 Чому дорівнюватиме зсув фаз поміж напругою на індуктивності та струмом, який протікає через послідовне сполучення R та L на частоті $\omega = 0$?
- 29 Чому дорівнюватиме зсув фаз поміж напругою на індуктивності та струмом, який протікає через послідовне сполучення R та L , якщо $R = X_L = 10 \text{ Ом}$?
- 30 Чому дорівнюватиме зсув фаз поміж напругою на ємності і струмом, який протікає через послідовне сполучення R та C , якщо $R = X_C = 10 \text{ Ом}$?
- 31 Чому дорівнюватиме модуль комплексного опору послідовного RL кола, якщо $R = X_L = 10 \text{ Ом}$?
- 32 Чому дорівнюватиме модуль комплексного опору послідовного RLC кола, якщо $R = 1 \text{ Ом}$, $X_L = 2 \text{ Ом}$, $X_C = 1 \text{ Ом}$?
- 33 Чому дорівнюватиме сумарна напруга на двополюснику, який складається з послідовно сполучених елементів L та C , якщо $U_L = U_C = 5 \text{ В}$?

ДОДАТОК Б

Приклади розв'язування задач модуля 1

Задача 1 Рівняння Кірхгофа

У вузлі електричного кола сходяться гілки, напрямки струмів у яких і їхні значення наведені на схемі рис. 1.1.

Треба визначити невідомий струм I_5 .

Розв'язок

Запишемо рівняння за першим законом Кірхгофа для даного вузла:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0,$$

звідки

$$I_5 = I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 5 - 8 - 11 + 3 = -11 \text{ А.}$$

Перевірка: $5 - 8 - 11 + 3 - (-11) = 0$;
 $0 \equiv 0$.

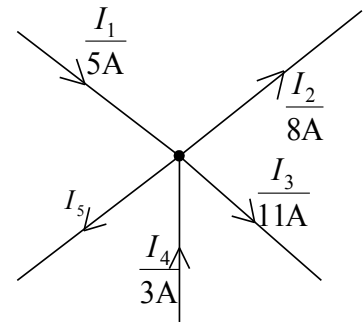


Рисунок 1.1

Задача 2 Рівняння Кірхгофа

Дано електричне коло рис. 2.1: $R_1=10 \text{ Ом}$, $R_2=20 \text{ Ом}$, $E=15 \text{ В}$, $J=1 \text{ А}$. Визначити u_j .

Розв'язок

Напрямок струму I у даній схемі збігається з напрямком струму джерела струму J . Тоді напруги U_1 та U_2 спрямовано як показано на рисунку й дорівнюють відповідно:

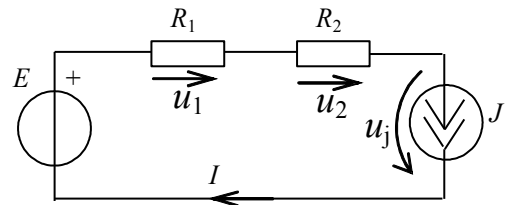


Рисунок 2.1

$$U_1 = I \cdot R_1 = 1 \cdot 10 = 10 \text{ В};$$

$$U_2 = I \cdot R_2 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ В}.$$

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для даного контура:

$$U_1 + U_2 + U_j - E = 0;$$

$$U_j = E - U_1 - U_2 = 10 - 10 - 20 = -10 \text{ В}.$$

Знак „мінус” означає, що напрямок напруги джерела струму є зворотний до зазначеного.

Задача 3 Рівняння Кірхгофа

Визначити струми в гілках кола методом рівнянь Кірхгофа для кола рис. 3.1.

Дано: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$, $E_1 = 20 \text{ В}$, $E_2 = 10 \text{ В}$.

Розв'язок

Для даної схеми можна записати одне незалежне рівняння за першим законом Кірхгофа й два – за другим. Для цього оберемо довільно напрямки струмів I_1 , I_2 , I_3 , як показано на рис. 3.1 і напрямки обходів контурів, як показано на цьому ж рисунку штриховими стрілками.

У результаті на підставі першого й другого законів Кірхгофа дістанемо систему рівнянь вигляду:

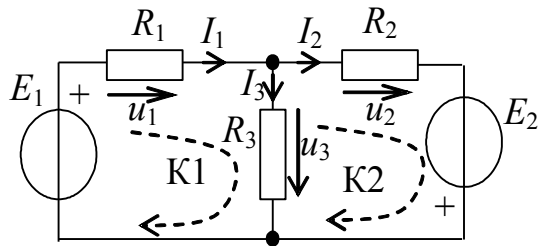


Рисунок 3.1

$$\begin{aligned} \text{Вузол: } I_1 - I_2 - I_3 &= 0; \\ \text{K1: } U_1 + U_3 - E_1 &= 0; \\ \text{K2: } U_2 - E_2 - U_3 &= 0. \end{aligned}$$

Виразимо напруги U_1 , U_2 , U_3 через струми й опори:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0; \\ I_1 \cdot R_1 + 0 + I_3 \cdot R_3 = E_1; \\ 0 + I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = E_2. \end{cases}$$

Тепер струми I_1 , I_2 , I_3 можна визначити за допомогою визначників:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 & 0 & 30 \\ 0 & 20 & -30 \end{vmatrix} = -600 - [10 \cdot (30 + 20)] = -1100;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E_1 & 0 & R_3 \\ E_2 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -E_1[R_3 - R_2] + E_2[-R_3] = -20(50) + 10(-30) = -1000 - 300 = -1300;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E_1 & R_3 \\ 0 & E_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -E_1[-R_3] - E_2[R_3 + R_1] = 20(-30) - 10(40) = -600 - 400 = -1000;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & 0 & E_1 \\ 0 & R_2 & E_2 \end{vmatrix} = -E_1 \cdot R_2 + E_2 \cdot R_1 = -20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = -400 + 100 = -300;$$

$$I_1 = \frac{1300}{1100} = 1,182 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{1000}{1100} = 0,91 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{300}{1100} = 0,273 \text{ A}.$$

Перевірку віднайдених струмів можна виконати за допомогою балансу потужностей:

$$\sum P_k = 0,$$

чи $P_{\text{джер}} = P_{\text{спож}}$.

$$-I_1 \cdot E_1 - I_2 \cdot E_2 + I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 = 0.$$

Після підстановки значень переконуємося у вірогідності здобутих значень струмів. Цю операцію радимо проробити самостійно.

Задача 4 Аналізування кола з одним джерелом енергії

Визначити струми гілок та напруги на елементах кола, схему якого зображено на рис. 4.1. Параметри елементів є такі: $E = 6 \text{ В}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 20 \text{ Ом}$.

Розв'язок

1 Позначимо напрямки струмів і напруг, як показано на схемі, рис. 4.1.

2 Коло містить послідовно-паралельні сполучування елементів, тому скористаємося методом еквівалентних перетворювань. Опори R_3 і R_4 на схемі рис. 4.1 сполучено послідовно, їх можна замінити на один еквівалентний опір R_{34} , величина якого

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 10 + 20 = 30 \text{ Ом}.$$

Після перетворення схема здобуває вид рис. 4.2.

У даній схемі опори R_2 та R_{34} сполучено паралельно, замінюємо їх на один еквівалентний опір R_{234} :

$$R_{234} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30} = 15 \text{ Ом}.$$

При цьому $U_2 = U_{34} = U_3 + U_4$. Струми в гілках визначимо за формулою „чужого” опору:

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{R_{34}}{R_2 + R_{34}}; \quad I_3 = I_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_{34}}.$$

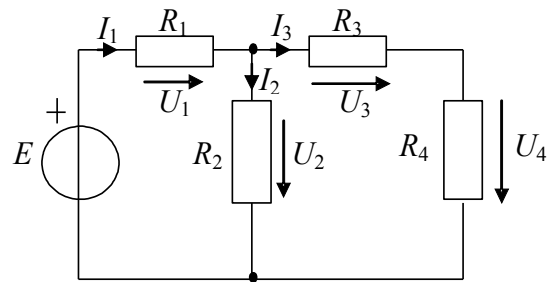


Рисунок 4.1

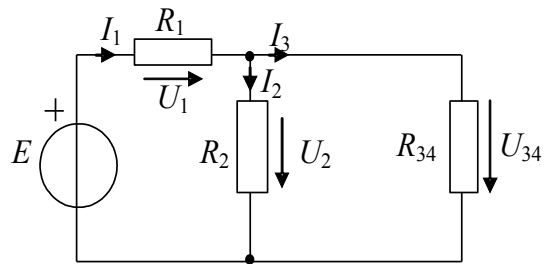


Рисунок 4.2

Перетворена схема набуває вигляду рис. 4.3:

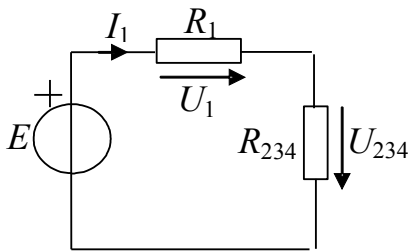


Рисунок 4.3

Схема рис. 4.3 містить послідовне сполучення джерела напруги й двох опорів. Струм у колі й напруги на елементах визначимо за законом Ома:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{234}} = \frac{6}{5 + 15} = 0,3 \text{ A};$$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 0,3 \cdot 5 = 1,5 \text{ В};$$

$$U_2 = I_1 \cdot R_{234} = 0,3 \cdot 15 = 4,5 \text{ В}.$$

Визначимо струми I_2 та I_3 (див. вище):

$$I_2 = 0,3 \frac{30}{30 + 30} = 0,15 \text{ A};$$

$$I_3 = 0,3 \frac{30}{30 + 30} = 0,15 \text{ A}.$$

За законом Ома визначимо напруги:

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 = 0,15 \cdot 10 = 1,5 \text{ В};$$

$$U_4 = I_3 \cdot R_4 = 0,15 \cdot 20 = 3 \text{ В}.$$

3 Перевірку обчислювання можна виконати, склавши рівняння балансу потужностей для вихідного кола:

$$- E \cdot I_1 + I_1 \cdot U_1 + I_2 \cdot U_2 + I_3 \cdot U_3 + I_4 \cdot U_4 = 0.$$

Підставимо значення й виконаємо обчислювання:

$$- 6 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 1,5 + 0,15 \cdot 4,5 + 0,15 \cdot 1,5 + 0,15 \cdot 3 = 0;$$

$$- 1,8 + 0,45 + 0,675 + 0,225 + 0,45 = 0;$$

$$- 1,8 + 1,8 = 0; 0 \equiv 0.$$

Перевірка потвердила слушність обчислювання.

Задача 5 Метод накладання

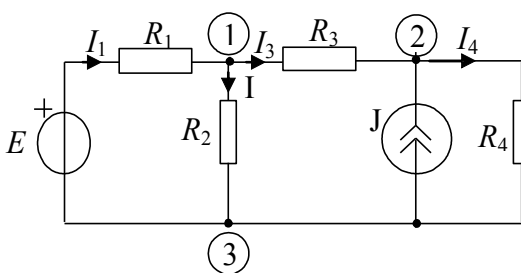


Рисунок 5.1

Методом накладання визначити струми гілок кола, схема якого зображено на рисунку 5.1. Параметри елементів є такі:

$$E = 6 \text{ В}, I = 0,6 \text{ А}; R_1 = R_2 = 20 \text{ Ом},$$

$$R_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}.$$

Розв'язок

1 Задано умовно позитивними напрямками струмів, як це подано на рисунку 5.1.

2 Покладемо струм джерела струму дорівнюваним нулеві ($J = 0$). При цьому джерело струму замінимо на ненавантажений стан. Дістанемо першу окрему схему з одним джерелом енергії (рис. 5.2).

Для визначення окремих струмів $I'_1 - I'_3$ скористаємося результатами задачі 4:

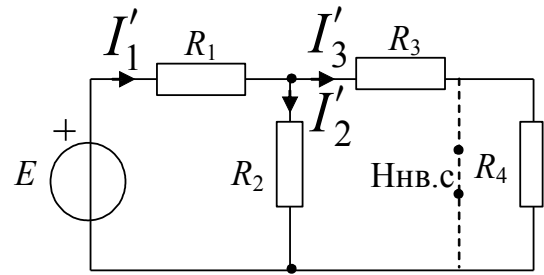


Рисунок 5.2

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 10 + 10 = 20 \text{ Ом};$$

$$R_{234} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10 \text{ Ом};$$

$$I'_1 = \frac{E}{R_1 + R_{234}} = \frac{6}{20 + 10} = 0,2 \text{ А};$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_{34}}{R_2 + R_{34}} = 0,2 \frac{20}{20 + 20} = 0,1 \text{ А};$$

$$I'_3 = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_{34}} = 0,2 \frac{20}{20 + 20} = 0,1 \text{ А}.$$

3. Покладемо напругу джерела напруги дорівнюванню нулевій ($E = 0$). При цьому джерело напруги замінимо на коротке замикання. Дістанемо другу окрему схему з одним джерелом енергії (рис. 5.3).

Перетворимо схему рис. 5.3. Замінимо паралельно-послідовне сполучування опорів R_1, R_2, R_3 на еквівалентний опір R_{123} . Тут

$$R_{123} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} + 10 = 20 \text{ Ом}.$$

Використовуючи формулу „чужого” опору, визначимо струми:

$$I''_3 = I \frac{R_4}{R_{13} + R_4} = 0,6 \frac{10}{20 + 10} = 0,2 \text{ А};$$

$$I''_4 = I \frac{R_{13}}{R_{13} + R_4} = 0,6 \frac{20}{20 + 10} = 0,4 \text{ А};$$

$$I''_1 = I''_3 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,2 \frac{20}{20 + 20} = 0,1 \text{ А};$$

$$I''_2 = I''_3 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,2 \frac{20}{20 + 20} = 0,1 \text{ А}.$$

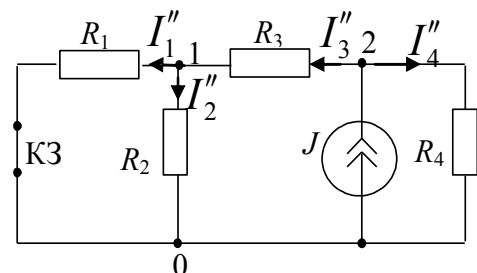


Рисунок 5.3

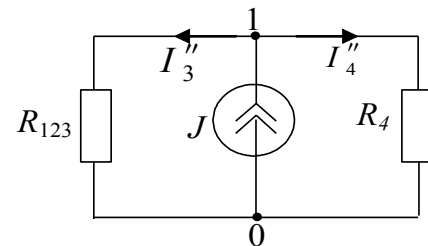


Рисунок 5.4

4 Виконаємо процедуру накладання. За основні напрямки струмів приймемо такі самі, як на вихідній схемі рис. 5.1. Окремі струми, збіжні за напрямком зі струмами вихідної схеми, записуємо зі знаком „+”, незбіжні – зі знаком „-”. Результуючі струми визначаються в такий спосіб:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 0,2 - 0,1 = 0,1 \text{ A};$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 0,1 + 0,1 = 0,2 \text{ A};$$

$$I_3 = I'_3 - I''_3 = 0,1 - 0,2 = -0,1 \text{ A};$$

$$I_4 = I'_4 + I''_4 = 0,1 + 0,4 = 0,5 \text{ A}.$$

Знак „-” в результаті свідчить про те, що напрямок струму в вихідному колі є протилежний до напрямку, зазначеного на схемі.

5 Виконаємо перевірку обчислень, склавши рівняння за ЗСК для вузла „3”:

$$-I_1 + I_2 - J + I_4 = 0.$$

Підставимо значення струмів:

$$-0,1 + 0,2 - 0,6 + 0,5 = 0.$$

Перевірка підтверджує правильність обчислень.

Задача 6 Метод вузлових напруг

Визначити струми в колі рис. 6.1 методом вузлових напруг за тих самих вихідних даних, що й у задачі 5.

Розв’язок

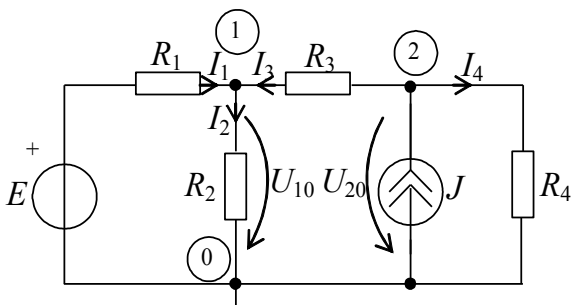


Рисунок 6.1

1 Задано умовно-позитивними напрямками шуканих струмів, як показано на рис. 6.1.

2 Схема містить три неусувні вузли: 1, 2, 0. За базисний оберемо вузол 0.

Для решти вузлів складемо рівняння за методом вузлових напруг щодо напруг U_{10} та U_{20} :

$$\textcircled{1} G_{11}U_{10} + G_{12}U_{20} = I_{11};$$

$$\textcircled{2} G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} = I_{22},$$

де U_{10} , U_{20} – шукані вузлові напруги;

G_{11} , G_{22} – власні провідності вузлів 1 та 2;

$G_{12} = G_{21}$ – взаємні провідності поміж вузлами 1 та 2;

I_{11} , I_{22} – вузлові струми вузлів 1 та 2 відповідно;

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0,2 \text{ СМ};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0,2 \text{ СМ};$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_3} = -\frac{1}{10} = -0,1 \text{ СМ};$$

$$I_{11} = \frac{E}{R_1} = \frac{G}{20} = 0,3 \text{ А};$$

$$I_{22} = J = 0,6 \text{ А}.$$

Підставимо дістані значення до системи рівнянь і розв'яжемо її відносно напруг U_{10} та U_{20} :

$$\begin{cases} 0,2U_{10} - 0,1U_{20} = 0,3; \\ -0,1U_{10} + 0,2U_{20} = 0,6. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,2 & -0,1 \\ -0,1 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,2 \cdot 0,2 - (-0,1)(-0,1) = 0,04 - 0,01 = 0,03;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,6 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,3 \cdot 0,2 - (-0,1)0,6 = 0,06 + 0,06 = 0,12;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,2 \cdot 0,6 - 0,3(-0,1) = 0,12 + 0,03 = 0,15;$$

$$U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0,12}{0,03} = 4 \text{ В};$$

$$U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0,15}{0,03} = 5 \text{ В}.$$

3 Знаючи вузлові напруги, визначимо струми гілок:

$$I_1 = \frac{E - U_{10}}{R_1} = \frac{6 - 4}{20} = 0,1 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U_{10}}{R_2} = \frac{4}{20} = 0,2 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{21}}{R_3} = \frac{U_{20} - U_{10}}{R_3} = \frac{5 - 4}{10} = 0,1 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{U_{20}}{R_4} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ А}.$$

4 Перевірку обчислень можна виконати шляхом складання рівняння балансу потужностей:

$$-E \cdot I_1 + I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 - U_{20} \cdot J + I_4^2 \cdot R_4 = 0;$$

$$-6 \cdot 0,1 + 0,1^2 \cdot 20 + 0,2^2 \cdot 20 + 0,1^2 \cdot 10 - 5 \cdot 0,6 + 0,5^2 \cdot 10 = 0;$$

$$-0,6 + 0,2 + 0,8 + 0,1 - 3 + 2,5 = 0;$$

$$-3,6 + 3,6 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Перевірка підтверджує правильність обчислень.

Задача 7 Метод еквівалентного джерела

Визначити струм I_3 у колі рис. 7.1, а методом еквівалентного джерела напруги, якщо $E_1=20$ В, $E_2=10$ В, $R_1=10$ Ом, $R_2=20$ Ом, $R_3=30$ Ом.

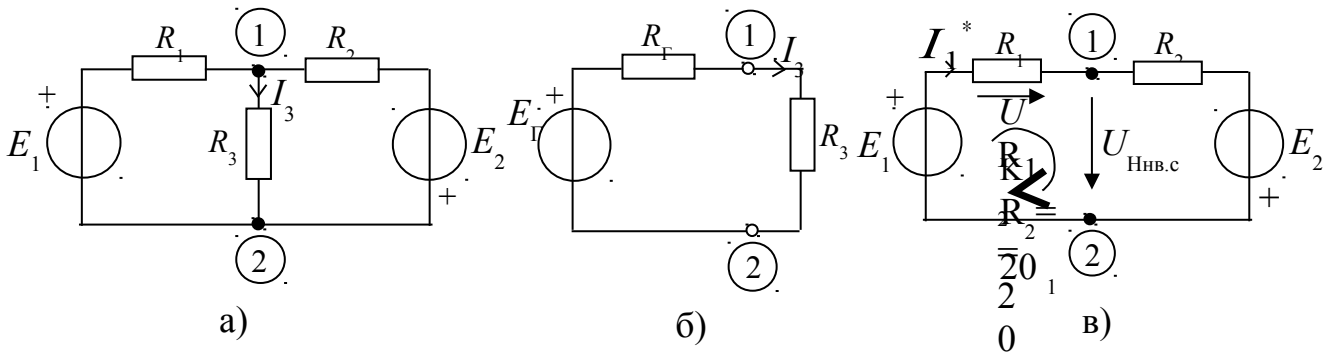


Рисунок 7.1

Розв'язок

Гілку з опором R_3 вважатимемо за навантаження, а решту схеми – за автономний двополіусник з E_Γ та R_Γ . Внаслідок цього дістанемо схему, показану на рис. 7.1, б для якої $I_3 = \frac{E_\Gamma}{R_\Gamma + R_3}$ (*).

Визначимо E_Γ та R_Γ . Для визначення E_Γ вимкнемо в схемі рис. 7.1, а R_3 та визначимо напругу поміж вузлами 1 та 2 $U_{\text{ННВ.с}}$ рис. 7.1, в.

Для цього визначимо струм I_1^* :

$$I_1^* = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = \frac{30}{30} = 1 \text{ А}.$$

Тепер $U_1 = I_1^* \cdot R_1 = 1 \cdot 10 = 10 \text{ В}$ і, згідно з другим законом Кірхгофа для контура 1:

$$\begin{aligned} U_1 + U_{\text{ННВ.с}} - E_1 &= 0, \\ U_{\text{ННВ.с}} &= E_1 - U_1 = 20 - 10 = 10 \text{ В}; \\ U_{\text{ННВ.с}} &= E_\Gamma = 10 \text{ В}. \end{aligned}$$

Для визначення $R_\Gamma = R_{\text{BX12}}$ покладемо в схемі рис. 7.1, в величини напруг відповідних джерел дорівнюваними нулеві. Як результат дістанемо схему рис. 7.2.

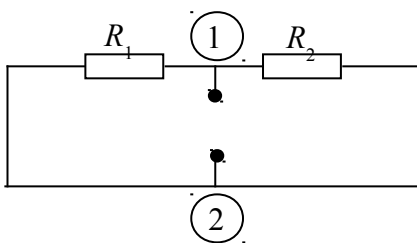


Рисунок 7.2

Опір R_{BX12} дорівнює

$$R_{\text{BX12}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = 6,666 \text{ Ом}.$$

Підставивши віднайдене $U_{\text{ННВ.с}} = 10 \text{ В}$ та $R_\Gamma = R_{\text{BX12}} = 6,666$ у вираз (*), дістанемо

$$I_3 = \frac{10}{6,666 + 30} = 0,272 \text{ А}.$$

Віднайдений у такий спосіб струм збігається зі струмом I_3 в аналогічній задачі 3.

Задача 8 Дуальні перетворення

На рис. 8.1 наведено вихідне коло. Побудувати схему, дуальну до даної.

Розв'язок

Для дістання дуального кола треба виконати заміну термінів та елементів відповідно до таблиці 8.1:

Таблиця 8.1 – Дуальні величини

Вузол	Контур	u	i	R	L	C
Контур	вузол	i	u	G	C	L

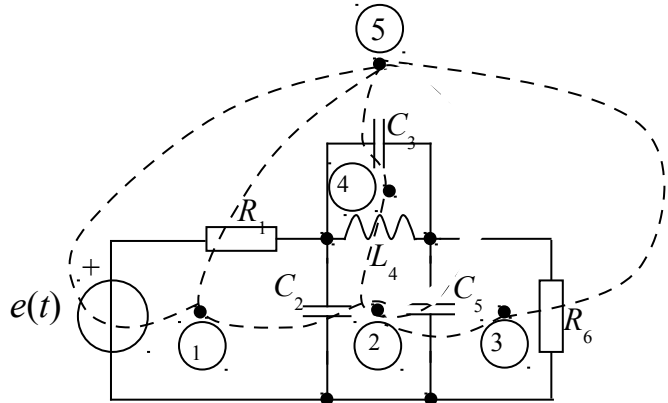


Рисунок 8.1

Побудову дуального кола розіб'ємо на етапи:

а) у контурах-осередках оберемо вузли й пронумеруємо їх;

б) сполучимо вузли лініями, які проходять через кожний елемент вихідного кола (див. рис. 8.1), внаслідок чого дістанемо граф дуального кола (штрихові лінії);

в) замінимо гілки графа дуального кола на дуальні елементи щодо елементів вихідного кола.

Дістанемо шукану схему рис. 8.2.

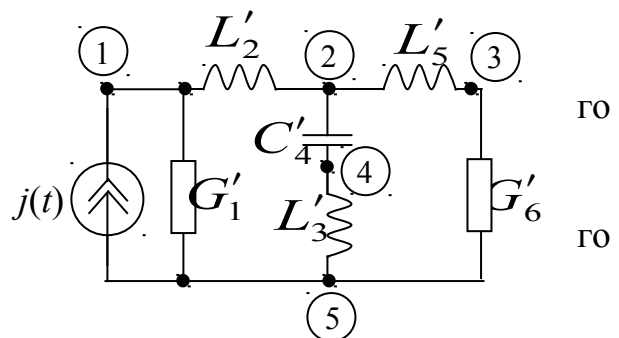


Рисунок 8.2

Задача 9 Метод комплексних амплітуд

Схему двополюсника наведено на рис. 9.1. Записати опір двополюсника в комплексній формі $Z(j\omega)$ й провідність $Y(j\omega)$.

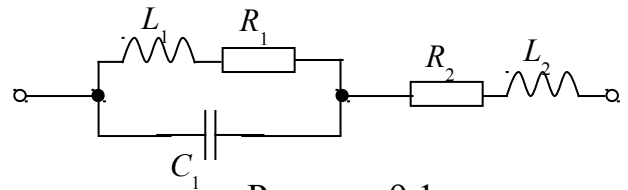


Рисунок 9.1

Розв'язок

Символічна схема заміщення двополюсника наведена на рис. 9.2. Всі двополюсники на цій схемі мають розмірність [Ом].

На цьому рисунку Z_{L1} та R_1 , а також Z_{L2} та R_2 сполучено послідовно. Тому

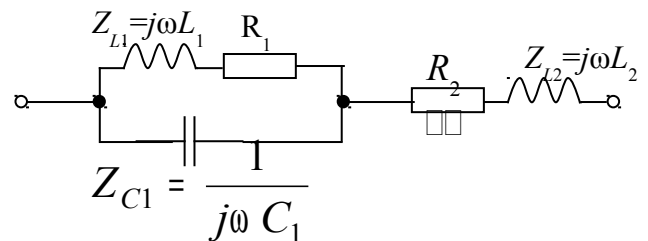


Рисунок 9.2

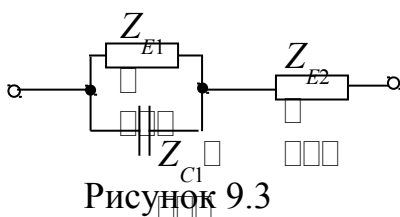


Рисунок 9.3

$$Z_{E1} = Z_{L1} + R_1 = j\omega L_1 + R_1,$$

$$Z_{E2} = Z_{L2} + R_2 = j\omega L_2 + R_2.$$

У колі рис. 9.3 Z_{E1} і Z_{C1} сполучено паралельно, а обидва ці елементи сполучено послідовно з Z_{E2} . Тоді опір двополюсника можна записати в такий спосіб:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{Z_{\mathcal{E}1} \cdot Z_{C1}}{Z_{\mathcal{E}1} + Z_{C1}} + Z_{\mathcal{E}2} = \frac{(j\omega L_1 + R_1) \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{j\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + j\omega L_2 + R_2 = \\ &= \frac{j\omega L_1 + R_1 + (j\omega L_2 + R_2)[(j\omega L_1 + R_1)j\omega C_1 + 1]}{(j\omega L_1 + R_1)j\omega C_1 + 1}. \end{aligned}$$

Провідність:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{(j\omega L_1 + R_1)j\omega C_1 + 1}{j\omega L_1 + R_1 + (j\omega L_2 + R_2)[(j\omega L_1 + R_1)j\omega C_1 + 1]}.$$

Подальші дії дістаним виразом для приведення його до вигляду

$$Z = \frac{a + jb}{c + jd} \text{ рекомендуємо проробити самостійно.}$$

Задача 10 Метод комплексних амплітуд

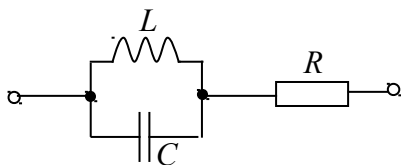


Рисунок 10.1

На рис. 10.1 зображена схема двополюсника, величини елементів якої рівні: $R = 50 \text{ Ом}$, $C = 20 \text{ мкФ}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$. Визначити опір двополюсника по постійному струмі ($\omega = 0$), при $\omega \rightarrow \infty$ і на частоті $\omega = 10^3 \text{ Р/с}$.

Розв'язок

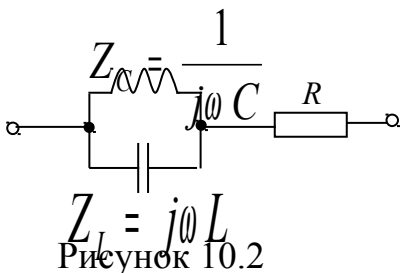


Рисунок 10.2

Символічна схема заміщування має вигляд рис. 10.2.

Тоді відповідно:

$$Z(j\omega) = \frac{Z_C \cdot Z_L}{Z_C + Z_L} + R = \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot j\omega L}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} + R = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} + R.$$

Звідси

$$Z(0) = R = 50 \text{ Ом};$$

$$Z(\infty) = R = 50 \text{ Ом};$$

$$Z(1000) = \frac{j \cdot 1000 \cdot 0,1}{1 - 10^6 \cdot 0,1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} - 50 = \frac{j \cdot 100}{1 - 2} + 50 = -j \cdot 100 + 50;$$

$$|Z| = \sqrt{50^2 + 100^2} = 111,8 \text{ Ом} \quad \theta_Z = \arctg \frac{-100}{50} = -63,43^\circ;$$

$$Z(j\omega) = 111,8 e^{-j63,43^\circ}.$$

Завдання 11 Метод комплексних амплітуд

До затискачів двополюсника рис. 11.1 прикладено напругу

$$u_1(t) = 80 \cdot \sin(1000t + 40^\circ), \text{ В}$$

й ним протікає струм $i_1(t) = 10 \cdot \sin(1000t + 85^\circ), \text{ мА}$. Визначити можливу схему заміщування двополюсника.

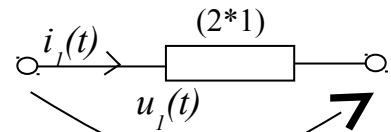


Рисунок 11.1

Розв'язок

Символічну схему заміщування цього двополюсника наведено на рис. 11.2, де $\dot{U}_{m1} = 80 \cdot e^{j40^\circ}$, $\dot{I}_{m1} = 0,01 \cdot e^{j85^\circ}$.

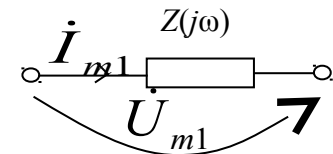


Рисунок 11.2

Комплексний опір цього двополюсника

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{I}_{m1}} = \frac{80e^{j40^\circ}}{0,01e^{j85^\circ}} = 8000e^{-j45^\circ} = 8000 \cdot \cos(-45^\circ) - j \cdot 8000 \cdot \sin(+45^\circ) = 5656 - j5656.$$

$$Z = R - jX. \text{ Отже } R = 5656 \text{ Ом}; X = 5656 \text{ Ом}; X = \frac{1}{\omega \cdot C};$$

$$C = \frac{1}{\omega X} = 0,17568 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0,1768 \text{ мкФ}.$$

Можливу схему заміщування двополюсника на частоті $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ наведено на рис. 11.3.

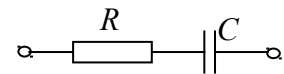


Рисунок 11.3

Задача 12 Метод комплексних амплітуд

Обчислити струми й напруги в колі, схему якого зображено на рис. 12.1, якщо $e(t) = 6 \cdot \cos(10^6 \cdot t + \frac{\pi}{4}) \text{ В}$, $R_1 = 1000 \text{ Ом}$, $R_2 = 2000 \text{ Ом}$, $L_2 = 2 \text{ мГн}$. Відповідь подати у вигляді функцій часу. Побудувати векторну діаграму струмів і напруг.

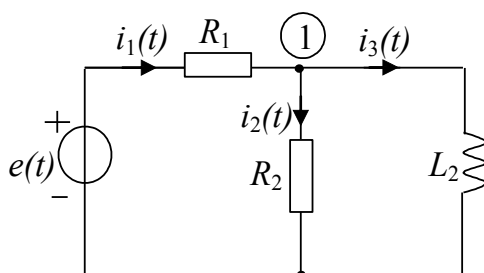


Рисунок 12.1

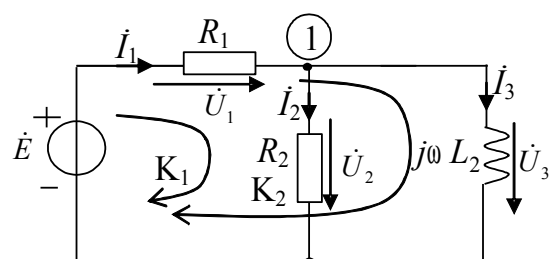


Рисунок 12.2

Розв'язок

Символічну схему заміщування кола рис. 12.1 наведено на рис. 12.2. Діюче значення напруги джерела в комплексній формі $\dot{E} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 45^\circ} = 3 + 3j$.

Задамося позитивними напрямками струмів та напруг, як показано на рисунку 12.2. Схема містить одне джерело, а елементи утворюють паралельно-послідовне сполучування. Для розрахунків застосуємо метод аналізування кола з одним джерелом. Опір двополюсника щодо затисків джерела

$Z = R_1 + \frac{j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot R_2}{j \cdot \omega \cdot L_2 + R_2}$. За законом Ома $\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z}$, $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot R_1$, за формулою „чужого” опору $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot L_2}{j \cdot \omega \cdot L_2 + R_2}$, $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2}$.

За законом Ома $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot R_2$, $\dot{U}_3 = \dot{I}_3 \cdot j \cdot \omega \cdot L_2$.

Підставимо числові значення й виконаємо розрахунки:

$$\omega \cdot L_2 = 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2000 \text{ Ом};$$

$$Z = 1000 + \frac{j \cdot 2000 \cdot 2000}{j \cdot 2000 + 2000} = 1000 + \frac{j \cdot 2000}{1 + j} =$$

$$= 1000 + \frac{2000}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 45^\circ} = 2000 + j \cdot 1000 = 1000 \cdot \sqrt{5} \cdot e^{j \cdot 26,57^\circ}, \text{ Ом}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\frac{6}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 45^\circ}}{1000 \cdot \sqrt{5} \cdot e^{j \cdot 26,57^\circ}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} = (1,8 + j0,6) \cdot 10^{-3}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_1 = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} \cdot 1000 = 1,9 \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} = 1,8 + j0,6, \text{ В};$$

$$\dot{I}_2 = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} \cdot \frac{j \cdot 2000}{j \cdot 2000 + 2000} = 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 63,63^\circ} = (0,6 + j1,2) \cdot 10^{-3}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_2 = 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 63,63^\circ} \cdot 2000 = 2,68 \cdot e^{j \cdot 63,63^\circ} = 1,2 + j2,4, \text{ В};$$

$$\dot{I}_3 = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 18,43^\circ} \cdot \frac{2000}{j \cdot 2000 + 2000} = 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j \cdot 25,55^\circ} =$$

$$= (1,2 - j0,6) \cdot 10^{-3}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_3 = 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j \cdot 63,63^\circ} \cdot j \cdot 2000 = 2,68 \cdot e^{j \cdot 63,63^\circ} = 1,2 + j2,4, \text{ В}.$$

Виконаємо перевірку розрахунків, склавши рівняння за законами Кірхгофа. Для першого вузла на підставі першого закону Кірхгофа можна записати:

$$- \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0, \text{ чи } \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_1.$$

Підставимо значення:

$$\begin{aligned}
 & -1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j18,39^0} + 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j63,59^0} + 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j25,56^0} = \\
 & = (-1,8 - j \cdot 0,6) + (0,6 + j \cdot 1,2) + (1,2 - j \cdot 0,6) \cdot 10^{-3} = 0.
 \end{aligned}$$

Векторна діаграма струмів наведена на рис. 12.3.

Для першого контуру K_1 на підставі другого закону Кірхгофа можна записати: $-\dot{E} + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0$ чи $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{E}$.

Підставимо значення:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{6}{\sqrt{2}} \cdot e^{j45^0} + 1,9 \cdot e^{j18,39^0} + 2,68 \cdot e^{j63,59^0} = \\
 & = (-3 - j \cdot 3) + (1,8 + j \cdot 0,6) + (1,2 + j \cdot 2,4) = 0.
 \end{aligned}$$

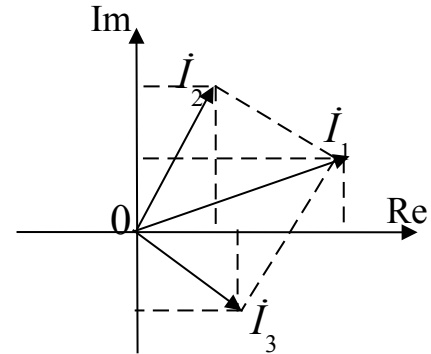


Рисунок 12.3

Перевірка підтвердила правильність розрахунків. Перейдемо від комплексних значень напруг і струмів до функцій часу:

$$i_1(t) = 1,9 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cdot \cos(10^6 \cdot t + 18,39^0), A;$$

$$i_2(t) = 1,34 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cdot \cos(10^6 \cdot t + 63,59^0), A;$$

$$i_3(t) = 1,34 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cdot \cos(10^6 \cdot t - 25,56^0), A;$$

$$u_1(t) = 1,9 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(10^6 \cdot t + 18,39^0), B;$$

$$u_2(t) = u_3(t) = 2,68 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(10^6 \cdot t + 63,59^0), B.$$

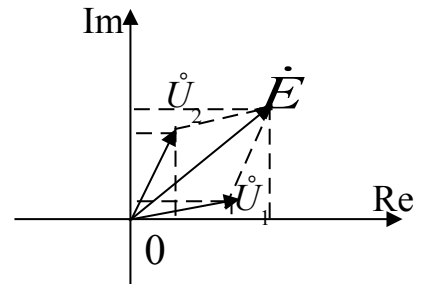


Рисунок 12.4

Векторну діаграму напруг наведено на рис. 12.4

Для перевірки обчислень складемо баланс потужностей.

$$\tilde{S}_{дж} = \tilde{S}_н;$$

$$\tilde{S}_{дж} = P_{дж} + jQ_{дж} = S_{дж} \cdot e^{j\varphi};$$

$$\tilde{S}_н = P_н + jQ_н = S_н \cdot e^{j\varphi};$$

$$\tilde{S}_{дж} = \dot{E} \cdot I_1^* = \frac{6}{\sqrt{2}} e^{j45^0} \cdot 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j18,43^0} = 7,2 \cdot 10^{-3} + j \cdot 3,6 \cdot 10^{-3};$$

$$S_{дж} = E \cdot I_1 = \sqrt{P_{дж}^2 + Q_{дж}^2} = 8,06 \cdot 10^{-3} [BA];$$

$$P_н = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 = (1,9 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1000 + (1,34 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2000 = 7,2 \cdot 10^{-3} [BT];$$

$$Q_н = I_3^2 \cdot X_L = (1,34 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2000 = 3,6 \cdot 10^{-3} [BAp];$$

$$S_н = \sqrt{P_н^2 + Q_н^2} = 8,05 \cdot 10^{-3} [BA].$$

При порівнюванні здобутих результатів видно, що $P_{дж} = P_н = 7,2 \cdot 10^{-3} [BT]$ й $Q_{дж} = Q_н = 3,6 \cdot 10^{-3} [BAp]$, $S_{дж} = S_н = 8,05 \cdot 10^{-3} [BA]$. Отже, обчислення виконано правильно.

Задача 13 Аналізування нелінійних кіл

Визначити струми гілок кола, схему якого зображено на рис. 13.1, а параметри елементів є: $E = 10$ В, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, вольт-амперна характеристика нелінійного елемента апроксимується виразом $i = 0,1u^2$, А.

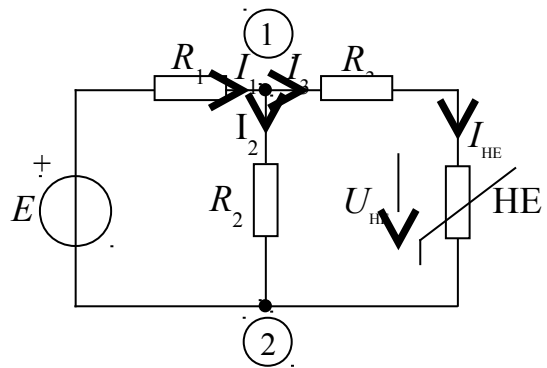


Рисунок 13.1

Розв'язок

- 1 Скористаємося методом еквівалентного генератора напруги. Замінімо ділянку кола, яка містить джерело напруги й опори R_1 , R_2 , R_3 на еквівалентне джерело напруги (рис. 13.2).

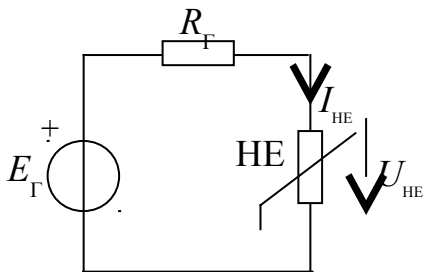


Рисунок 13.2

Параметри E_Γ та R_Γ визначимо в такий спосіб. Задаюча напруга ідеального джерела напруги E_Γ визначається як напруга ненавантаженого стану $U_{\text{ННВ.с}}$ за вимкнення HE (рис. 13.3).

Опори R_1 та R_2 утворюють дільник напруги, тому

$$U_{\text{ННВ.с}} = U_{R_2} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \frac{10}{10 + 10} = 5 \text{ В};$$

$$E_\Gamma = U_{\text{ННВ.с}} = 5 \text{ В}.$$

Опір R_Γ визначається як вхідний опір кола відносно затискачів нелінійного елемента за умови, що джерело напруги замінене на перемичку (КЗ) (рис. 13.4):

$$R_\Gamma = R_{\text{вх}} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 5 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 10 \text{ Ом}$$

- 2 Струм i

і напругу на нелінійному елементі (I_{HE} , U_{HE}) визначимо графічним методом. Побудуємо вольт-амперну характеристику нелінійного елемента, попередньо обчисливши її за апроксимувальним виразом $i = 0,1u^2$, А.

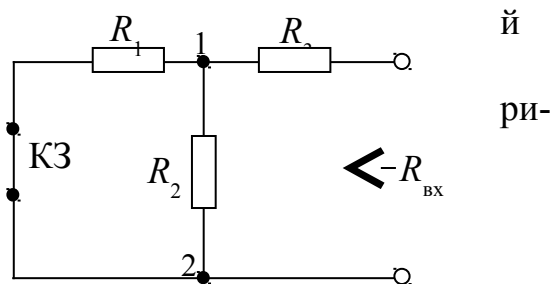


Рисунок 13.4

Таблиця 13.1

$U, \text{В}$	0	1	2	3	4	5
$I, \text{А}$	0	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5

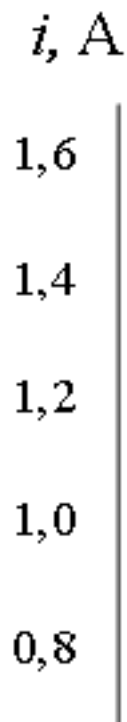


Рисунок 13.5

По осі напруг відкладаємо напругу еквівалентного генератора $E_{\Gamma} = 5 \text{ В}$, а на осі струмів – максимально можливий струм у колі $I_{\text{кз}} = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ А}$.

Сполучивши поміж собою ці точки, дістанемо навантажувальну пряму, перетинання якої з вольт-амперною характеристикою дає робочу точку нелінійного елемента РТ. Координати робочої точки є значеннями струму й напруги на нелінійному елементі (I_{HE} й U_{HE} відповідно). Отже, за допомогою графічного методу визначили $I_{\text{HE}} \approx 0,3 \text{ А}$, $U_{\text{HE}} \approx 1,7 \text{ В}$.

3 Повернімося до початкової схеми рис. 13.1.

Вочевидь, що $I_{\text{HE}} = I_3 = 0,3 \text{ А}$.

Використовуючи закон Ома й ЗНК для контура, який містить елементи R_2 , R_3 , HE, визначимо струм I_2 :

$$I_3 R_3 + U_{\text{HE}} - I_2 R_2 = 0;$$

$$I_2 = \frac{I_3 R_3 + U_{\text{HE}}}{R_2} = \frac{0,3 \cdot 5 + 1,7}{10} = 0,32 \text{ А}.$$

Зі ЗСК для вузла 1 визначимо струм I_1 :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0;$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0,32 + 0,3 = 0,62 \text{ А}.$$

Точність обчислень таким методом залежить переважно від точності виконання графічної частини розв'язку.

Для перевірки розрахунків складемо баланс потужностей:

$$- E \cdot I_1 + I_1^2 \cdot R_1^2 + I_2^2 \cdot R_2^2 + I_3^2 \cdot R_3^2 + I_{\text{НЭ}} \cdot U_{\text{НЭ}} = 0;$$

$$- 10 \cdot 0,62 + (0,62)^2 \cdot 10 + (0,32)^2 \cdot 10 + (0,3)^2 \cdot 5 + 0,3 \cdot 1,7 = 0;$$

$$- 6,2 + 3,844 + 0,1024 \cdot 10 + 0,09 \cdot 5 + 0,51 = 0;$$

$$- 6,2 + 3,844 + 1,024 + 0,45 + 0,51 = 0;$$

$$6,2 = 3,844 + 1,024 + 0,45 + 0,51;$$

$$6,2 \approx 5,83.$$

Похибка становить $\frac{6,2 - 5,82}{6,2} \cdot 100\% = 6\%$, що є цілковито прийнятно за графоаналітичного методу обчислювання.

Редактор І.В. Ращупкіна
Комп'ютерне макетування Ж.А. Гардиман